DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *20/04/2017*

I	Moindres Carrés (57 pts)
II	Interpolation & Dérivation Numérique (24 pts)
III	Calcul Matriciel (16 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (14 pts)
V	Résolution de Système d'Équations Différentielles (12 pts)
Total	123 points

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Moindres Carrés (57 pts)

Une comète évolue dans notre système solaire et quelques-unes de ses positions ($N = 4$ en tout), exprimées dans un certain système de coordonnées polaires, ont été faites et sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Table 1 :

θ_i	0.85	1.17	1.45	2.19
$R_i = R(\theta_i)$	2.70	2.00	1.60	1.00

Où θ est exprimée en radians.
On sait, d'après la première loi de Kepler, que si les perturbations provenant des planètes de ce système sont négligables, cette comète devrait évoluer selon une orbite plane de forme elliptique ou hyperbolique d'équation :

$$R(\theta) = p/(1 - e\cos(\theta)) \tag{1}$$

avec les paramètres $[p, e]$ qui sont appelés respectivement le paramètre de l'orbite et l'excentricité.
Le but de cet exercice est de chercher à estimer les paramètres $[p, e]$ de cette trajectoire qui s'ajustent le mieux aux données (contenues dans la table 1), au sens du critère des moindres carrés.
On pourra éventuellement utiliser le tableau suivant dans lequel certaines/toutes de ses égalités vous permettront de sauver du temps de calcul pour la résolution des questions suivantes.

$\sum_{i=1}^{N} \cos\theta_i \approx 0.591$	$\sum_{i=1}^{N} \cos^2\theta_i \approx 0.939$	$\sum_{i=1}^{N} (\cos\theta_i)/R_i \approx -0.065$	$\sum_{i=1}^{N} (1/R_i) \approx 2.495$

1. **Régression Linéaire**
   Pour simplifier la résolution de ce problème d'estimation au sens des moindres carrés, on va d'abord essayer de se ramener, par changement de variable, à de nouvelles données cherchant à s'ajuster linéairement à une droite d'équation : $Y = aX + b$

   (a) Faîte le changement de variable $Y = 1/R$ et $X = \cos(\theta)$ et exprimer ensuite les paramètres (a, b) de cette droite en fonction des paramètres $[p, e]$ de la loi orbitale exprimée par l'eq. (1).
   <5 pts>

   (b) En supposant que l'on fasse le changement de variable de la question précédente, donner l'expression du résidu $R(a, b)$ (ou écart quadratique) qui serait minimisé par cette régression linéaire par la méthode des moindres carrés.
   <3 pts>

   (c) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a et b.
   <3 pts>

   (d) Trouver les coefficients a et b en résolvant ces équations normales par la méthode du pivot de Gauss (sans pivotage).
   <8 pts>

   (e) On voudrait résoudre ces équations normales par la méthode itérative de Jacobi ou de Gauss-Seidel. Indiquer si la convergence est assurée dans ces deux cas, donner les relations itératives de Jacobi et Gauss-Seidel de ce système d'équations et faire les quatre premières itérations (i.e., jusqu'à $a^{[4]}, b^{[4]}$) de la relation itérative de Gauss-Seidel en partant de $a^{[0]} = 0.0$ et $b^{[0]} = 0.0$.
   <10 pts>

   (f) Rappelez pourquoi on dit que l'algorithme itératif de Gauss-Seidel est autocorrecteur ?
   <4 pts>

   (g) En déduire les paramètres $[p, e]$ de cette loi orbitale à partir des coefficients trouvés par la méthode du pivot de Gauss de la question (d).
   <4 pts>

(h) Expliquer pourquoi cette méthode des moindres carrés peut être utilisé pour débruiter dans une certaine mesure les données de la Table 1.
<4 pts>

(i) Imaginons que chaque donnée de la table 1 à été prise par un technicien différent après une série de mesures nécessitant un bon calibrage, réglage, une bonne lecture de plusieurs appareils de mesures, quelques calculs utilisant ces mesures correctement arrondies, etc. On aimerait savoir quel est le technicien qui a opéré le plus correctement possible et celui qui a relevé la donnée la moins fiable. Définir une stratégie permettant d'identifier ces deux techniciens.
<4 pts>

2. **Régression Non-Linéaire**
Dans cette partie, on ne fera aucun changement de variable pour se ramener au cas linéaire comme précédemment et on considérera directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[p, e]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidue $R(p,e) = \sum_{i=1}^{N}(R(\theta_i) - R_i)^2$, c'est-à-dire une régression non linéaire.

(a) Donner le système d'équations équations (non-linéaires) permettant de trouver les coefficients $[p, e]$ au sens des moindres carrés de cette loi orbitale et simplifier ce système au maximum.
<8 pts>

(b) Indiquez (sans le résoudre) si le système d'équations non linéaires obtenu précédemment serait assurer de converger si on le résolvait avec une méthode itérative de type point fixe du style Jacobi ou Gauss-Seidel ?
<4 pts>

Réponse

1(a)

En posant Y=1/R et X=cos(θ), on arrive facilement à un problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données : $Y = aX + b = \underbrace{(-e/p)}_{a}\ X + \underbrace{(1/p)}_{b}$ avec les paramètres $a = (-e/p)$ et $b = (1/p)$.
<5 pts>

1(b)

Après changement de variable, le résidu que l'on cherchera à minimiser par cette technique des moindres carrés est
<3 pts>

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big(Y_i - (a\, X_i + b)\Big)^2$$

1(c)

Les paramètres (a, b) sont solutions des équations normales ou du système matriciel suivant (cf. cours) :

<3 pts>

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i\, Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{pmatrix}$$

1(d)

Avec le changement de variable $Y = 1/R$ et $X = \cos(\theta)$, on trouve les données suivantes :

X_i	0.660	0.390	0.121	−0.580
Y_i	0.370	0.500	0.625	1.000

qui donc doivent se distribuer linéairement et le système d'équations linéaires suivantes (en utilisant le tableau de valeurs donné dans l'énoncé) :

$$\begin{pmatrix} 0.939 & 0.591 \\ 0.591 & 4.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.065 \\ 2.495 \end{pmatrix}$$

puis par une opération élémentaire ; $R_2 = R_2 - \frac{0.591}{0.939} R_1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0.939 & 0.591 \\ 0 & 3.628 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.065 \\ 2.536 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $\boxed{b \approx 0.699}$, puis, $0.939a + 0.591 \times (0.699) = -0.065$, i.e., $\boxed{a \approx -0.51}$
<8 pts>

1(e)

La convergence est assurée car le système est diagonalement dominant. Pour Jacobi, on a la relation itérative suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^{[n+1]} & = & -0,6294\, b^{[n]} - 0.0692 \\ b^{[n+1]} & = & -0.14775\, a^{[n]} + 0.62375 \end{array} \right.$$

et pour Gauss-Seidel (qui utilise l'information la plus récente pour $a^{[n]}$ dans la deuxième relation itérative) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^{[n+1]} & = & -0,6294\, b^{[n]} - 0.0692 \\ b^{[n+1]} & = & -0.14775\, a^{[n+1]} + 0.62375 \end{array} \right.$$

En partant de $a^{[0]} = 0.0$ et $b^{[0]} = 0.0$, on obtient pour Gauss-Seidel :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{[1]} = -0.0692 \\ b^{[1]} = 0.0102 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{[2]} = -0.0756 \\ b^{[2]} = 0.6349 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{[3]} = -0.4688 \\ b^{[3]} = 0.6930 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{[3]} \approx -0.51 \\ b^{[3]} \approx 0.699 \end{array} \right.$$

<10 pts>

Nota : On remarque que la relation itérative de Gausss-Seidel converge très vite (en 4 itérations) vers une bonne estimation des deux paramètres en partant d'une condition initiale qui aurait pu être bien meilleure et bien plus réaliste. De plus, même si a chaque itération on approxime les solutions estimées en commettant des petites fautes d'arrondissement, le système mettra plus d'itération mais finira inévitablement par converger puisque celui-ci est autocorrecteur et diagonalement dominant !

1(f)

Si on commet une erreur de calcul au cours du processus itératif de Gauss-Seidel (erreur de calcul ou d'arrondissements ou autres), tout se passe comme si on recommençait le calcul à partir d'un nouveau vecteur initial $a^{[\cdot]}$ et $b^{[\cdot]}$. Si la convergence du système est assurée, Le système itératif mettra plus de temps pour converger mais sera inévitablement attiré par la solution (c'est-à-dire le point fixe) !
<4 pts>

Nota : De manière paradoxale, le fait de commettre une erreur peut donc éventuellement améliorer la convergence de la méthode utilisée. En effet, l'erreur commise peut avoir comme conséquence qu'on redémarre le calcul avec un vecteur plus proche de la solution. Ceci peut avoir un effet accélérateur de convergence. Cette caractéristique est d'ailleurs exploitée en pratique par la technique de sur-relaxation vue en cours.

1(g)

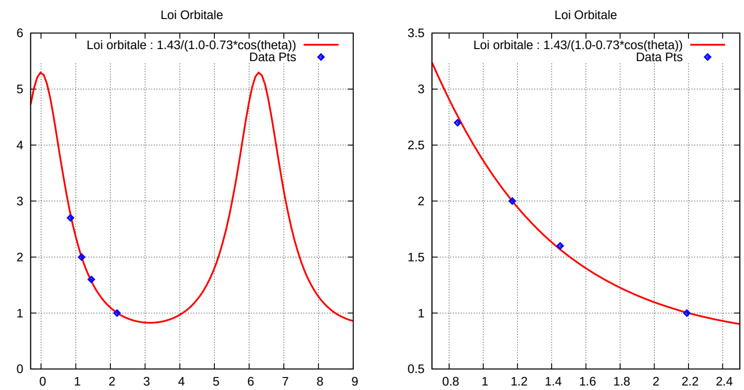
On va utiliser les résultats donnés par la relation du pivot de Gauss. En utilisant le fait que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -e/p \\ b & = & 1/p \end{array} \right.$$

On obtient facilement, d'abord : $p \approx 1.43$, puis : $e = -a\, p \approx 0.73$.

<4 pts> Soit la loi orbitale suivante : $\boxed{R(\theta) \approx 1.43/(1-0.73\cos(\theta))}$

Nota : Voici graphiquement à quoi ressemble l'ajustement de ces 4 points (avec un agrandissement pour le graphe de droite) :



1(h)

Si on re-calcule les R_i par la loi orbitale trouvée précédemment $R(\theta) \approx 1.43/(1-0.73\cos(\theta))$ pour les 4 θ_i due la Table 1, on aura des données qui seront plus fiables car celles-ci intégreront (comme contrainte) le modèle physique sous-jacent qui les a généré.
<4 pts>

Nota : Si tous les techniciens avaient pris toutes les 4 mesures, celui qui aurait le residu le plus faible (après avoir calculé q et b) serait le technicien le plus fiable.

1(i)

On pourrait recalculer, à partir du modèle estimé au sens des moindres carrés quelle est la mesure qui s'éloigne le plus de ce modèle et quelle est la mesure qui est la plus proche de ce modèle.

θ_i	0.85	1.17	1.45	2.19
$R_i = R(\theta_i)$	2.70	2.00	1.60	1.00
$R_i = 1.43/(1-0.73\cos(\theta_i))$	2.75949	1.999	1.400	1.004

Dans cet exemple on voit que la deuxième et quatrième mesures semble la plus fiable et la troisième la moins fiable avec une erreur de plus de 14%.
<4 pts>

2(a)

Trouver les paramètres $[p, e]$ au sens des moindres carrés, c'est estimer $[p, e]$ pour que :

$$R_2 = R(p,e) = \sum_{i=1}^{N=4} \left[R_i - p/(1-e\cos\theta_i]\right)^2 \quad \text{soit minimal,}$$

c'est-à-dire tel que $\frac{\partial R(p,e)}{\partial p} = 0$ et $\frac{\partial R(p,e)}{\partial e} = 0$.
<2 pts>

▷ La dérivation par rapport au paramètre P nous donne :

$$\frac{\partial R(p,e)}{\partial p} \;=\; \sum_{i=1}^{N}\Big(R_i - \frac{p}{1-e\cos\theta_i}\Big)\Big(\frac{1}{1-e\cos\theta_i}\Big) = 0$$

qui peut se simplifier en : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\Big\{R_i(1-e\cos\theta_i) - p\Big\} = 0$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} R_i - e\Big\{\sum_{i=1}^{N} R_i\cos\theta_i\Big\} - N\,p = 0$

ou alors, on on pourrait ici isoler p fonction de e : $\displaystyle p = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} R_i\,(1-e\cos\theta_i)$

<3 pts>

Nota : La notation concise permettrait d'écrire numériquement $\boxed{p \approx 1.825 - 0.544\,e}$

▷ Maintenant, la dérivation par rapport au paramètre e nous donne :

$$\frac{\partial R(p,e)}{\partial e} \;=\; \sum_{i=1}^{N}\Big(R_i - \frac{p}{1-e\cos\theta_i}\Big)\Big(\frac{p\cos\theta_i}{(1-e\cos\theta_i)^2}\Big) = 0$$

qui peut se simplifier en : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} R_i\cos\theta_i + e\sum_{i=1}^{N} R_i\cos^2\theta_i - p\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i = 0$

<3 pts>

On obtient donc :

$$\begin{cases} F_1(p,e) = \sum_{i=1}^{N} R_i - e\Big\{\sum_{i=1}^{N} R_i\cos\theta_i\Big\} - N\,p \;=\; 0 \\ F_2(p,e) = \sum_{i=1}^{N} R_i\cos\theta_i + e\sum_{i=1}^{N} R_i\cos^2\theta_i - p\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i \;=\; 0 \end{cases}$$

Nota : ou encore numériquement et en en utilisant la relation du NOTA précédent :

$$\begin{cases} p \approx 1.825 - 0.544\,e \\ 2.175 + 1.84\,e + 0.591p \approx 0 \end{cases}$$

2(b)

Pour que la convergence soit assurée (si on utilisait une méthode de type jacobi ou Gauss-Seidel), il faudrait que $\left|\frac{\partial G_1(p,e)}{\partial p}\right| + \left|\frac{\partial G_1(p,e)}{\partial e}\right| < 1$ et $\left|\frac{\partial G_2(p,e)}{\partial p}\right| + \left|\frac{\partial G_2(p,e)}{\partial e}\right| < 1$ sur un intervalle contenant la solution et $p^{[0]}$ et $r^{[0]}$, avec $G_1(p,e) = p$ et $G_2(p,e) = e$ et dans le cas où ce système serait non-linéaire.

Or le système de la question précédente n'a plus de non-linéarié ; et on peut l'écrire : $p + 0.544e \approx 1.825$ et $0.591p + 1.84e = -2.175$. La généralisation de la condition de convergence précédente, dans le cas d'un système linéaire, est la condition de diagonalement dominance.

Pour que l'on soit sur que ce système converge itérativement, il faut qu'il soit donc diagonalement dominant, ce qui est le cas. Le système converge itérativement, mais aussi en résolvant simplement ces deux équations linéaires et on retrouve aussi $p \approx 1.43$ et $e \approx 0.73$.

<4 pts>

II. Interpolation & Dérivation Numérique (24 **pts**)

On va reprendre le tableau de l'exercice I (moindre carrés) :

x_i	0.85	1.17	1.45	2.19
$y_i = y(x_i)$	2.70	2.00	1.60	1.00

1. On désire trouver le polynôme P_2 de collocation d'ordre 2 qui permette d'interpoler au mieux $y(x = 1.4)$. Trouver ce polynôme de collocation de deux façons différentes puis donner une estimation de $y(x = 1.4)$. Justifier bien la méthode et les points que vous utiliserez.
   <10 pts>
2. Rappeler les avantages et inconvénients de ces deux méthodes.
   <4 pts>
3. Indiquez de deux façons différentes comment on pourrait obtenir une estimation de $y'(x)$ pour $x = 1.31$.
   <10 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

On remarque que les points ne sont pas équidistants. Donc on peut utiliser soit la méthode de Lagrange, soit la méthode de Newton pour estimer ce polynome de collocaion d'ordre 2. De plus, pour minimiser les erreurs de collocation, on va donc prendre trois points (nécessaire pour un polynôme d'ordre 2) centrés autour de l'estimation, c'est-à-dire les points d'abscisse $[x_1 = 1.17 : x_2 = 1.45 : x_3 = 2.19]$.

- Méthode de Lagrange :

$$P_2(x) = \frac{(x-1.45)(x-2.19)}{(1.17-1.45)(1.17-2.19)} \cdot 2.0 + \frac{(x-1.17)(x-2.19)}{(1.45-1.17)(1.45-2.19)} \cdot 1.60 + \frac{(x-1.17)(x-1.45)}{(2.19-1.17)(2.19-1.45)} \cdot 1.00$$
$$P_2(x) \approx 7(x-1.45)(x-2.19) - 7.722(x-1.17)(x-2.19) + 1.325(x-1.17)(x-1.45)$$

Interpolation en $x = 1.4$ $\triangleright$ $P_2(x = 1.4) = (0.2765) + (1.4030874) + (-0.0152375)$ $\boxed{\approx 1.6644}$

- Méthode de Newton :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1.17	2.0		
		-1.429	
1.45	1.6		0.606
		-0.811	
2.19	1.0		

Donc un polynôme : $P_2(x) = 2 - 1.429(x-1.17) + 0.606(x-1.17)(x-1.45)$

Interpolation en $x = 1.4$ $\triangleright$ $P_2(x = 1.4) = (2) + (-0.32867) + (-0.006969)$ $\boxed{\approx 1.6644}$

<10 pts>

Nota -1- : C'est normal que l'on trouve la même chose car le polynôme trouvé est le même (plus rapidement avec la méthode de Newton).

Nota -2- : On rappelle que la méthode utilisant un système de 3 équations pour identifier les trois inconnus du polynôme P_2 n'est pas numériquement intéressante (car mal conditionnée, demandant beaucoup trop de calcul, en plus d'autres desavantages vus en cours) compartivement aux deux méthodes proposées ci-dessus.

$\boxed{\textbf{2.}}$

Plus d'opérations pour Lagrange comparativement à Newton. Par contre on est pas obligé de précalculer puis stocker un tableau de différence divisée avec Lagrange. Tout doit être recalculé pour Lagrange si on augmente l'ordre du pôlinome.

<4 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

La première façon consiste à dériver le polynôme de collocation que l'on a trouvé précédemment puis à calculer $P'(1.31)$. On prend la formule de Newton car elle nous demandera moins de travail pour dériver ce polynôme.

$$\begin{aligned}
\text{Donc un polynôme :}\quad P_2(x) &= 2 - 1.429(x-1.17) + 0.606(x-1.17)(x-1.45)\\
&= 0.606x^2 - 3.01672x + 4.7\\
\text{Une dérivée :}\quad P_2'(x) &= 1.212x - 3.01672\\
\text{Et une interpolation :}\quad P_2'(x=1.31) &\approx -1.429
\end{aligned}$$

La deuxième méthode consiste à remarquer que $x = 1.31$ est centré autour de $x = 1.17$ et $x = 1.45$ donc en utilisant la formule centrée :

$$P_2'(x=1.31) \approx \frac{1.60-2.00}{1.45-1.17} \approx -1.429$$

<10 pts>

Nota : C'est normale que l'on trouve la formule centrée est vient en fait de la dérivée de l'unique polynôme de collocation d'ordre 2.

III. Factorisation LU (16 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode de la factorisation directe. **<8 pts>**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode du pivot de Gauss. **<8 pts>**

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par factorisation directe, on trouve *directement* :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

<8 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par factorisation LU par pivot de Gauss, on trouve, en faisant d'abord $R_2 = R_2 - R_1$ et $R_3 = R_3 - 3R_1$ dans un premier temps puis $R_3 = R_3 + 2R_2$ dans un deuxième temps :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

En se servant des valeurs $R_2 = R_2 - \boxed{1}\,R_1$, et $R_3 = R_3 - \boxed{3}\,R_1$ sur la première colonne de la matrice L et de la valeur $R_3 = R_3 - \boxed{\text{-2}}\,R_2$ sur la deuxième colonne de la matrice L, on obtient donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{U}.$$

<8 pts>

IV. Résolution d'Équation Différentielle (14 pts)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)) = 1 + t \cdot \ln\big(y(t)\big) \tag{2}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 1$.

1. Écrire la relation itérative des séries de Taylor d'ordre local en h^3 permettant de résoudre pseudo-numériquement cette équation différentielle.
<4 pts>
2. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
<5 pts>
3. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (arrondisser et garder au moins quatre décimales).
<5 pts>

Réponse

1.

<4 pts>

$$y_{n+1} = y_n + h\left(1 + t_n \ln[y(t_n)]\right) + \frac{h^2}{2}\left(\ln[y(t_n) + \frac{t_n\left(1 + t_n \ln[y(t_n)]\right)}{y(t_n)}\right)$$

2.

Par la méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(1 + t_n \ln[y(t_n)]\right)$$

<2 pts>

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous :

n	t_n	y_n
0	0.0	1.000
1	0.2	1.200
2	0.4	1.407

<3 pts>

3.

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes :

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\left(1 + t_n \ln[y(t_n)]\right)}_{f(t_n, y_n)}$$

puis :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big) = y_n + \frac{h}{2}\big(1 + t_n \ln[y(t_n)] + 1 + t_{n+1} \ln[\tilde{y}_{n+1}]\big) \\ &= y_n + \frac{h}{2}\big(2 + t_n \ln[y(t_n)] + t_{n+1} \ln[\tilde{y}_{n+1}]\big) \end{aligned}$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci-dessous :

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	1.000	1.000
1	0.2	1.200	1.204
2	0.4	1.411	1.421

<4 pts>

V. Système d'Équations Différentielles (12 pts)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$x'''(t) + (x''(t))^3 + (x'(t))^2 + 0.25x(t) \quad = \quad 0$$

On considérera les conditions initiales $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$ et $x''(0) = 1$. On vous demande de :

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <4 pts>
2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser qu'elle serait le système de relations itératives qui serait obtenu.
   <4 pts>
3. À partir de $x(t = 0) = x_0 = 1.0$, trouver $x(t = 0.2)$ et $x(t = 0.4)$.
   <4 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En posant, $x'(t) = x_p(t)$ et $x'_p(t) = x_{pp}(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x_p(t) \\ x'_p(t) &= x_{pp}(t) \\ x'_{pp}(t) &= -x_{pp}^3(t) - x_p^2(t) - 0.25x(t) \end{cases}$$

<3 pts>

Avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $x_p(0) = 1$ et $x_{pp}(0) = 1$.

<1 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivantes :

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h\, x_p(t_n) \\ x_p(t_{n+1}) &= x_p(t_n) + h\, x_{pp}(t_n) \\ x_{pp}(t_{n+1}) &= x_{pp}(t_n) - h\Big(x_{pp}^3(t_n) + x_p^2(t_n) + 0.25x(t_n)\Big) \end{cases}$$

<4 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

En se souvenant que la fonction qui nous interesse (solution de l'équation différentielle) est $x(t)$ et en partant des conditions initiales $x(0) = 1$ et $x_p(0) = 1$ et $x_{pp}(0) = 1$, on obtient immédiatement pour $h = 0.2$:

$$\begin{cases} x(0.2) &= 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_p(0.2) &= 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_{pp}(0.2) &= 1.0 - 0.2\big(1^3 + 1^2 + 0.25 \times 1\big) = 0.55 \end{cases}$$

puis $x(0.4) = 1.2 + (0.2 \times 1.2) = 1.44$

<4 pts>

Nota : $x_p(0.2)$ et $x_{pp}(0.2)$ n'était pas demandé.