DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http: //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail: mignotte@iro.umontreal.ca

date: *21/04/2022*

I	Factorisation *LU* (17 pts)
II	Moindres Carrés (35 pts)
III	Intégration Numérique (37 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)
V	Résolution de Système d'Équations Différentielles (10 pts)
Total	109 points

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Factorisation LU (17 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode de la factorisation directe. **<7 pts>**

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & ab \\ a & ab+a & 2ab \\ a & ab+a & 2ab+a \end{pmatrix}$$

2. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode du pivot de Gauss. **<7 pts>**

3. Calculer le déterminant de A en utilisant l'une de ces deux formes de décomposition. **<3 pts>**

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par factorisation directe, on trouve *directement*:

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & ab \\ a & ab+a & 2ab \\ a & ab+a & 2ab+a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

<7 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par factorisation LU par pivot de Gauss, on trouve, en faisant d'abord $R_2 = R_2 - R_1$ et $R_3 = R_3 - R_1$ dans un premier temps puis $R_3 = R_3 - R_2$ dans un deuxième temps:

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & ab \\ a & ab+a & 2ab \\ a & ab+a & 2ab+a \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} a & ab & ab \\ 0 & a & ab \\ 0 & a & ab+a \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} a & ab & ab \\ 0 & a & ab \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

En se servant des valeurs $R_2 = R_2 - \boxed{1} R_1$, et $R_3 = R_3 - \boxed{1} R_1$ sur la première colonne de la matrice L et de la valeur $R_3 = R_3 - \boxed{1} R_2$ sur la deuxième colonne de la matrice L, on obtient donc:

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & ab \\ a & ab+a & 2ab \\ a & ab+a & 2ab+a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} a & ab & ab \\ 0 & a & ab \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}_{U}.$$

<7 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

Produit des éléments diagonaux: le déterminant est donc det(A)=a^3 (vérifiée dans les deux cas).
<2 pts>

II. Moindres Carrés (35 pts)

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, physiquement distribuées selon la fonction ou le modèle de répartition théorique suivant:

$$y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c} \tag{1}$$

avec les paramètres $[c, \alpha]$ qui sont respectivement les paramètres de *forme* et d'*échelle* de cette fonction de répartition.
Le but de cet exercice est maintenant de chercher à estimer les paramètres $[c, \alpha]$ de cette fonction de répartition (Eq. (1)) qui s'ajustent le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées, à partir du tableau de $N = 4$ données suivant:

x_i	1.00	2.00	3.00	4.00
$y_i = y(x_i)$	0.73	0.33	0.15	0.08

1. **Régression Linéaire**
   Pour simplifier la résolution de ce problème d'estimation au sens des moindres carrés, on va d'abord essayer de se ramener, par changement de variable, à de nouvelles données cherchant à s'ajuster (linéairement) à une droite d'équation: $Y = aX + b$

   (a) Trouver ce changement de variable et exprimer ensuite les paramètres (a, b) de cette droite en fonction des paramètres $[c, \alpha]$ de cette fonction de répartition.
   <9 pts>

   (b) En supposant que l'on fasse le changement de variable de la question précédente, donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a et b.
   <6 pts>

   (c) Trouver les coefficients a et b en résolvant ces équations normales par la méthode du pivot de Gauss (sans pivotage) et en déduire les paramètres α et c de cette fonction de répartition.
   <12 pts>

2. **Régression Non-Linéaire**
   Dans cette partie, on ne fera aucun changement de variable pour se ramener au cas linéaire comme précédemment et on considérera directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[c, \alpha]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidu $R(c, \alpha) = \sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2$, c'est-à- dire une régression non linéaire. Donner le système d'équations équations (non-linéaires) permettant de trouver les coefficients $[c, \alpha]$ au sens des moindres carrés de cette fonction de répartition.
   <8 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$

Re-exprimons l'Eq. (1) de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(x)} - 1 &= \Big(\frac{x}{\alpha}\Big)^c \\ \ln\Big(\frac{1}{y(x)} - 1\Big) &= c \ln x - c \ln(\alpha) \end{aligned}$$

En posant donc: $Y = \ln\big(\frac{1}{y(x)} - 1\big)$ et $X = \ln x$, on obtient immédiatement:

$$\begin{aligned} \underbrace{\ln\Big(\frac{1}{y(x)} - 1\Big)}_{Y} &= \underbrace{c}_{a} \underbrace{\ln x}_{X} + \underbrace{(-c \ln(\alpha))}_{b} \\ Y &= aX + b \end{aligned}$$

On obtient donc, après le changement de variable $Y = \ln\big(\frac{1}{y(x)} - 1\big)$ et $X = \ln(x)$, un problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données ($Y = aX + b$) avec les paramètres $a = c$ et $b = -c\,\ln(\alpha)$.
<9 pts>

1.(b)

Les paramètres (a, b) sont solutions des équations normales ou du système matriciel suivant (cf. cours et en n'oubliant pas de faire le changement de vsriable qui conduit au tableau de la question suivante):

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i\,Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{pmatrix}$$

<6 pts>

1.(c)

Avec le changement de variable $Y = \ln\big(\frac{1}{y(x)} - 1\big)$ et $X = \ln(x)$, on trouve les données suivantes:

X_i	0.000	0.693	1.099	1.386
Y_i	-0.994	0.708	1.735	2.442

<2 pts>

et le système d'équations linéaires suivantes:

$$\begin{pmatrix} 3.609 & 3.178 \\ 3.178 & 4.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.782 \\ 3.891 \end{pmatrix}$$

<2 pts>

puis par une opération élémentaire; $R_2 = R_2 - \frac{3.178}{3.609} R_1$, on obtient:

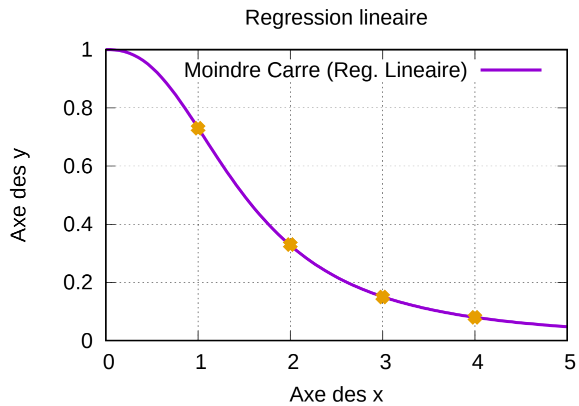
$$\begin{pmatrix} 3.609 & 3.178 \\ 0 & 1.202 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.782 \\ -1.200 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $\boxed{b \approx -0.998}$, puis, $3.609\,a + (3.178 \times -0.998) = 5.782$, *i.e.*, $\boxed{a \approx 2.481}$
<4 pts>

En utilisant le fait que: $\begin{cases} a &= c \\ b &= -c\,\ln(\alpha) \end{cases}$

On obtient facilement, d'abord $a = \boxed{c \approx 2.481}$, puis $\alpha = \exp(-\frac{b}{a}) = \exp(\frac{0.998}{2.481}) = \boxed{\alpha \approx 1.495}$
<4 pts>

Nota : On peut remarquer, avec les paramètres trouvés, la régression linéaire de notre exemple s'ajuste presque parfaitement aux points de données, qui dans ce cas ne sont pas très bruitées, tout au plus 1% de bruit pour la seconde mesure (la mesure d'abscisse 2 projetée sur la courbe nous donne 0.3269476523 *versus* 0.33.)



$\boxed{2}$

On cherchera à minimiser le résidu R suivant (avec $N=4$):

$$R(c,\alpha) \;=\; \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \frac{1}{1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}\right)^2$$

Trouver les paramètres $[c,\alpha]$ au sens des moindres carrés, c'est estimer $[c,\alpha]$ pour que $R_2 = R(c,\alpha)$ soit minimal, c'est- à-dire tel que $\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial c} = 0$ et $\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$. En se souvenant que $\left(a^x\right)' = \ln(a)\cdot a^x$, la dérivation par rapport au paramètre c nous donne:

$$\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial c} \;=\; \sum_{i=1}^{N} 2\left(y_i - \frac{1}{1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}\right)\left[\frac{\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}{\left(1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c\right)^2}\right] = 0$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ est:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial \alpha} \;&=\; \sum_{i=1}^{N} 2\left(y_i - \frac{1}{1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}\right)\left[\frac{-c\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{c-1}\cdot\left(\frac{x_i}{\alpha^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c\right)^2}\right] = 0 \\
&=\; \sum_{i=1}^{N} 2\left(y_i - \frac{1}{1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}\right)\left[\frac{c\,\frac{x_i^c}{\alpha^{c+1}})}{\left(1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c\right)^2}\right] = 0
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc le système d'équations non linéaires suivantes:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
F_1(c,\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \frac{1}{1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}\right)\left[\frac{\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}{\left(1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c\right)^2}\right] & = & 0 \\
F_2(c,\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \frac{1}{1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c}\right)\left[\frac{\frac{c\,x_i^c}{\alpha^{c+1}}}{\left(1+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c\right)^2}\right] & = & 0
\end{array}\right.$$

que nous pouvons un peu simplifier en écrivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{4} c\,\frac{x_i^c}{\alpha^{c+1}}\left(1-y_i[1+(\frac{x_i}{\alpha})^c]\right) & = & 0 \\
\sum_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{\alpha})^c\,\ln(\frac{x_i}{\alpha})\left(1-y_i[1+(\frac{x_i}{\alpha})^c]\right) & = & 0
\end{array}\right.$$

et que nous pouvons un tout petit peu plus encore simplifier en écrivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum_{i=1}^{4} \frac{c}{\alpha}\, x_i^c \left(1 - y_i[1 + (\frac{x_i}{\alpha})^c]\right) & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^c \, \ln(\frac{x_i}{\alpha}) \left(1 - y_i[1 + (\frac{x_i}{\alpha})^c]\right) & = & 0\end{array}\right.$$

<8 pts>

Nota : On peut constater qu'il est beaucoup plus difficile de trouver une solution à ce système d'équations non linéaires que le système linéaire de la question 1. Comme dans cet exemple, on a peu de paramètres, on peut faire (informatiquement parlant) une recherche exhaustive numérique, c'est-à-dire calculer tous les résidus pour toutes les valeurs de $[c, \alpha]$ comprise entre $[0, 5]$ par pas (précision) de 10^{-3}, et prendre le couple de paramètres assurant le résidu minimal.

III. Intégration Numérique (37 pts)

Soit l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^{35} \cdot \exp(-x)\, dx \tag{2}$$

1. **Méthode de Simpson 1/3**

   Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode de Simpson 1/3 (quadratures composites) en utilisant 4 intervalles.
   <6 pts>

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**

   Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes pour calculer une valeur approchée de I.
   <7 pts>

3. **Méthode hybride analytique et itérative/numérique**
   Soit $I(n)$, l'intégrale:

   $$I(n) = \int_0^1 x^n \cdot \exp(-x)\, dx$$

   Avec cette formulation, l'intégrale dont on cherche l'approximation est $I(35)$.

   (a) On se propose maintenant de résoudre cette intégrale par une méthode analytique itérative.
   En utilisant une intégration par parties, montrer qu'il existe pour cette intégrale, une relation de récurrence entre $I(n)$ et $I(n-1)$ du type $I(n) = f(I(n-1))$ qui aboutit à la relation:

   $$\begin{array}{rrcl} & I(n) & = & nI(n-1) - (1/e) \\ \text{avec:} & I(0) & = & 1 - (1/e)\end{array}$$

   <6 pts>

   (b) Une stratégie de calcul hybride (analytique et numérique) pour calculer $I(35)$ consiste simplement à itérer numériquement la suite itérative $I(n) = f(I(n-1))$ à partir de $I(0)$ (jusqu'à l'obtention de $I(35)$).
   Si on considère qu'à chaque étape de cette relation itérative, on devra prendre en compte la

propagation des erreurs générées par la fonction $f(x)$ et que $I(0)$ est entachée d'une imprécision ou d'une erreur initiale de ϵ, on vous demande de quantifier l'amplification d'erreur entachant $I(35)$.
<6 pts>

(c) Retrouver à partir de cette relation, la relation itérative inverse ou rétrograde $I(n-1) = g(I(n)$.
<4 pts>

(d) Cette fois-ci, on désire estimer $I(35)$ à partir de $I(60)$ (supposé connu) et de la relation itérative inverse ou rétrograde $I(n-1) = g(I(n))$. En considérant qu'à chaque étape de cette relation itérative inverse, on devra aussi prendre en compte la propagation des erreurs générées cette fois-ci par la fonction $g(x)$; montrer que cette relation itérative inverse ou rétrograde conduit à un calcul itératif de $I(35)$ stable (*i.e.*, sans amplification d'erreur).
<5 pts>

(e) En considérant que l'on prenne la relation itérative inverse dont on a montré à la question précédente qu'elle était plus stable numériquement et en supposant que l'on sache que la suite $I(n) = f(I(n-1))$ est décroissante. Quelle valeur pourrait-on prendre pour $I(50)$, pour amorcer cette relation itérative inverse ?
<3 pts>

Réponse

1.(a)

On obtient, par la méthode de Simpson (1/3), puisque $h = \frac{(1-0)}{4} = \frac{1}{4}$ (pour 4 intervalles, *i.e.*, pour cinq points équirépartis entre les bornes $[0,1]$ d'intégration):

$$\begin{aligned}
I_{\text{Simpson (1/3)},4} &= (1/12)\Big(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)\Big) \\
I_{\text{Simpson (1/3)},4} &\approx (1/12)\Big(0 + 4(6.597 \times 10^{-22}) + 2(1.765 \times 10^{-11}) + 4(2.002 \times 10^{-5}) + 0.3679\Big) \\
I_{\text{Simpson (1/3)},4} &\approx 0.03066 \quad (\approx (1/12e))
\end{aligned}$$

<6 pts>

2

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(t+1)$ ou $t = 2x - 1$, $(dx = (1/2)dt)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x^{35} \cdot \exp(-x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{35}} \cdot \int_{-1}^{1} (t+1)^{35} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(t+1)\right) dt \\
&= \frac{1}{2^{36}} \times \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^{35} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}[-\frac{\sqrt{3}}{3}+1]\right) \;+\; \left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^{35} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}[\frac{\sqrt{3}}{3}+1]\right)\right) \\
&\approx 5.596 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

<7 pts>

Nota: À cet instant, on ne sait vraiment pas quelle serait une bonne estimation de $I(35)$. La méthode de Simpson 1/3 avec 4 intervalles nous donne $I(35) \approx 0.03066$ et la méthode des quadratures Gaussiennes nous donne $I(35) \approx 0.00005596$. Si on considère que la vérité est peut-être à mi-chemin entre ces deux méthodes numériques, on trouve une estimation de $I(35) \approx 0.01535789$ et il s'en suit que les deux dernières estimations sont entachées de plus de 42 %, pour la première et 27350 % d'erreur relative pour la seconde.
De plus, on ne peut utiliser efficacement la borne supérieure de la méthode de la quadrature composite de la méthode de Simpson 1/3 (difficile de trouver un encadrement de $(1/180)\, h^4\, (\xi^{35}\, \exp(-\xi))^{IV}$ pour $\xi \in [0,\ 1]$)

pour trouver un majorant de l'erreur de la méthode de Simpson 1/3 avec 4 intervalles.
Donc, on doit trouver une autre méthode; c'est l'objet des questions suivantes.

3.(a)

Par simple calcul, on trouve immédiatement $I(0) = [-\exp(-x)]_0^1 = 1 - (1/e)$ puis par une simple intégration par parties:

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_0^1 x^n \cdot \exp(-x)\,dx \\ &= [-x^n \cdot \exp(-x)]_0^1 \;+\; n\int_0^1 x^{n-1} \cdot \exp(-x)\,dx \\ &= -\exp(-1) + n\,I(n-1) \\ &= n\,I(n-1) - 1/e = f(I(n-1)) \end{aligned}$$

<6 pts>

3.(b)

Avec la relation itérative directe $I(n) = f(I(n-1))$, une erreur ou imprécision sur $I(n-1)$ de ϵ_{n-1} est amplifiée par n sur $I(n)$. En partant donc de $I(0)$ avec une imprécision de ϵ, celle-ci sera donc amplifiée de 1 sur $I(1)$, puis de 2 sur $I(2)$ puis de 3 sur $I(3)$, puis cette erreur sera amplifiée de 4 sur $I(4)$, ainsi de suite, etc. Au final, en partant de $I(0)$ avec une imprécision de ϵ, cette erreur sera amplifiée, par $1 \times 2 \times 3 \times ... \times 35$ soit 35! ($\approx 1.33 \times 10^{40}$) fois sur le résultat final $I(35)$ auquel on désire aboutir et on aura finalement: $\hat{I}(35) = I(35) \pm (35!) \times \epsilon$. Cette relation itérative n'est pas stable numériquement et cette méthode numérique, pour estimer $I(35)$, n'est donc pas numériquement intéressante.
<6 pts>

3.(c)

$$I(n-1) = \frac{I(n) + (1/e)}{n} = g(I(n))$$

<4 pts>

3.(d)

En utilisant la relation itérative inverse, par contre, à chaque itération de $g(x) = (x+(1/e)/n)$, l'amplification d'erreur créée par la fonction g, pour le calcul de $I(n-1)$, est $1/n$. Pour le calcul de $I(n-2)$, elle est de $1/(n-1)$ et ainsi de suite. À chaque itération, il y aura donc atténuation d'erreur. Plus précisément, en partant de $I(60)$, par exemple avec une certaine erreur de départ, disons $\epsilon_{[i=60]}$, le calcul de $I(59)$ (avec la relation itérative inverse ou rétrograde) sera donné avec une erreur $\epsilon_{[i=60]} \times (60)^{-1}$, puis le calul de $I(58)$ sera donné avec une erreur $\epsilon_{[i=60]} \times (60 \times 59)^{-1}$, puis le calul de $I(57)$ sera donné avec une erreur $\epsilon_{[i=60]} \times (60 \times 59 \times 58)^{-1}$, etc. Enfin, le calcul désiré de $I(35)$ sera finalement donné avec une erreur ou imprécision de $\epsilon_{[i=60]} \times (60 \times 59 \times 58 \times \ldots\ldots \times 36)^{-1} = \epsilon_{[i=60]} \times 35!/60!$, c'est-à-dire $\approx \epsilon_{[i=60]} \times 1.2418 \times 10^{-42}$. Bref, cette relation itérative inverse est d'une stabilité à toute épreuve, même si on part avec une valeur pour I_n extrêmement bruitée ou erronée !
<5 pts>

Nota: Cette relation itérative inverse est même autocorrectrice. En effet, si on part avec une valeur de I_n exagérément fausse, voire même complètement aberrante (style une valeur nulle pour $I(n)$), cette relation convergera d'autant mieux vers le bon résultat que le nombre d'itérations faite pour y aboutir est grand.

3.(e)

L'énoncé nous dit que la suite $I(n) = f(I(n-1))$ est décroissante, donc la suite itérative inverse $I(n-1) = g(I(n))$ est croissante. Si on veut estimer $I(35)$, en partant de cette suite itérative inverse (et très stable), en partant de $I(50)$, on sait donc (cf. plus haut) que l'erreur (absolu) sur $I(35)$ sera de l'ordre de l'erreur (absolu) sur $I(50) \times (35!/50!)$, soit: $\Delta I(35) = \Delta I(50) \times (35!/50!) \approx \Delta I(50) \times 3.3975 \times 10^{-25}$.

On peut donc amorcer cette relation itérative inverse hyper-stable (qui est donc autocorrectrice) en partant avec une valeur exagérément faible et exagérément fausse, voire même complètement aberrante comme $I(50) = 0.0$ et cela aboutira, tout de même, au final, à une bonne estimation de $I(35)$.

<3 pts>

Nota -1-: Je ne vous le demandais pas, car les calculs sont coûteux en temps, un peu ennuyeux et rébarbatif, mais voici numériquement ce que cela donne (pour ceux qui sont curieux, je vous conseillerais d'implémenter cette suite itérative inverse: $I(n-1) = g(I(n)$ sur ordinateur ou calculatrice):

$$
\begin{aligned}
I(50) &= 0.0 \qquad \text{valeur initiale nulle donc fausse} \\
I(49) &= e^{-1}/50 \\
I(48) &= e^{-1}/(49 \times 50) + e^{-1}/49 \\
I(47) &= e^{-1}/(48 \times 49 \times 50) + e^{-1})/(48 \times 49) + e^{-1})/48 \\
\ldots &= \ldots \\
\ldots &= \ldots \\
\text{Bref;} \quad I(35) &= \underbrace{e^{-1}/36}_{0.01021888} + \underbrace{e^{-1}/(36{\times}37)}_{0.000276} + \underbrace{e^{-1}/(36{\times}37{\times}38)}_{0.000007268} + \ldots\ldots + e^{-1}/(36{\times}37{\times}38{\times}\ldots{\times}50) \\
&= 0105023
\end{aligned}
$$

Si on compte les trois premiers ternes, on aura une précision de $I(35)$ à environ 4 CSE et on obtient $I(35) \approx 0.\underline{01050}$ (la somme des termes au delà du troisième terme est bien inférieur au troisième terme). Si on compte les quatres premiers ternes, on aura, puisque; $e^{-1}/(36{\times}37{\times}38!{\times}39) \approx 0.0000001863 < 0.5{\times}10^{-1} < 0.5{\times}10^{-6}$ une précision de $I(35)$ à environ 6 CSE avec $I(35) \approx 0.\underline{010502}3$, etc. Bref, cette méthode permet aussi d'estimer $I(35)$ avec le nombre de CSE désiré

Si on utilise cette fois, la suite itérative directe: $I(n) = f(I(n-1))$, l'estimation de $I(35)$, à partir de $I(0) = (1 - 1/e)$ exacte est catastrophique et on obtient sur ma calculatrice *CASIO fx-7400G PLUS:*

$$
\begin{aligned}
I(0) &= 0.632120558 \\
I(1) &= 0.264241117 \\
\ldots &= \ldots \\
I(13) &= 0.035617031 \\
I(14) &= 0.130758995 \qquad \text{et cela s'emballe à partir de ce terme} \\
I(15) &= 1.593505451 \\
I(16) &= 25,12820778 \\
I(17) &= 426.8116528 \\
\ldots &= \ldots \\
i(35) &= 1.239876568 \times 10^{28}
\end{aligned}
$$

Cela s'emballe à partir du 14-ième terme. Pour ce terme, on utilise, à travers la suite itérative directe: $I(n) = nI(n-1) - (e^{-1})$, le calcul de $14! \approx 8.7178 \times 10^{10}$ la valeur de départ $I(0)$ (qui est donné sur ma calculatrice avec environ 10 chiffres après la virgule).

Nota -2-: On peut remarquer aussi que la méthode de Simpson 1/3 et de la quadrature Gaussienne ne permet pas d'avoir une estimation robuste de $I(35)$.

IV. Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)

Soit l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{\exp(y(t))}{1 + t^2} \tag{3}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$, $y_2 = y(0.4)$ et $y_3 = y(0.6)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
   <5 pts>

2. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (arrondissez et gardez au moins quatre décimales).
   <5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par la méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 0$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{\exp(y_n)}{1 + t_n^2}\right)$$

<2 pts>

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	0.000
1	0.2	0.200
2	0.4	0.434
3	0.6	0.701

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes:

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\left(\frac{\exp(y_n)}{1 + t_n^2}\right)}_{f(t_n, y_n)} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\left(\frac{\exp(y_n)}{1 + t_n^2} + \frac{\exp(\tilde{y}_{n+1})}{1 + t_{n+1}^2}\right)$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci-dessous:

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	0.000	0.000
1	0.2	0.200	0.217
2	0.4	0.456	0.473

<4 pts>

V. Système d'Équations Différentielles (10 pts)

Soit l'équation différentielle suivante:

$$x'''(t) + \sqrt{x'(t)} + x(t) \;=\; 0$$

On considérera les conditions initiales $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$. On vous demande de:

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <4 pts>
2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser qu'elle serait le système de relations itératives qui serait obtenu.
   <3 pts>
3. À partir de $x(t=0) = x_0 = 1.0$, trouver $x(t=0.2)$ et $x(t=0.4)$.
   <3 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En posant, $x'(t) = x_p(t)$ et $x_p'(t) = x_{pp}(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant:

$$\begin{cases} x'(t) &= x_p(t) \\ x_p'(t) &= x_{pp}(t) \\ x_{pp}'(t) &= -\sqrt{x_p(t)} - x(t) \end{cases}$$

<3 pts>

Avec les conditions initiales $x(0) = x_p(0) = x_{pp}(0) = 1$.

<1 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivantes:

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + h\, x_p(t_n) \\ x_p(t_{n+1}) &= x_p(t_n) + h\, x_{pp}(t_n) \\ x_{pp}(t_{n+1}) &= x_{pp}(t_n) - h\Big(\sqrt{x_p(t_n)} - x(t_n)\Big) \end{cases}$$

<3 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

En se souvenant que la fonction qui nous intéresse (solution de l'équation différentielle) est $x(t)$ et en partant des conditions initiales $x(0) = x_p(0) = x_{pp}(0) = 0$, on obtient immédiatement pour $h = 0.2$:

$$\begin{cases} x(0.2) &= 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_p(0.2) &= 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_{pp}(0.2) &= 1.0 - 0.2\big(\sqrt{1} - 1\big) = 0.0 \end{cases}$$

puis $x(0.4) = 1.2 + (0.2 \times 1.2) = 1.44$

<3 pts>

Nota: $x_p(0.2)$ et $x_{pp}(0.2)$ n'était pas demandé.