DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *18/04/2019*

I	Interpolation Numérique (31 pts)
II	Système d'Équations Non Linéaires (23 pts)
III	Calcul Matriciel (19 pts)
IV	Moindres Carrés (31 pts)
V	Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)
Total	114 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Interpolation Numérique (31 **pts**)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes. Soit la fonction à deux variables $z = f(x, y) = \exp(x)\sin(y) + y - 0.1$ que l'on a discrétisé régulièrement en x avec un pas h_x et en y avec un pas h_y et que l'on a résumé dans le tableau ci-dessous :

x \ y	0.2	0.3	0.4	0.5
1.0	0.640	1.003	1.359	1.703
1.5	0.990	1.524	2.045	2.549
2.0	1.568	2.384	3.177	3.943

1. Ce tableau est issu du cours (Chap. 4 p. 75) et, dans cet exercice, on désire aussi interpoler la fonction f en $x = 1.6$ et $y = 0.33$ par une surface de collocation et en utilisant une succession d'interpolations 1-D (utilisant donc plusieurs fois le polynôme de collocation) mais dans le sens contraire de celui fait en cours ; c'est-à-dire d'abord dans le sens des x puis ensuite dans le sens des y. Utiliser **toutes** les données du tableau pour interpoler au point demandé ou pour évaluer $f(x = 1.6, y = 0.33)$ avec trois chiffres après la virgule.
   <17 pts>
2. Pouvait-on prévoir à l'avance si le résultat de l'interpolation de la question précédente allait être identique ou non (à une erreur numérique près) à celle faite en cours dans le sens contraire (d'abord dans le sens des y puis ensuite dans le sens des x) ? Justifier bien votre réponse.
   <3 pts>
3. Si on avait utilisé la méthode de Lagrange au lieu de la méthode de Newton-Gregory, aurait-on trouvé le même résultat d'interpolation (à une erreur numérique près) ?
   Répondre à la même question si on avait utilisé une interpolation de type spline.
   <3 pts>
4. Essayons de quantifier l'erreur d'interpolation faîte et de trouver plus précisément dans un premier temps, une borne supérieure de l'erreur faîte lors de la première étape (interpolation dans le sens des x) dans le pire des 4 cas considérés, puis celle faite dans la deuxième étape (interpolation dans le sens des y). On va considérer qu'une approximation de la borne supérieure de l'interpolation en $f(x = 1.6, y = 0.33)$ est la plus pessimiste de ces deux bornes. Trouver ces deux bornes et indiquer celle qui est la plus pessimiste des deux pour donner une borne supérieure de l'erreur faite en interpolant $f(x = 1.6, y = 0.33)$. Combien donc il y a de chiffre significatif dans l'estimation donnée à la question 1. ?
   <8 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

On utilise comme dans le cours la méthode de Newton-Gregory qui est la méthode à utiliser si les points sont équidistants et ordonnés.

On veut utiliser toutes les données donc on va d'abord définir les 4 polynômes d'ordre 2 passant en $y = 0.2$, $y = 0.3$, $y = 0.4$ et $y = 0.5$ puis ensuite utiliser ces valeurs interpolées pour définir le polynôme d'ordre 3 passant par $x = 1.6$.

Pour $y = 0.2 : 0.3 : 0.4 : 0.5$, on a les tableaux de différence suivants :

$\Delta^0 x$	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^0 x$	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^0 x$	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^0 x$	Δx	$\Delta^2 x$
0.640			**1.003**			**1.359**			**1.703**		
	0.350			**0.521**			**0.686**			**0.846**	
0.990		**0.228**	1.524		**0.339**	2.045		**0.446**	2.549		**0.548**
	0.578			0.860			1.132			1.394	
1.568			2.384			3.177			3.943		

$$\text{Pour le polynôme : } P_2(s) = \Delta^0 x_0 + \tfrac{\Delta^1 x_0}{1!} x_0 s + \tfrac{\Delta^2 x_0}{2!} s(s-1)$$
$$\text{Avec : } s = (x - x_0)/h_x = (1.6 - 1.0)/0.5 = 1.2$$

Pour : $y = 0.2$ $\triangleright$ $P_2(s) = 0.640 + 0.350s + 0.114\, s(s-1)$ $\triangleright$ $P_2(1.2) = 1.08736 \approx 1.087$

Pour : $y = 0.3$ $\triangleright$ $P_2(s) = 1.003 + 0.521s + 0.1695\, s(s-1)$ $\triangleright$ $P_2(1.2) = 1.66888 \approx 1.669$

Pour : $y = 0.4$ $\triangleright$ $P_2(s) = 1.359 + 0.686s + 0.223\, s(s-1)$ $\triangleright$ $P_2(1.2) = 2.23572 \approx 2.236$

Pour : $y = 0.5$ $\triangleright$ $P_2(s) = 1.703 + 0.846s + 0.274\, s(s-1)$ $\triangleright$ $P_2(1.2) = 2.78396 \approx 2.784$

On obtient le dernier tableau en rassemblant ces 4 dernières valeurs pour interpoler le polynôme d'ordre 3 passant par $x = 1.6$.

$\Delta^0 y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.087			
	0.582		
1.669		**-0.015**	
	0.567		**-.0.004**
2.236		-0.019	
	0.548		
2.784			

$$P_3(s) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!} y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s(s-1) + \frac{\Delta^2 y_0}{3!} s(s-1)(s-2)$$
$$\text{Avec : } s = (y - y_0)/h_y = (0.33 - 0.2)/0.1 = 1.3$$

$$P_3(s) = 1.087 + 0.582s - 0.0075s(s-1) - 0.000\overline{6}s(s-1)(s-2) = 1.840857 \approx 1.841$$

$$f(x = 1.6, y = 0.33) \approx \underline{1.841}$$

<17 pts>

Nota : La vraie valeur $f(x = 1.6, y = 0.33) = 1.834995627$. Dans notre cas, la majorité de l'erreur d'interpolation vient de l'interpolation dans le sens des x où l'espacement $h_x = 0.5$ est trop important.

2.

Le polynôme de collocation comme la surface de collocation (qui utilise tous ces points) est unique. Interpoler d'abord dans le sens des y puis ensuite dans le sens des x ou l'inverse définissent seulement deux chemins différents sur cette surface de collocation qui mèneront à la même évaluation de $f(x = 1.6, y = 0.33)$. À une erreur numérique près, le résultat de l'interpolation sera donc identique.

<3 pts>

3.

La méthode de Lagrange permet de trouver le polynôme de collocation qui est, par définition, unique. Donc la méthode de Lagrange aurait permis de trouver, à une erreur numérique près, le même résultat d'interpolation que la méthode de Newton-Gregory.

La surface spline définit une surface qui est différente de celle de la surface de collocation donc le résultat de l'interpolation aurait été différent.

<3 pts>

Nota : La méthode de Lagrange aurait permis de trouver le même résultat d'interpolation mais l'erreur numérique donnée par cette méthode aurait été sans doute plus important car le nombre d'opérations est plus importante.

$\boxed{\mathbf{4.}}$

Soit l'erreur de Lagrange (qui est la même que celle de Newton Gregory) : $E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Lors de la première étape, lorsqu'on interpolait avec un polynôme de degré deux ($n = 2$) en $x = 1.6$ en utilisant les points $1 : 1.5 : 2$ on génère une erreur :

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= \frac{1}{(n+1)!}\Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\frac{\partial^{(n+1)} f(\xi)}{\partial x^{(n+1)}} = \frac{(1.6-1)(1.6-1.5)(1.6-2)}{6}\,\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x^3} \\ &= -4 \times 10^{-3}\ \sin(y)\ \exp(x) \quad \text{avec} \quad x \in [1\ \ 2] \quad y \in [0.2\ \ 0.5] \end{aligned}$$

$$|E_1(x, y)| = 4 \times 10^{-3}\ \sin(y)\ \exp(x) < 4 \times 10^{-3}\ \sin(0.5)\ \exp(2) \approx 0.01417$$

Dans l'autre sens, l'erreur sera forcement moins grande car l'espacement $h_y = 0.1$ est moins important et on trouve pour la deuxième étape lorsqu'on interpolait avec un polynôme de degré deux ($n = 3$) en $y = 0.33$ en utilisant les points $0.2 : 0.3 : 0.4 : 0.5$ on génère une erreur :

$$\begin{aligned} E_2(x, y) &= = \frac{(0.33-0.2)(0.33-0.3)(0.33-0.4)(0.33-0.5)}{24}\,\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial y^4} \\ &= 1.94 \times 10^{-6}\ \sin(y)\ \exp(x) \quad \text{avec} \quad x \in [1\ \ 2] \quad y \in [0.2\ \ 0.5] \end{aligned}$$

$$|E_2(x, y)| = 1.94 \times 10^{-6}\ \sin(y)\ \exp(x) < 1.94 \times 10^{-6}\ \sin(0.5)\ \exp(2) \approx 6.87 \times 10^{-6}$$

On prendra donc comme borne supérieure $|E_1(x, y)| < 0.01417$ ($< 0.5 \times 10^{-1}$) soit un cse après la virgule pour l'estimation faite à la question 1 en utilisant cette borne pessimiste.

<8 pts>

Nota : La vraie valeur $f(x = 1.6, y = 0.33) = 1.834995627$. Donc la vraie erreur d'interpolation est $E = 0.006004373$ qui est bien inférieur à 0.01417 (la borne n'est finalement pas si pessimiste que cela) et qui permet aussi de constater et d'affirmer qu'il existe bien un seul et unique cse (chiffre significatif exact) dans le résultat de l'interpolation estimé à la question 1.

II. Système d'Équations Non Linéaires (23 pts)

Soit le système d'équations non linéaire suivant :

$$\begin{cases} G_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ G_2(x, y) = y - \sin(x) + x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Tracer brièvement sur un petit graphique les deux courbes $G_1(x, y)$ et $G_2(x, y)$ avec les lieux approximés de leur intersection.
   <4 pts>
2. Montrer qu'il existe une racine $\mathbf{r} = (x \quad y)$ pour le système d' équations (1) dans l'intervalle J= $x \in [0.5\ ,\ 1.0]$ et $y \in [0.0\ ,\ -0.5]$.
   <4 pts>
3. Réarranger ce système pour le mettre sous la forme de deux points fixes à deux variables et surtout pour que cette méthode (du point fixe) soit assurer de converger (prouver le théoriquement) lorsque le premier élément de cette suite est $\mathbf{r}^{[0]} = (x^{[0]}\!=\!0.5 \quad y^{[0]}\!=\!0.0)$.
   <8 pts>
4. Calculer les 3 premières estimées $\mathbf{r}^{[0]}, \ldots, \mathbf{r}^{[3]}$ en partant de $\mathbf{r}^{[0]} = (x^{[0]} = 0.5 \quad y^{[0]} = 0.0)$ et en choisissant la méthode itérative assurant le plus vite la convergence.
   <7 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Pour $G_1(x, y)$, on reconnaît l'équation du cercle de centre O (0.0), l'origine du repère et de rayon $R = 1$. Pour $G_2(x, y)$, la courbe tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$. La courbe passe par le point $O(x = 0, y = 0)$ et en ce point a une tangente horizontale (puisque $y(x) = \sin(x) - x$, on a $y'(x) = \cos(x) - 1$ c-a-d $y'(x = 0) = 0$.

<4 pts>

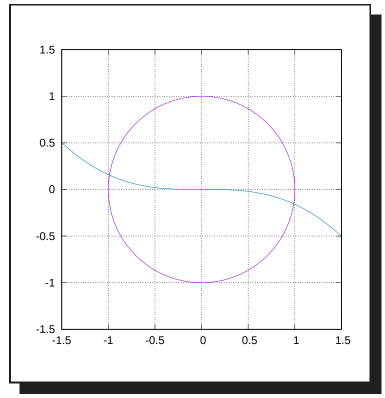


Figure 1 – G_1 et G_2

$\boxed{\textbf{2.}}$

Pour G_2, quand $x = 0.5$, $y = -0.02$ et on se trouve à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $R = 1$ (car $\sqrt{0.5^2 + (-0.02)^2} < 1.0$). Quand $x = 1.0$, $y = -0.15$ et on se trouve à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon $R = 1$ (car $\sqrt{1.0^2 + (-0.15)^2} > 1.0$). Soit J l'intervalle $x \in [0.5\ ,\ 1.0]$ et $y \in [0.0\ ,\ -0.5]$. On a donc des points de la courbe (appartenant à J), à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité. Puisque la courbe est continue, l'intervalle J contient donc une solution (x, y) de ce système.

<4 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

Premièrement on remarque que $(x^{[0]} = 0.5 \quad y^{[0]} = 0.0) \in J$ (avec $J = x \in [0.5\ ,\ 1.0]$ et $y \in [0.0\ ,\ -0.5]$. Il nous reste plus qu'a prouver que si on réarrange le système de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -\sqrt{1-y^2} \\ y & = & \sin(x) - x \end{array}\right.$$

Alors la condition de convergence est remplie, *i.e.* :

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial x}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial G_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial y}\right| < 1$$

Si on calcule les dérivés, cette condition, à respecter, devient :

$$\left|\cos(x) - 1\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right| < 1$$

qui est bien remplie sur $J = x \in [0.5\ ,\ 1.0]$ et $y \in [0.0\ ,\ -0.5]$ donc la convergence de ce point fixe à deux variables est assurée !

<8 pts>

$\boxed{\textbf{4.}}$

Pour assurer la convergence la plus rapide, on utilisera l'astuce de Gauss-Seidel qui consiste à utiliser l'information obtenue itérativement la plus récente. Donc, on écrit le système de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lll} x^{[n+1]} & = & -\sqrt{1-(y^2)^{[n+1]}} \\ y^{[n+1]} & = & \sin(x^{[n+1]}) - x^{[n+1]} \end{array}\right.$$

	$\mathbf{r}^{[0]}$	$\mathbf{r}^{[1]}$	$\mathbf{r}^{[2]}$	$\mathbf{r}^{[3]}$
x	0.5	1.0	0.987354	0.988259
y	0.0	-0.158529	-0.152783	-0.153189

<7 pts>

III. Factorisation LU (19 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode de la factorisation directe. **<8 pts>**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix}$$

2. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode du pivot de Gauss. **<8 pts>**
3. Calculer le déterminant de A en utilisant l'une de ces deux formes de décomposition. **<3 pts>**

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par factorisation directe, on trouve *directement* :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

<8 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par factorisation LU par pivot de Gauss, on trouve, en faisant d'abord $R_2 = R_2 - R_1$ et $R_3 = R_3 - R_1$ dans un premier temps puis $R_3 = R_3 - R_2$ dans un deuxième temps :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

En se servant des valeurs $R_2 = R_2 - \boxed{1}\,R_1$, et $R_3 = R_3 - \boxed{1}\,R_1$ sur la première colonne de la matrice L et de la valeur $R_3 = R_3 - \boxed{1}\,R_2$ sur la deuxième colonne de la matrice L, on obtient donc :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{U}.$$

<8 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

Produit des éléments diagonaux : le déterminant est donc det(A)=α^3

<3 pts>

IV. Moindres Carrés (31 pts)

Certaines données se distribuent selon une loi du type :

$$y(x) = \frac{1}{b + a\ \exp(-x)} \tag{2}$$

La grandeur y étant entachée d'une erreur expérimentale, on cherchera dans ce problème, à estimer, pour une série de N données expérimentales ($y_i = y(x_i)$), les paramètres a et b de cette loi par la méthode des moindres carrées.

1. (a) Donner l'expression $R(a, b)$ appelée résidu ou écart quadratique (fonction des coefficients a et b et des N données expérimentales x_i, $y_i = y(x_i)$) qui serait minimisée par cette méthode des moindres carrés.
<**3 pts**>

   (b) Par dérivation du résidu par rapport aux paramètres a et b à estimer, donner le système d'équations non linéaires permettant de trouver les coefficients a et b, au sens des moindres carrés, de cette loi (exprimée par l'Eq. (2)).
<**9 pts**>

   (c) Sans résoudre ce système d'équations, dire quel(s) type(s) de méthode(s) numérique permettrait peut-être de le résoudre.
<**3 pts**>

---

2. (a) Trouver le changement de variable permettant de linéariser le problème pour pouvoir arriver à deux équations normales linéaires.
<**5 pts**>

   (b) En utilisant les données expérimentales données par le tableau ci dessous, estimer maintenant a et b au sens des moindres carrées.

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0
$y_i = y(x_i)$	0.30	0.40	0.45	0.50

<**11 pts**>

Réponse

1(a)

Le résidu que l'on cherche à minimiser par la technique de lissage des moindres carrés est

<**3 pts**>

$$R(a, b) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big)^2$$

1(b)

Trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés, c'est trouver a et b pour que $R(a, b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre b donne :

$$\frac{\partial R(a, b)}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big) \frac{\partial \big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \big)}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big) \Big(\frac{1}{(b + a\ \exp(-x_i))^2} \Big)$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$ est donc :

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big) = 0$$

La dérivation par rapport au paramètre a donne :

$$\frac{\partial R(a, b)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big) \frac{\partial \big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \big)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{1}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big) \Big(\frac{-\exp(-x_i)}{(b + a\ \exp(-x_i))^2} \Big)$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ est donc :

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(-y_i\ \exp(-x_i) + \frac{\exp(-x_i)}{b + a\ \exp(-x_i)} \Big) = 0$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \frac{1}{b+a\,\exp(-x_i)} \right) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \left(-y_i\,\exp(-x_i) + \frac{\exp(-x_i)}{b+a\,\exp(-x_i)} \right) & = & 0 \end{array} \right.$$

<9 pts>

1(c)

On a un système de deux équations non linéaires à résoudre, on pourrait utiliser la méthode de Newton (-Raphson) ou la méthode des points fixes pour le résoudre si le critère de convergence est respecté.

<3 pts>

2(a)

Faisons le changement de variables ($Y = 1/y$ et $X = \exp(-x)$)

$$\begin{aligned} y\,(x) &= \frac{1}{b + a\,\exp(-x)} \\ \frac{1}{y} &= b + a\,\underbrace{\exp(-x)}_{X} \\ Y &= b + a\,X \end{aligned}$$

qui nous conduit à la distribution linéaire des données $Y(X_i)$ avec les paramètres (a, b).

<5 pts>

2(b)

Au sens des moindres carrés, les paramètres (a, b) sont donc solutions des équations normales ou du système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i\,Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{pmatrix}$$

avec le nouveau tableau de données :

X_i	0.368	0.135	0.050	0.018
Y_i	3.333	2.500	2.222	2.000

En utilisant les informations données dans ce tableau, on en déduit

$$\begin{pmatrix} 0.1565 & 0.5710 \\ 0.5710 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7111 \\ 10.055 \end{pmatrix}$$

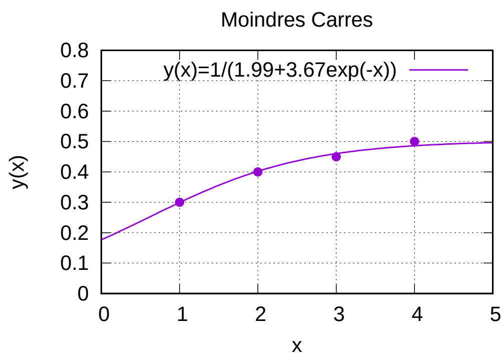
puis par une opération élémentaire ($R_2 = R_2 - \frac{0.5710}{0.1565} R_1 \;\triangleright\; R_2 = R_2 - 3.6486 R_1$)

$$\begin{pmatrix} 0.1565 & 0.5710 \\ 0 & 1.9166 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7111 \\ 3.8118 \end{pmatrix}$$

et enfin, par substitution arrière, on trouve $b \approx 1.99$ et $a \approx 3.67$ pour finalement une loi de la forme :

$$y\,(x) = \frac{1}{1.99 + 3.67\,\exp(-x)}$$

<11 pts>



Nota : On trouve par cette regression respectivement :

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0
$y_i = y(x_i)$	0.30000	0.40000	0.45000	0.50000
$y_{regression}$	0.29939	0.40214	0.46025	0.48609

On voit que les données étaient très peu bruitée et/ou que le modèle de regression était très bon. La majorité des erreurs se trouve pour les valeurs de x et y élevé. Cela s'explique par le fait que nous avons utilisé un changement de variable qui a tendance à moins les prendre en compte : $Y = 1/y$ et $X = \exp(-x)$.

V. Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \cos(y(t)) - t \qquad (3)$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$, $y_2 = y(0.4)$ et $y_3 = y(0.6)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
   <5 pts>
2. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (arrondissez et garder au moins quatre décimales).
   <5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par la méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 0$

<2 pts>
$$y_{n+1} = y_n + h\left(\cos(y_n) - t_n\right)$$

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	0.000
1	0.2	0.200
2	0.4	0.356
3	0.6	0.463

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes :

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\,\underbrace{\big(\cos(y_n) - t_n\big)}_{f(t_n,y_n)} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\big) \\ &= y_n + \frac{h}{2}\big(\cos(y_n) - t_n + \cos(\tilde{y}_{n+1}) - t_{n+1}\big) \end{aligned}$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci-dessous :

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	0.000	0.000
1	0.2	0.200	0.178
2	0.4	0.335	0.311

<4 pts>