DIRO
IFT 2425

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *20/02/2020*

I	Amplification d'erreur (28 pts)
II	Erreur en arithmétique flottante (36 pts)
III	Recherche des racines d'une équation (54 pts)
Total	118 points.

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Amplification d'erreur (28 pts)

Lorsqu'un moteur de recherche, par exemple, retourne 30 pages Web dont seulement 20 sont pertinentes (les vrais positifs) et 10 ne le sont pas (les faux positifs), mais qu'il omet 40 autres pages pertinentes (les faux négatifs), sa précision P est de $P = 20/30 = 2/3$ et son rappel R vaut $R = 20/(20+40) = 1/3$. La précision $P \in [0, 1]$ peut ainsi être comprise comme une mesure de l'exactitude ou de la qualité, tandis que le rappel $R \in [0, 1]$ est une mesure de l'exhaustivité ou de la quantité.

Une mesure qui combine la précision et le rappel est nommée F-mesure ou F-score et est très utilisée dans les domaines de la recherche d'informations mais aussi de la reconnaissance de formes et de la classification automatique :

$$F = \frac{2\,PR}{P+R}$$

1. En utilisant la méthode de propagation d'erreur (basé sur l'approximation de Taylor de la fonction $F(P, R)$ au premier ordre), donner l'approximation de F et l'incertitude commise sur F (*i.e.*, exprimer $F = F^\star \pm \Delta F$) dans le cas où $P = 0.75$ et $R = 0.75$ sont deux valeurs imprécises définies avec 2% d'erreur relative. Servez-vous ensuite de ce calcul d'erreur pour souligner les chiffres significatifs "exacts" (cse) de l' approximation de F (après avoir arrondi cette approximation au nombre de cse adéquat) et préciser finalement l'incertitude de F en terme d'erreur relative.
   <11 pts>
2. Exprimer $\epsilon_r(F) = \Delta F/|F|$, l'erreur relative sur F en fonction de l'erreur relative faite sur R ($\Delta R/|R|$) et l'erreur relative faite sur P ($\Delta P/|P|$).
   <6 pts>
3. Utiliser maintenant la méthode de la fourchette pour donner l'approximation de F et l'incertitude commise sur F. Comme dans l'exercice précédent, utiliser ce calcul pour exprimer F sous la forme $F^\star \pm \Delta F$ avec l'arrondissement adéquat et en soulignant le nombre adéquat de cse.
   <11 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1}}$

On a donc $\Delta P = \Delta R = 0.015$

La valeur de F approximée ($F^\star$) est la valeur de F en P et R approximée, *i.e.*, $F^\star = (2 \times 0.75 \times 0.75)/(0.75 + 0.75) = 0.75$ et pour calculer l'incertitude de $F(P, R$, fonction de ses deux variables incertaines, on doit maintenant calculer la différentielle de $F(P, R)$:

$$\Delta F(P, R) = \left|\frac{2P^2}{(P+R)^2}\right| \cdot \Delta R + \left|\frac{2R^2}{(P+R)^2}\right| \cdot \Delta P$$

Numériquement, on obtient :

$$\Delta F(P, R) = \left|\frac{20.75^2}{(0.75+0.75)^2}\right| \cdot 0.015 + \left|\frac{20.75^2}{(0.75+0.75)^2}\right| \cdot 0.015 = 0.015 < 0.5 \times 10^{-1}$$

Le rang du dernier cse est le rang 0 (celui des unités), donc une façon bien rigoureuse d'écrire cette variable incertaine F en arrondissant correctement au nombre de cse adéquat est d'écrire finalement :

$$F = \underline{0.7}5 \pm 0.015$$

Et le résultat est exprimé avec aussi 2% d'erreur relative.

<11 pts>

Nota : On a ici une formule mathématique qui ni atténue, ni amplifie les erreurs numériques.

$\boxed{2}$

En utilisant la différentielle de $F(P,R)$ et en divisant par $F = \frac{2\,P\,R}{P+R}$, on trouve facilement :

$$\frac{\Delta F}{F} = \left|\frac{P}{P+R}\right| \frac{\Delta R}{|R|} + \left|\frac{R}{P+R}\right| \frac{\Delta P}{|P|} = \left|\frac{P}{P+R}\right| \mathcal{E}_R + \left|\frac{R}{P+R}\right| \mathcal{E}_P$$

<6 pts>

Nota : Dans notre cas ; $\frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{2}\frac{\Delta R}{|R|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{|P|} = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_R + \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_P$

$\boxed{3}$

L'énoncé nous permet d'écrire que F et P varient dans le même intervalle de confiance suivant : $\in [P_{\min} = R_{\min} = 0.735 \quad P_{\max} = R_{\max} 0.765]$. On remarque aussi que chacun des termes du numérateur ou du dénominateur de f est une fonction continue et surtout monotone sur son intervalle de confiance. Il ne reste plus qu'à définir sans ambiguïté l'intervalle de confiance dans lequel se balade la vraie valeur de F, *i.e.,* $[F_{\min}\,,\,F_{\max}]$.

Supposons que R est une constante et étudions le comportement de $F(P)$. La fonction $F(P)$ a pour dérivée $F'(P) = 2\,R^2/(P+R)^2 > 0$ (toujours) donc $F(P)$ sera croissante pour des valeurs de P croissante et inversement. Comme la fonction est symétrique, $F(R)$ sera aussi croissante pour des valeurs de R croissante et inversement et on trouve donc :

$$\begin{aligned}
F(P,R) &\in [F_{\min} = 2P_{\min}R_{\min}/(P_{\min}+R_{\min}) \quad F_{\max} = 2P_{\max}R_{\max}/(P_{\max}+R_{\max})] \\
&= [2\times 0.735^2/2\times 0.735] \quad 2\times 0.765^2/2\times 0.765] \\
&= [0.735 \quad 0.765] \\
\text{et donc} \quad & F = 0.75 \pm 0.015 \quad (< 0.5\times 10^{-1}) = \underline{0.7}5 \pm 0.015
\end{aligned}$$

<11 pts>

Nota : On remarquera que dans les deux cas, on obtient strictement la même chose et pourtant la méthode de Taylor est une méthode approximée (on utilise le premier ordre de la série de Taylor).

II. Erreur/Amplification d'Erreur en Arithmétique Flottant (36 pts)

1. Souvenez-vous du problème de la défaillance du missile US patriote présenté en cours (à la fin du chapitre sur la propagation des erreurs numériques) et du problème créé par le fait que l'horloge interne de ce missile était incrémentée 10 fois par seconde (par pas et incrément de 0.1 seconde).
   En classe, un étudiant avait proposé de faire une horloge interne utilisant plutôt 1000 coups par seconde et incrémentant donc 1000 fois (par seconde) une variable (stockée dans un float) d'un millième de seconde (*i.e.* 0.001).
   Le site HTTPS ://WWW.BINARYCONVERT.COM nous indique que 0.001 se représente en flottant *IEEE-754 single precision 32-bit*, avec une représentation égale à :

   $$1.00000004749745130538940429688 \times 10^{-3}$$

   Dans cette hypothèse, à combien se serait élevé l'erreur de l'horloge interne du missile patriote ?
   <5 pts>

2. Expliquer pourquoi le calcul numérique de ces quatre expressions :

   (a) $\frac{e^x}{e^x+3^x}$

   (b) $\frac{x\,\ln(1+x)}{\sin(x)} \quad (x > -1)$

   (c) $\left(1+x^2\right)^{1/x^2} \quad (x \neq 0)$

   (d) $\frac{1}{1-\sin(x)} - \frac{1}{1+\sin(x)} \quad (x \neq \frac{\pi}{2})$

peuvent conduire à des problèmes d'erreurs numériques (identifier aussi pour quelle(s) valeur(s) de x). Identifier et citer (tous) le(s) problème(s) numérique(s) associé(s) et proposer une expression mathématiquement équivalente (ou dans le pire des cas, lorsqu'on ne peut absolument pas, une expression approximativement équivalente) qui permettrait d'éviter ces problèmes numériques et/ou augmenter la précision des calculs de ces quatre expressions.
<24 pts>

3. Essayons de quantifier dans cette question, l'erreur de troncature ou d'approximation d'une fonction non polynomiale par un ordinateur ou calculateur.
Soit une variable imprécise $x = 0 \pm 0.05$. Utiliser le reste ou résidu de la formule de Taylor (vue en cours dans le premier chapitre) pour donner une borne supérieure de l'erreur que l'on commet en utilisant seulement 4 termes de la série de Taylor (en plus de la constante) de la fonction exponentielle pour calculer numériquement e^x.
<7 pts>

Réponse

$\boxed{1}$

L'erreur de représentation de 0.001 en flottant *IEEE-754 single précision 32-bit* est donc de $4.749745... \times 10^{-11}$ créant ainsi une erreur totale dans ce cas de $... = 4.749745... \times 10^{-11} \times 100 \times 60 \times 1000$ (1000 fois cette variable incrémentée par seconde pour 100×60 secondes ou 100 heures). On trouve donc $... \approx 0.017$ seconde soit une erreur 20 fois moins importante que celle rencontrée par le missile US patriote en février 1991.

<5 pts>

Nota : Néanmoins, durant cette différence de 0.017 seconde pour un missile patriote dont la vitesse est de Mach 4.1 soit 4.1 fois la vitesse du son (qui est de 343 mètre/seconde) *i.e.*, en tout 1406 mètre/seconde, le missile parcourt la distance de 23.9 mètres ! donc encore assez pour rater sa cible.
Si on ne se souvenait pas du nombre de secondes pendant lequel le missile patriote est resté en *stand-by*, on pouvait simplement dire que l'erreur était de $\approx 4.749745 \times 10^{-8}$ par seconde accumulée.

$\boxed{2}$

[-a-] Pour la première expression, on aura possiblement un problème d'OVERFLOW lorsque $x \to \infty$ et un problème d'UNDERFLOW lorsque $x \to -\infty$. Pour minimiser ces types de problème numérique, il vaut mieux réécrire cette expression (avec une expression analytiquement équivalente) en la simplifiant de la façon suivante :

$$\frac{e^x}{e^x + 3^x} = \frac{1}{1 + \frac{3^x}{e^x}} = \frac{1}{1 + e^{(x \ln(3) - x)}}$$

<6 pts>

Nota : Avec mon ordinateur *Intel Core i7-4930K CPU @ 3.40GHz* (programmation C sous Linux en float), à partir de $x = 80$, la première expression donne faussement 0 et à partir de $x = 89$, elle donne $-NaN$ alors que l'expression simplifiée donne 0.000154 qui est la valeur presque exacte.

[-b-] Pour la deuxième expression, lorsque $x \to 0$, on se retrouve avec une forme indéterminée du type $0/0$ pouvant potentiellement engendrer en notation flottante un INF ou NaN et pour $x = n\pi$ ou n est est un entier naturel, cela génère une division par zro. La seule solution est de proposer une expression approximativement équivalente en utilisant la formule de Taylor.

$$\frac{x\ \ln(1+x)}{\sin(x)} \approx \frac{x - \frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{6}} \quad \Big(\text{ou} \approx x\Big)$$

<6 pts>

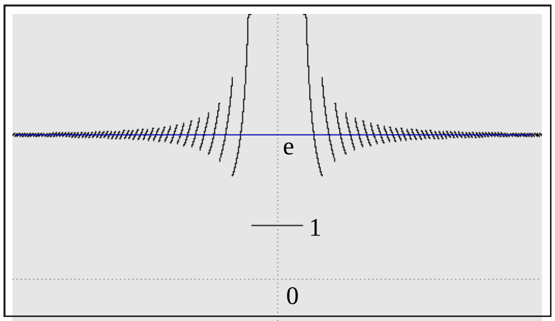
Nota : Avec mon ordinateur *Intel Core i7-4930K CPU @ 3.40GHz* (programmation C sous Linux en float), à partir de $x = 10E-9$, la première expression donne faussement 0 alors que la valeur approximée est proche $10E-9$.

[-c-] Pour la troisième expression, on aura une opération approximée (calcul de puissance grâce à la formule de Taylor ou autre) pour deux variables approximées qui sera exacerbée quand $x \to 0$ avec une expression du type 1^{∞} (ou addition de deux nombres de grandeur différent). La seule solution est de proposer une expression approximativement équivalente en utilisant la formule de Taylor.

$$\left(1+x^2\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right) \approx \exp\left(\frac{x^2-\frac{x^4}{2}}{x^2}\right) = \exp\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

<6 pts>

Nota -1- : Avec mon ordinateur *Intel Core i7-4930K CPU @ 3.40GHz* (programmation C sous Linux en float), à $x = 10E-3$, on obtient à peu près la même valeur, soit 2.718145..., à $x = 10E-4$, on obtient pour les deux expressions $[2.5952\,,\,2.7182]$ puis à $x = 10E-5$, on obtient $[1.0000\,,\,2.7182]$ et la première expression est totalement fausse alors que la deuxième tient le coup au-delà de $x = 10E-300$. En noir j'ai tracé cette fonction numérique (qui est un véritable monstre numérique) dans un intervalle très proche de 0 ($[-0.005 \quad 0.005]$) et en bleue la fonction sans erreur numérique.



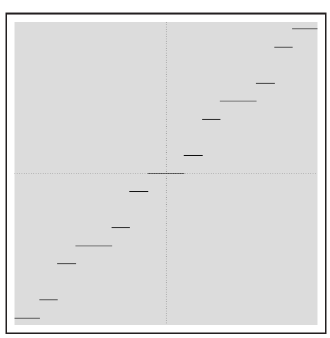
Nota -2- : Pour $x \to \infty$, on aura aussi une expression indéterminée du type ∞^0 mais on ne peut rien faire dans ce cas de figure. Pour $x \to \infty$, l'expression $\exp[\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)]$ semble numériquement équivalente à $\left(1+x^2\right)^{1/x^2}$.

[-d-] Pour la quatrième expression, pour $x \to 0$, se pose le problème d'annulation de cse (chiffres significatifs exacts) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux. Pour minimiser ce type de problème numérique, il vaut mieux réécrire cette expression (avec une expression analytiquement équivalente) en la réduisant au même dénominateur de la façon suivante :

$$\frac{1}{1-\sin(x)} - \frac{1}{1+\sin(x)} = \frac{1+\sin(x)-1+\sin(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)} \quad \left(=\frac{2\tan(x)}{\cos(x)}\right) \; \left(=\frac{2\sin(x)}{1-\sin^2(x)}\right)$$

<6 pts>

Nota : Avec mon ordinateur *Intel Core i7-4930K CPU @ 3.40GHz* (programmation C sous Linux en float) à partir de $x = 10E-19$, la première expression donne faussement 0 alors que la deuxième expression est proche de la valeur réelle $2 \times 10E-19$ (laquelle est aussi proche de de $[1/(1-x)]-[1/(1+x)] = (2x)/(1-x)$ en $x = 10E-19$ en considérant le développement limité de $\sin(x) \approx x$ au voisinage de 0). J'ai tracé ce monstre numérique dans un intervalle très proche de 0.



$\boxed{3}$

Le calculateur va donc approximer la variable imprécise $x = 0 \pm 0.05$ avec la fonction de Taylor au voisinage de la valeur imprécise, *i.e.*, $x = 0$ en utilisant seulement 4 termes de la série de Taylor de la fonction exponentielle. Le reste ou résidu de cette série est :

$$R(x,a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in [a,x]$$

avec n, le nombre de termes de la série de Taylor, a, le point où le développement limité est fait (ici en la valeur approximée 0), et x, le point où on essaie d'évaluer l'erreur. Dans notre cas ; puisqu'on cherche une borne supérieure, dans le pire des cas, *i.e.*, en $x = \xi = 0.05$ et on trouve :

$$\begin{aligned} R(x=0, a=0.05) &= \frac{(0.05-0)^5}{5!} \exp(\xi) \quad \xi \in [x=0\,,\, a=0.05] \\ &< \frac{0.05^5}{5!} \exp(0.05) \quad \approx 2.737 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

<7 pts>

Nota : On peut vérifier si cette borne est bien une borne supérieure de l'erreur commise en approximant e^x avec 4 termes de la formule de Taylor et avec x une variable imprécise dans le pire des cas. Le développement limité de e^x avec quatre termes est $e^x = 1 + x + (x^2/2) + (x^3/6) + (x^4/24))$ qui nous donne pour le pire des cas $x = 0.05$, $[e^{x=0.05}]_{4 \text{ termes}} = 1.0512710937$ et le calcul de $e^{0.05}$ avec ma calculatrice (qui utilise certainement plus que 4 termes est $[e^{x=0.05}]_{\text{ma calculatrice}} = 1.051271096$ soit une différence de $\epsilon \approx 2.25 \times 10^{-9}$ et on vérifie bien que $2.25 \times 10^{-9} < R(x=0, a=0.5) \approx 2.737 \times 10^{-9}$. L'erreur est très faible même avec seulement quatre termes de la série de Taylor.

III. Méthode du la Point Fixe/Bissection/Interpolation/Newton (54 pts)

On se propose de trouver numériquement dans R une valeur approchée de la racine de la fonction

$$f(x) = x - \frac{1}{2}(\cos x)^2 \tag{1}$$

1. Méthode du Point Fixe/Bissection
   (a) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette Eq. (1) dans l'intervalle $J = [0.0\ ,\ 0.5]$ et donner une forme $x = g_1(x)$, mathématiquement équivalente de $f(x) = 0$ (Eq. (1)), pour laquelle la suite itérative $r_{n+1} = g_1(r_n)$ converge lorsque, le premier élément de cette suite est $r_0 = 0.25$.
   <8 pts>
   (b) Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer les 6 premières estimées $r_1, \ldots, r_6$ en partant de $r_0 = 0.25$.
   <6 pts>
   (c) Obtenez une valeur approchée de la racine de $f(x)$ comprise dans J en utilisant l'expansion en série de Taylor jusqu'au terme en x^2 (en supposant cette racine proche de 0). Utiliser ensuite cette valeur pour r_0 et calculer les 3 premières estimées $r_1, \ldots, r_3$ de la suite itérative $r_{n+1} = g_1(r_n)$ de la question 1.(a)
   <6 pts>
   (d) Pour obtenir à l'avance le nombre d'itérations nécessaires de la méthode du point fixe pour arriver à la racine souhaitée avec la précision voulue, on peut essayer de trouver (en utilisant le théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne) une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine. Trouver cette majoration et en déduire le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-4} près de cette racine.
   <5 pts>

(e) Utiliser le résultat de la question précédente pour savoir (sans faire aucun calcul) si la méthode itérative du point fixe donnée par la suite $r_{n+1} = g_1(r_n)$ converge plus vite ou non que la méthode de la bissection.
<**4 pts**>

2. Méthode de l'interpolation linéaire

(a) En partant de l'intervalle $J = [0.0\ ,\ 0.5]$, calculer les 2 premières estimées r_1, r_2 de la méthode de l'interpolation linéaire.
<**5 pts**>

3. Méthode de Newton

(a) Donner la relation $r_{n+1} = g_{\text{newt.}}(r_n)$ intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution itérative de la racine r de l'équation $f(x) = 0$.
<**5 pts**>

(b) Montrer qu'avec $r_0 = 0.25$, la relation itérative de Newton converge.
<**5 pts**>

(c) Calculer les 3 premières estimées $r_1, \ldots, r_3$ en partant de $r_0 = 0.25$.
<**5 pts**>

(d) Si on utilisait la valeur approchée de la question 1.(c) comme départ (*i.e.*, r_0) de la relation itérative de Newton, quelle serait alors ces 2 premières estimées r_1, r_2.
<**5 pts**>

Réponse

1.(a)

L'étude des variations de la fonction f sur $J = [0.0, 0.5]$ montre que la fonction est continue et croissante sur J, donc monotone car $f'(x) = 1 + (0.5 \times 2 \times \cos(x)\sin(x)) = 1 + (0.5\sin(2x)) > 0$ sur $J = [0.0, 0.5]$ (puisque $\sin(2x)$ est positive pour $0 < x < \pi/4 \approx 0.785$.
De plus, on a $f(0) = -0.5$ et $f(0.5) \approx 0.11$ donc $f(0)f(1) < 0$ et, puisque la fonction f est continue et croissante sur J, il existe donc une racine r unique dans cet intervalle.
<**4 pts**>

De plus $f(x) = 0$ est équivalent à l'équation $x = (1/2)\cos^2(x) = g_1(x)$ avec (puisque $\sin(2x)$ est croissante pour tout $0 < x < \pi/4 \approx 0.785$ et $0.5\sin(2 \times 0.5) \approx 0.4207$) :

$$|g'(x)| = |-(\cos(x))\,\sin(x)|| - (1/2)\sin(2x)| < 1 \quad \forall\, x \in J = [0.0, 0.5]$$

La fonction $g(x)$ est donc contractante sur J et la convergence est assurée puisque le premier élément $r_0 = 0.25$ de la suite $r_{n+1} = g_1(r_n)$ est aussi dans J.
<**4 pts**>

1.(b)

En partant de $r_0 = 0.25$, on a, $r_n = g_1(r_{n-1})$ et ;

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.4693956405 \\
r_2 &= 0.3976909262 \\
r_3 &= 0.4250030311 \\
r_4 &= 0.4149946479 \\
r_5 &= 0.4187209148 \\
r_6 &= 0.4173413909
\end{aligned}$$

qui va converger vers la valeur $r = 0.4177147927$ (dès la 14-ième itération).

<6 pts>

1.(c)

$$\begin{aligned} x - 0.5\,(1-(x^2/2)+o(x^4))^2 &= 0 \\ x - 0.5\,(1-x^2+o(x^4)) &= 0 \\ 0.5\,x^2 + x - 0.5 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

En prenant la valeur positive $x = -1+\sqrt{2} \approx 0.4142136$ qui est dans J et en itérant trois fois $r_n = g_1(r_{n-1})$, on obtient :

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.4190088997 \\ r_2 &= 0.4172343864 \\ r_3 &= 0.4178928462 \end{aligned}$$

qui va aussi converger vers la valeur $r = 0.4177147927$,

<6 pts>

1.(d)

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g(r) = r$ et $r_n = g_1(r_{n-1})$ avec r_n la valeur approchée de la racine à la nième itération ;

$$\begin{aligned} r_n - r &= \frac{g_1(r_{n-1}) - g_1(r)}{(r_{n-1}-r)} \times (r_{n-1}-r) \\ &= g_1'(\zeta) \times (r_{n-1}-r) \qquad \text{avec} \quad \zeta \in J \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|g_1'(\xi)| < |0.5\,\sin 1| \approx 0.4207$, on obtient les inégalités suivantes ;

$$|r_n - r| \leq\; 0.4207\,|r_{n-1}-r| \;\leq\; 0.4207^2\,|r_{n-2}-r| \;\leq \ldots \leq\; 0.4207^n\,\underbrace{(r_0-r)}_{<0.5}$$

On obtiendra donc $|r_n - r| < 10^{-4}$ dès que $0.5 \times (0.4207)^n < 10^{-4}$, *i.e.*, dès que $n \geq 10$, *i.e.*, dès que $n = 11$.

<5 pts>

Nota : Dans notre cas, expérimentalement, en partant de $r_0 = 0.25$, $r_{10} = 0.4177077361$ avec une racine qui converge vers 0.4177147927, soit une erreur de $\approx 7.05 \times 10^{-6}$ indiquant que l'on est arrivé en r_{10} avec 4 cse après la virgule. La borne supérieure calculée dans cette question est donc tout à fait correcte, exploitable et intéressante.

1.(e)

De la question précédente, on retient la relation $|r_{n+1} - r| \leq\; 0.4207\,|r_n - r|$ ce qui nous permet d'écrire en fait la relation $e_{n+1} \leq 0.4207 \cdot e_n$ ce qui nous indique que la convergence du point fixe donnée par la suite $r_{n+1} = g_1(r_n)$ est linéaire (ou d'ordre 1, comme la méthode de la bissection) mais de constante asymptotique au plus égale à 0.4207 donc inférieur à la constante asymptotique de la méthode de la bissection qui est égale à 0.5 donc la méthode de ce point fixe convergera plus vite.

<4 pts>

Nota : On ne vous le demandait pas de le calculer mais la méthode de la bissection aurait mis 13 itérations (versus $n = 11$ pour notre point fixe donc 2 itérations de plus) pour converger avec la précision (10^{-4}) voulue.

2.(a)

En partant de $J = [x_1 = 0; x_2 = 0.5]$, la méthode de l'interpolation linéaire approxime (ou interpole linéairement) $f(x)$ au voisinage de la racine par une droite qui passe par les points $(x_1, f(x_1)$ et $(x_2, f(x_2)$ et permet d'obtenir l'intersection de celle-ci avec l'axe des abscisses en $x_3 = x_2 - f(x_2)(x_2 - x_1)/(f(x_2) - f(x_1))$. On obtient donc la succession des intervalles et la succession des solutions x_3 suivants :

$$[0.406554 \;\; 0.5] \;\; \rightarrow x_3 = r_1 = 0.406554$$
$$[0.417542 \;\; 0.5] \;\; \rightarrow x_3 = r_2 = 0.417542$$

qui semble converger assez vite avec pour ce cas, la borne gauche de l'intervalle bloquée sur la racine.
<5 pts>

Nota -1- : La convergence est assez rapide car la fonction $f(x)$ reste très linéaire au voisinage de la racine comme la montrée la question 1.(c).

Nota -2- : La convergence n'était pas demandée pour cette question mais comme la convergence pour le point fixe est assuré pour l'intervalle [0 0.5], cela aussi démontre (puisqu'il y aune unique racine dans cette intervalle) que la convergence est aussi assurée par cette méthode d'interpolation linéaire.

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$

La fonction $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la méthode itérative de Newton permet d'écrire :

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = r_n - \frac{r_n - 0.5\,(\cos r_n)^2}{1 + 0.5\sin(2\,r_n)} \qquad \left(= r_n - \frac{r_n - 0.5\,(\cos r_n)^2}{1 + \sin(r_n)\,\cos(r_n)}\right)$$

<5 pts>

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$

Dans ce cas, le plus simple est de montrer que la fonction $f(x)$, sur l'intervalle $J = [0, 0.5]$, intervalle dans lequel on prendra $r_0 = 0.25$ et dans lequel une racine unique s'y trouve (cf. question 1.(a)) ne présente pas d'*extrema*, *i.e.*, de valeurs pour laquelle, $f'(x)$ s'annule.

Dans notre cas, $f'(x) = 1 + 0.5\sin(2\,x) > 0$, toujours positive sur J donc aucun problème comme on l'avait déjà démontré à la question 1.(a).
<5 pts>

$\boxed{\textbf{3.(c)}}$

En partant de $r_0 = 0.25$, on a, $r_n = g_{\text{newt.}}(r_{n-1})$ et :

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.4269729617 \\ r_2 &= 0.4177353863 \\ r_3 &= 0.4177147928 \end{aligned}$$

qui converge assez vite vers la valeur $r = 0.4177147927$ optimale en 4 itérations seulement !
<5 pts>

Nota : La convergence est très rapide car quadratique (racine simple). On voit l'effet de cette convergence quadratique sur la solution ; en effet, à la première itération, on a 1 cse, à la deuxième on a 4 cse soit 3 cse de gagnés et à la troisième itération, on en gagne le double de 3 (comme il se doit pour toute convergence quadratique), *i.e.*, 6 qui s'ajoute ainsi au $1 + 4$ cse déjà existant pour finalement en faire 10 cse au total.

$\boxed{\textbf{3.(d)}}$

En partant de $r_0 = 0. - a + \sqrt{2}$, on a, $r_n = g_{\text{newt.}}(r_{n-1})$ et :

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.417717813 \\ r_2 &= 0.4177147927 \end{aligned}$$

qui converge assez vite vers la valeur optimale en 2 itérations seulement, avec toute la précision 10^{-10} donnée par ma calculatrice *CASIO fx-7400G PLUS* !
<5 pts>