DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http: //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail: mignotte@iro.umontreal.ca

date: *20/04/2023*

I	Factorisation *LU* (14 pts)
II	Moindres Carrés (38 pts)
III	Intégration Numérique (34 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)
V	Résolution de Système d'Équations Différentielles (12 pts)
Total	108 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Factorisation LU (14 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode de la factorisation directe. **<6 pts>**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode du pivot de Gauss. **<6 pts>**

3. Calculer le déterminant de A en utilisant l'une de ces deux formes de décomposition. **<2 pts>**

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par factorisation directe, on trouve *directement*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

<6 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par factorisation LU par pivot de Gauss, on trouve, en faisant uniquement d'abord $R_2 = R_2 - R_1$ dans un premier temps puis $R_3 = R_3 - 2\,R_2$ dans un deuxième temps:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En se servant des valeurs $R_2 = R_2 - \boxed{1}\,R_1$, et $R_3 = R_3 - \boxed{0}\,R_1$ sur la première colonne de la matrice L et de la valeur $R_3 = R_3 - \boxed{2}\,R_2$ sur la deuxième colonne de la matrice L, on obtient donc:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}.$$

<6 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

Produit des éléments diagonaux: le déterminant est donc det(A)=$4\times3\times2$=24 (vérifiée dans les 2 cas).
<2 pts>

II. Moindres Carrés (38 pts)

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, physiquement distribuées selon la fonction ou le modèle de répartition théorique suivant:

$$y\,(x) = \alpha \cdot \exp\big(\frac{-\beta}{x}\big) \tag{1}$$

avec les paramètres $[\alpha, \beta]$ qui sont respectivement les paramètres de cette fonction de répartition.
Le but de cet exercice est maintenant de chercher à estimer les paramètres $[\alpha, \beta]$ de cette fonction de répartition (Eq. (1)) qui s'ajustent le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées à partir du tableau de $N = 4$ données suivant:

x_i	1.00	2.00	3.00	4.00
$y_i = y(x_i)$	0.27	0.74	1.03	1.21

1. **Régression Linéaire**
   Pour simplifier la résolution de ce problème d'estimation au sens des moindres carrés, on va d'abord essayer de se ramener, par changement de variable, à de nouvelles données cherchant à s'ajuster (linéairement) à une droite d'équation: $Y = aX + b$
   (a) Trouver ce changement de variable et exprimer ensuite les paramètres (a, b) de cette droite en fonction des paramètres $[\alpha, \beta]$ de cette fonction de répartition.
   <**7 pts**>
   (b) En supposant que l'on fasse le changement de variable de la question précédente, donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a et b.
   <**4 pts**>
   (c) Trouver les coefficients a et b en résolvant ces équations normales par la méthode du pivot de Gauss (sans pivotage) et en déduire les paramètres α et β de cette fonction de répartition.
   <**12 pts**>
   (d) En utilisant cette regression, trouver le nombre de chiffre significatif exact (et les souligner) dans la valeur de $y(2) = 0.74$.
   <**5 pts**>
   (e) À partir du résultat de la question (c) et en trouvant ensuite une relation entre le paramètre α et β, écrire la fonction de répartition en fonction d'un paramètre interne unique. En utilisant ensuite cette fonction de répartition dépendante que d'un paramètre interne, trouver une technique permettant de vérifier rapidement que l'estimation de la valeur de ce paramètre interne est correcte (vérifiant ainsi facilement que vos calculs précédents ((b) et (c)) sont ainsi justes).
   <**4 pts**>

2. **Régression Non-Linéaire**
   Dans cette partie, on ne fera aucun changement de variable pour se ramener au cas linéaire comme précédemment et on considérera directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[\alpha, \beta]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidu $R(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2$, c'est-à- dire une régression non linéaire. Donner le système d'équations équations (non-linéaires) permettant de trouver les coefficients $[\alpha, \beta]$ au sens des moindres carrés de cette fonction de répartition.
   <**6 pts**>

Réponse

1.(a)

Re-exprimons l'Eq. (1) de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \underbrace{\ln\big(y(x)\big)}_{Y} &= \underbrace{-\beta}_{a} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{X} + \underbrace{\ln(\alpha)}_{b} \\ Y &= aX + b \end{aligned}$$

On obtient donc, après le changement de variable $Y = \ln\big(y(x)\big)$ et $X = 1/x$, un problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données $(Y = aX + b)$ avec les paramètres $a = -\beta$ et $b = \ln(\alpha)$.
<**7 pts**>

1.(b)

Les paramètres (a, b) sont solutions des équations normales ou du système matriciel suivant (cf. cours et en n'oubliant pas de faire le changement de variable qui conduit au tableau de la question suivante):

<4 pts>
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i \\ \sum_{i=1}^N X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i Y_i \\ \sum_{i=1}^N Y_i \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$

Avec le changement de variable $Y = \ln\big(y(x)\big)$ et $X = 1/x$, on trouve les données suivantes:

<2 pts>

X_i	1.000	0.500	0.333	0.250
Y_i	-1.309	-0.301	0.030	0.191

et le système d'équations linéaires suivantes:

<2 pts>
$$\begin{pmatrix} 1.424 & 2.083 \\ 2.083 & 4.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.402 \\ -1.389 \end{pmatrix}$$

puis par une opération élémentaire; $R_2 = R_2 - \frac{2.083}{1.424} R_1 = R_2 - 1.463\, R_1$, on obtient:

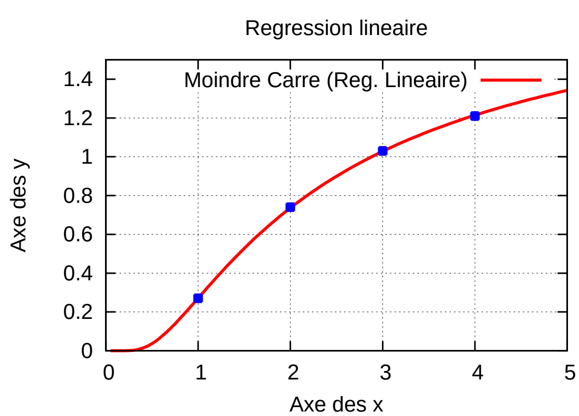
$$\begin{pmatrix} 1.424 & 2.083 \\ 0 & 0.953 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.402 \\ 0.662 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $\boxed{b \approx 0.694}$, puis, $1.424\, a + (2.083 \times !0.694) = -1.402$, *i.e.*, $\boxed{a \approx -2.000}$
<4 pts>

En utilisant le fait que: $\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -\beta \\ b & = & \ln(\alpha) \end{array} \right.$

On obtient facilement, d'abord $\boxed{\beta \approx 2.000}$, puis $\alpha = \exp(b) = \boxed{\alpha \approx 2.002}$
<4 pts>

Nota -1- : On peut remarquer, avec les paramètres trouvés, la régression linéaire de notre exemple s'ajuste presque parfaitement aux points de données, qui dans ce cas ne semblent être pas très bruitées (cf. question 1.(d).)



Nota -2- : Une variante de la réponse 1.c, plus longue et n'utilisant pas les équation normales (mais en les retrouvant implicitement) consistait à dire que le tableau $[X_i, X_i]$ des $N = 4$ points de données $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ ci-dessus nous permet d'écrire le système suivant (à un bruit prêt entachant les données):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ X_3 & 1 \\ X_4 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}}_{b} \blacktriangleright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1.309 \\ 0.301 \\ 0.030 \\ 0.191 \end{pmatrix}}_{b} \blacktriangleright \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} -1.309 \\ 0.301 \\ 0.030 \\ 0.191 \end{pmatrix} \blacktriangleright \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.00 \\ 0.694 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{1.(d)}}$

En utilisant le modèle de regression, on a $(y(2) = 2.002 \times \exp(-2.000/2.000) = 0.736494641$ et une erreur absolue: $\Delta y(2) = |0.74 - 0.736494641| = 3.505 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-2}$; bref le rang du dernier chiffre significatif pour $y(2)$ correspond au centième et on peut écrire: $y(2) = \underline{0.74}$. Bref les données ne sont pas très bruitée.

<5 pts>

$\boxed{\textbf{1.(e)}}$

Puisque $\alpha \approx \beta$, posons $\alpha = \beta = \rho$ et la fonction de répartition s'écrit donc $y(x) = \rho \cdot \exp\left(\frac{-\rho}{x}\right)$ ou $y(x) = 2 \cdot \exp\left(\frac{-2}{x}\right)$. En utilisant les données, on vérifie facilement que pour $x = 1; y = 0.27 \approx 2\,\exp(-2)$, que pour $x = 2; y = 0.74 \approx 2\,\exp(-1)$, etc.

<4 pts>

$\boxed{\textbf{2}}$

On cherchera à minimiser le résidu R suivant (avec $N = 4$):

$$R(\alpha, \beta) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \alpha \cdot \exp(\frac{-\beta}{x_i}) \right)^2$$

Trouver les paramètres $[\alpha, \beta]$ au sens des moindres carrés, c'est estimer $[\alpha, \beta]$ pour que $R_2 = R(\alpha, \beta)$ soit minimal, c'est- à-dire tel que $\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 0$ et $\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre α nous donne:

$$\frac{\partial R(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \;=\; \sum_{i=1}^{N} 2 \left(y_i - \alpha \cdot \exp(\frac{-\beta}{x_i}\right) \left[-\exp(\frac{-\beta}{x_i}) \right] = 0$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 0$ est:

$$\frac{\partial R(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \;=\; \sum_{i=1}^{N} 2 \left(y_i - \alpha \cdot \exp(\frac{-\beta}{x_i}\right) \left[\frac{\alpha}{x_i} \exp(\frac{-\beta}{x_i}) \right] = 0$$

Nous trouvons donc le système d'équations non linéaires suivantes:

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i \, \exp(\frac{-\beta}{x_i}) - \alpha \, \exp(\frac{-2\,\beta}{x_i}) \right) & = \; 0 \\ F_2(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i\,\alpha}{x_i} \, \exp(\frac{-\beta}{x_i}) - \frac{\alpha^2}{x_i} \, \exp(\frac{-2\,\beta}{x_i}) \right) & = \; 0 \end{cases}$$

<6 pts>

III. Intégration Numérique (34 pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \sqrt{(\ln x)}\,dx \qquad (2)$$

1. **Méthode des trapèzes**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles.
   <6 pts>
   (b) Donner une borne supérieure de l'erreur commise par la méthode d'intégration numérique précédente. Utiliser pour cela, les dérivées secondes numériques de $f(x)$. Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts dans la valeur estimée de l'intégrale donnée par l'Eq. (2).
   <10 pts>
2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**
   (a) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes pour calculer une valeur approchée de I.
   <6 pts>
3. **Méthode Hybride**
   Avec un changement de variable (par ex. $y = \sqrt{\ln(x)}$ et une intégration par partie, résoudre cette intégrale en utilisant ensuite une approximation numérique de l'intégrale $\int_a^b \exp(y^2)dy$ par la méthode de Simpson 1/3 avec 4 intervalles.
   <12 pts>

Réponse

1.(a)

On obtient, par la méthode des trapèzes et en utilisant 4 intervalles (donc 5 points) sur l'intervalle d'intégration [1 2] ($h = 1/4$):

$$\begin{aligned} I_4 &= (1/8)\Big(f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + f(2)\Big) \\ I_4 &= (1/8)\Big(0 + 0.94476 + 1.27352 + 1.49615 + 0.83255\Big) \\ I_4 &\approx \boxed{0.5683725} \end{aligned}$$

<6 pts>

Nota : La vraie valeur de cette intégrale est $I = 0.\underline{59259}$ (cf. Nota plus bas). En fait, on aurait pu prévoir que l'estimation numérique de cette intégrale serait légérement inférieur à 0.59259. En effet, la fonction $y = \ln(\sqrt{x})$ est croissante sur l'intervalle d'intégration. De ce fait, les trapèzes construits, sur cette intervalle, sont strictement à l'intérieur de cette courbe $y = \ln(\sqrt{x})$ et donc la somme de leurs surfaces est forcément inférieur à la vraie surface existante sous cette courbe.

1.(b)

On a les points suivants:

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	0.0	0.47238	0.63676	0.74807	0.83255

L'erreur E sur cette intégrale s'écrit $\frac{-h^2}{12}(2-1)f''(\xi)$, avec $\xi \in [1,2]$ et nous allons approximer numériquement $f''(\xi) \quad \forall \xi \in [1,2]$ par l'approximation numérique centrée suivante pour les points $x = 1.25$, $x = 1.50$, $x = 1.75$

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

et les approximations numériques suivantes pour le premier ($x = 1.0$) et dernier ($x = 2.0$) point respectivement:

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}$$

et son équivalent:

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}$$

Ce qui nous donne: ▶ $f''(x=1) \approx -4.928$, $f''(x=1.25) \approx -4.928$, $f''(x=1.50) \approx -0.84912$, $f''(x{=}1.75) \approx -0.42928$, $f''(x{=}2.00) \approx -0.42928$.

On prend la valeur max en valeur absolue, *i.e.*, $f''(x = 1.25) \approx 4.928$, et la borne supérieure s'écrit donc:

$$\begin{aligned} |E| &\lessapprox \frac{(0.25)^2}{12} \times (2-1) \times 4.928 \\ |E| &\lessapprox 0.025666 \end{aligned}$$

$|E| < 0.025666 < 0.05 = 0.5 \times 10^{-1}$ donc un chiffre est significatif après la virgule pour l'estimation de $\hat{I}_4$. On a donc $\boxed{I \approx \underline{0.5}7}$

<10 pts>

Nota : La vraie valeur de cette intégrale est $I = 0.\underline{59259}$ (cf. Nota plus bas). Donc l'erreur véritable de cette intégration numérique est $\epsilon = |0.59259 - 0.5683725| \approx 0.0242175$ et cette borne nous donne $\epsilon \lessapprox 0.025666$; ce qui n'est pas mal du tout.

2.

En faisant le changement de variable $x = (1/2)(t+3)$ ou $t = (2x-3)$, $(dx = (1/2)\,dt)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \sqrt{(\ln x)}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{\ln\left(\frac{t+3}{2}\right)}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{\ln\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+3}{2}\right)} + \sqrt{\ln\left(\frac{+\frac{\sqrt{3}}{3}+3}{2}\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[0.437852 + 0.7625452\right] \quad ▶ \quad \boxed{\approx \quad 0.600} \end{aligned}$$

<6 pts>

3.

Faisons le changement de variable $y = \sqrt{\ln(x)}$, on obtient, puisque $dy = (1/x)/[2\sqrt{\ln(x)}]\,dx$, *i.e.*, $dx = 2\,x\,y\,dy = 2\,y\,\exp(y^2)\,dy$:

$$I = \int_1^2 \sqrt{(\ln x)}\,dx = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2\,y^2\,\exp(y^2)\,dy$$

Faisons une intégration par partie:

$$I = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} y\big[2y\,\exp(y^2)\big]dy = \Big[y\,\exp(y^2)\Big]_0^{\sqrt{\ln 2}} - \int_0^{\sqrt{\ln 2}} \exp(y^2)dy = 2\sqrt{\ln 2} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \exp(y^2)\,dy}_{J}$$

Maintenant, comme il précisé dans l'énoncé, donnons une approximation numérique de $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \exp(y^2)\,dy$ en utilisant la méthode de Simpson 1/3 (pour 4 intervalles, *i.e.*, pour cinq points équirépartis entre les bornes $[0, 0.83255]$ d'intégration ($h = 0.208$)):

$$\begin{aligned} J_{\text{Simpson }(1/3),4} &= (0.208/3)\big[f(0) + 4f(0.208) + 2f(0.416) + 4f(0.624) + f(0.833)\big] \\ J_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx (0.208/3)\big[1.0 + 4(1.044) + 2(1.189) + 4(1.476) + (2.00)\big] \\ J_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx 1.071754667 \end{aligned}$$

Du coup, $J = 2\sqrt{\ln 2} - (1.288) = 1.665109 - 1.071754667$ ▶ $\boxed{J \approx 0.593}$.

<12 pts>

Nota : La vraie valeur de cette intégrale est $I = 0.\underline{59259}$ obtenue à partir de la méthode des trapèzes composites sur ordinateur (avec 10000 et 100000 intervalles; cette valeur converge vers $0.\underline{59259}$ en gardant ces cinq décimales, après la virgule, inchangées).
On peut donc en déduire, et cela sera la conclusion de cet exercice;
que la méthode de la quadrature Gausssienne (qui donne $I_{\text{QG}} \approx 0.\underline{6}00$ avec 1 cse après la virgule et $\approx 1\%$ d'erreur) est vraiment bonne et meilleure que la méthode des Trapèzes composites avec cinq points ($I_{\text{T}_5} \approx 0.\underline{5}68$ [1 cse après la virgule et $\approx 4\%$ d'erreur)) plus couteuse en cout de calcul [5 évaluations de fonctions *versus* 2 évaluation de fonction] et que la troisième stratégie, une méthode mi-analytique et mi-numérique de la question 3. et qui utilisera en partie une connaissance analytique de la décomposition de cette intégrale en deux termes avec un terme analytique que l'on peut évaluer parfaitement (en plus du fait que l'intégration numérique se fait cettte fois-ci sur une fonction dont la dérivée n'est pas infinie sur l'une de ses bornes d'intégration), arrive à une meilleure précision encore ($I_{\text{Q}_3} \approx 0.\underline{593}$ avec 3 cse après la virgule et $\approx 0.07\%$ d'erreur).

IV. Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)

Soit l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = f(t, y(t)) = (1 + t^2) \cdot \exp(y(t)) \tag{3}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$, $y_2 = y(0.4)$ et $y_3 = y(0.6)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
<5 pts>

2. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (arrondissez et gardez au moins quatre décimales).
<5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par la méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 0$

$$y_{n+1} = y_n + h \left((1 + t_n^2) \cdot \exp(y_n) \right)$$

<2 pts>

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous:

n	t_n	y_n
0	0.0	0.00000000
1	0.2	0.20000000
2	0.4	0.45405177
3	0.6	0.81937742

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes:

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\Big(1+t_n^2)\cdot\exp(y_n)\Big)}_{f(t_n,y_n)} \qquad \text{et,} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\big)$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\Big((1+t_n^2)\cdot\exp(y_n) + (1+t_{n+1}^2)\cdot\exp(\tilde{y}_{n+1})\Big)$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci-dessous:

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	0.00000000	0.00000000
1	0.2	0.20000000	0.22702589
2	0.4	0.48803726	0.54650557

<4 pts>

V. Système d'Équations Différentielles (12 pts)

Soit l'équation différentielle suivante:

$$x''''(t) + (x'(t))^2 = 0$$

On considérera les conditions initiales $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1$. On vous demande de:

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <4 pts>

2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser qu'elle serait le système de relations itératives qui serait obtenu.
   <4 pts>

3. À partir de $x(t=0) = x_0 = 1.0$, trouver $x(t=0.2)$ et $x(t=0.4)$.
   <4 pts>

Réponse

1.

En posant, $x'(t) = x_p(t)$, $x'_p(t) = x_{pp}(t)$ et $x'_{pp}(t) = x_{ppp}(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x_p(t) \\ x'_p(t) & = & x_{pp}(t) \\ x'_{pp}(t) & = & x_{ppp}(t) \\ x'_{ppp}(t) & = & -\,(x_p(t))^2 \end{array}\right.$$

<3 pts>

Avec les conditions initiales $x(0) = x_p(0) = x_{pp}(0) = x_{ppp}(0) = 1$.

<1 pts>

2.

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivantes:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t_{n+1}) & = & x(t_n) + h\, x_p(t_n) \\ x_p(t_{n+1}) & = & x_p(t_n) + h\, x_{pp}(t_n) \\ x_{pp}(t_{n+1}) & = & x_{pp}(t_n) + h\, x_{ppp}(t_n) \\ x_{ppp}(t_{n+1}) & = & x_{ppp}(t_n) - h\left(x_p(t_n)\right)^2 \end{array}\right.$$

<3 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

En se souvenant que la fonction qui nous intéresse (solution de l'équation différentielle) est $x(t)$ et en partant des conditions initiales $x(0)=x_p(0)=x_{pp}(0)=x_{ppp}(0)=1$, on obtient immédiatement pour $h=0.2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0.2) & = & 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_p(0.2) & = & 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_{pp}(0.2) & = & 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_{ppp}(0.2) & = & 1.0 - 0.2\left(1^2\right) = 0.8 \end{array}\right.$$

puis $x(0.4) = 1.2 + (0.2 \times 1.2) = 1.44$

<4 pts>