DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http: //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail: mignotte@iro.umontreal.ca

date: *26/04/2024*

I	Moindres Carrés (34 pts)
II	Interpolation & Dérivation Numérique (40 pts)
III	Intégration Numérique (13 pts)
IV	Spline (23 pts)
Total	110 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (34 pts)

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, que l'on sait être physiquement distribuées selon la fonction ou le modèle de répartition théorique suivant:

$$y\,(x) = \exp\big(\beta + \alpha \cos(x)\big) = e^{[\beta+\alpha\cos(x)]} \tag{1}$$

avec les paramètres $[\alpha, \beta]$ qui sont respectivement les paramètres de cette fonction de répartition.
Le but de cet exercice est maintenant de chercher à estimer les paramètres $[\alpha, \beta]$ de cette fonction de répartition (Eq. (1)) qui s'ajustent le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées, à partir du tableau de $N = 4$ données suivant:

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	7.39	4.66	1.79	1.00

1. **Régression Linéaire**

   (a) Estimer (avec deux chiffres significatifs après la virgule) les coefficients α et β de cette fonction de répartition au sens des moindres carrés (en utilisant le changement de variable nécessaire permettant de se ramener à un simple problème de régression linéaire).
   <18 pts>

   (b) En utilisant cette régression, trouver le nombre de chiffre significatif exact (et les souligner) dans la valeur de $y(1) = 4.66$.
   <5 pts>

   (c) Donner une estimation fiable de $y'_2 = y'(x_2 = 1)$.
   <5 pts>

2. **Régression Non-Linéaire**

   (a) Dans cette partie, on ne fera aucun changement de variables pour se ramener au cas linéaire comme précédemment et on considérera directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[\alpha, \beta]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidu $R(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2$, c'est-à-dire une régression non linéaire. Donner le système d'équations (non-linéaires) permettant de trouver les coefficients $[\alpha, \beta]$ au sens des moindres carrés de cette fonction de répartition.
   <6 pts>

Réponse

1.(a)

Re-exprimons l'Eq. (1) avec le changement de variables suivant:

$$\begin{aligned} \underbrace{\ln\big(y(x)\big)}_{Y} &= \underbrace{\beta}_{b} + \underbrace{\alpha}_{a} \underbrace{\cos(x)}_{X} \\ Y &= b + aX \end{aligned}$$

On obtient donc, après le changement de variables; $Y = \ln\big(y(x)\big)$ et $X = \cos(x)$, un problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données:

X_i	1.000	0.540	-0.416	-0.990
Y_i	2.000	1.539	0.582	0.000

sur la droite $Y = aX + b$ (avec $a = \alpha$ et $b = \beta$), et avec (a, b), les paramètres de cette régression linéaire, solutions des équations normales ou du système matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i \\ \sum_{i=1}^N X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i\, Y_i \\ \sum_{i=1}^N Y_i \end{pmatrix}$$

conduisant au système d'équations linéaires suivantes:

$$\begin{pmatrix} 2.4448 & 0.1340 \\ 0.1340 & 4.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5890 \\ 4.1210 \end{pmatrix}$$

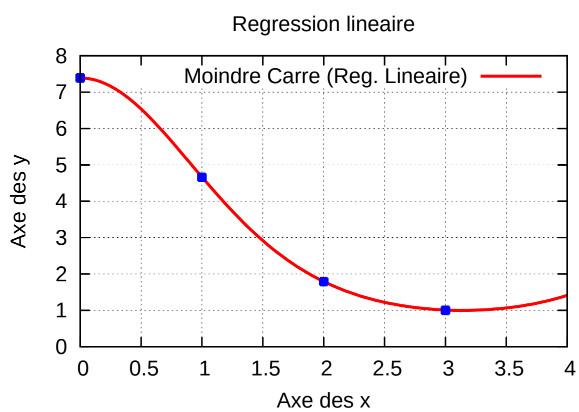
puis par une opération élémentaire; $R_2 = R_2 - \frac{0.1340}{2.4448} R_1 = R_2 - 0.05473\, R_1$, on obtient:

$$\begin{pmatrix} 2.4448 & 0.1340 \\ 0 & 3.993 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5890 \\ 3.9793 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $b \approx 1.003$, puis, $2.448\, a + (0.1340 \times 1.003) = 2.5890$, *i.e.*; $a \approx 1.003$ et donc $\boxed{\alpha \approx 1.00}$ et $\boxed{\beta \approx 1.00}$ en recadrant notre estimation, avec deux chiffres après la virgule, tel qu'il est demandé dans l'énoncé.

<18 pts>

Nota -1- : On peut remarquer, avec les paramètres trouvés, la régression linéaire de notre exemple s'ajuste presque parfaitement aux points de données, qui dans ce cas ne semblent être pas très bruitées (cf. question 1.(b).)



Nota -2- : Une variante de la réponse 1.c, et n'utilisant pas les équation normales (mais en les retrouvant implicitement) consistait à dire que le tableau $[X_i, X_i]$ des $N = 4$ points de données $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$ ci-dessus nous permet d'écrire le système suivant (à un bruit prêt entachant les données):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ X_3 & 1 \\ X_4 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}}_{b} \;\triangleright\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.540 & 1 \\ -0.416 & 1 \\ -0.990 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.000 \\ 1.539 \\ 0.582 \\ 0.000 \end{pmatrix}}_{b} \;\triangleright\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} 2.000 \\ 1.539 \\ 0.582 \\ 0.000 \end{pmatrix} \;\triangleright\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$

En utilisant le modèle de régression, on a $y(1.00) = \exp(1.00 + 1.00 \times \cos(1.00)) \approx 4.6660$ et une erreur absolue: $\Delta y(1) = |4.66 - 4.6660| = 6.00 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-1}$; bref le rang du dernier chiffre significatif pour $y(1)$ correspond au dixième et on peut donc écrire: $y(1) = \underline{\mathbf{4.6}}\mathbf{7}$. Bref les données ne sont pas très bruitées.

<5 pts>

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$

La façon la plus intelligente d'estimer $y'_2 = y'(x_2)$ est bien sûr d'utiliser le fait qu'il est dit dans l'énoncé que les N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, sont physiquement distribuées selon le modèle de répartition $y(x) = \exp\big(\beta + \alpha\cos(x)\big)$. Cela permet donc d'estimer y'_2 fiablement débruité au sens des moindres carrés.

$$\begin{aligned} y'_2 &= -\alpha\sin(x_2)\cdot\exp\big(\beta + \alpha\cos(x_2)\big) \\ &= -\sin(x_2)\cdot\exp\big(1 + \cos(x_2)\big) \end{aligned}$$

Numériquement, $y'_2 = -\sin(1)\exp\big(1 + \cos(1)\big) \approx \boxed{\textbf{-3.926}}$

<5 pts>

Nota:

- Si on utilisait les données brutes, bruitées, on obtiendrait en utilisant la formule centrée *d'ordre 1* (la plus simple): $y'(x_2 = 1) = [y(x_3) - y(x_2)]/(1) = (1.79 - 4.66)/(1) \approx -\mathbf{2.87}$. ($\triangleright$ [2 pts])
- On obtiendrait en utilisant la formule centrée *d'ordre 2*: $y'(x_2 = 1) = [y(x_3) - y(x_1)]/(2\times 1) = (1.79 - 7.39)/(2\times 1) \approx -\mathbf{2.8}$. ($\triangleright$ [3 pts])
- Et si on utilise l'autre formule non centrée *d'ordre 2*: $y'(x_2 = 1) = [-y(x_4) + 4y(x_3) - 3y(x_2)]/(2\times 1) = (-1 + 4\times 1.79 - 3\times 4.66)/2 \approx -\mathbf{3.91}$. ($\triangleright$ [3 pts])
- La stratégie *la plus précise* est néanmoins, comme cela a été dit plus haut dans cette correction, d'utiliser l'information *a priori* que les N données expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, sont physiquement réparties selon la loi $y(x) = \exp\big(1 + \cos(x)\big)$ et pour laquelle on trouve $y'_2 \approx -\mathbf{3.926}$ ($\triangleright$ [5 pts]).

$\boxed{\textbf{2.(a)}}$

On cherchera donc à minimiser le résidu R suivant:

$$R(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N=4} \Big(y_i - \exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big)\Big)^2$$

Trouver les paramètres $[\alpha, \beta]$ au sens des moindres carrés, c'est estimer $[\alpha, \beta]$ pour que $R_2 = R(\alpha, \beta)$ soit minimal, c'est-à-dire tel que $\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = 0$ et $\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre α nous donne:

$$\frac{\partial R(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{N} 2\Big(y_i - \exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big)\Big)\Big[-\cos(x_i)\exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big)\Big] = 0$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = 0$ est:

$$\frac{\partial R(\alpha, \beta)}{\partial\beta} = \sum_{i=1}^{N} 2\Big(y_i - \exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big)\Big)\Big[-\exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big)\Big] = 0$$

Après simplification, nous trouvons donc le système d'équations non linéaires suivante:

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N}\Big(y_i\cos(x_i)\exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big) - \cos(x_i)\exp\big(2\beta + 2\alpha\cos(x_i)\big)\Big) = 0 \\ F_2(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N}\Big(y_i\exp\big(\beta + \alpha\cos(x_i)\big) - \exp\big(2\beta + 2\alpha\cos(x_i)\big)\Big) = 0 \end{cases}$$

ou, un peu plus simplifié:

$$\begin{cases} F_1(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i \cos(x_i)\exp\big(\alpha\cos(x_i)\big) - \cos(x_i)\exp\big(\beta + 2\alpha\cos(x_i)\big)\Big) & = 0 \\ F_2(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i \exp\big(\alpha\cos(x_i)\big) - \exp\big(\beta + 2\alpha\cos(x_i)\big)\Big) & = 0 \end{cases}$$

<**6 pts**>

II. Interpolation & Dérivation Numérique (40 pts)

On va reprendre le tableau de l'exercice I (moindre carrés):

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	7.39	4.66	1.79	1.00

1. On désire trouver le polynôme P_2 de collocation d'ordre 2 qui permette d'interpoler au mieux $y(x = 0.5)$. Trouver ce polynôme de collocation avec la méthode de Lagrange, puis la méthode de Newton-Grégory, puis la méthode de Newton et donner ensuite une estimation de $y(x = 0.5)$. Justifier bien les points que vous utiliserez.
<**20 pts**>
2. Indiquez de deux façons différentes comment on pourrait obtenir une estimation de $y'(x)$ pour $x = 1.00$ avec ce tableau de données et ce que vous avez fait à la question précédente.
<**10 pts**>
3. Utilisez la méthode de votre choix pour trouver le polynôme P_3 de collocation d'ordre 3 utilisant le tableau des 4 points de données et utiliser ce résultat pour donner ensuite une estimation de $y'(x = 1.00)$.
<**10 pts**>

Réponse

1.

Comme les points sont équidistants, on peut effectivement utiliser ces trois méthodes pour estimer le polynôme de collocation d'ordre 2.
Afin de minimiser les erreurs de collocation, on va donc prendre trois points (nécessaires pour un polynôme d'ordre 2) centrés autour de l'estimation demandée $y(x = 0.5)$, c'est-à-dire les points d'abscisse $[x_1 = 0.00 : x_2 = 1.00 : x_3 = 2.00]$.

- Méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\cdot 7.39 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\cdot 4.66 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\cdot 1.79 \\ P_2(x) &\approx 3.695\,(x-1)(x-2) - 4.66\,x(x-2) + 0.895\,x(x-1) \end{aligned}$$

Comme on nous demande pas de simplifier le plus possible ce polynôme de collocation, on gardera cette dernière forme pour l'interpolation demandée (cela nous permettra ainsi de minimiser les erreurs humaines !).

Interpolation en $x = 0.5$ $\triangleright$ $P_2(x = 0.5) = (2.77125) + (3.495) + (-0.22575)$ $\boxed{=\mathbf{6.0425}}$

Nota : Je ne vous le demandais pas, mais si on simplifiait l'expression, on trouverait donc:

$$P_2(x) = -0.07x^2 - 2.66x + 7.39$$

donc, le même polynôme pour les trois méthodes. Pour générer ensuite l'interpolation demandée en $x = 0.5$, si on prends cette expression simplifiée il faut nécessairement qu'elle ne soit pas erronée ! sinon on a tout intérêt à prendre l'expression brute non simplifiée comme je l'ai fait dans cette correction ($[5 + 5 + 5]$ points par expression juste et $[2 + 2 + 1]$ points par interpolation juste).

- MÉTHODE DE NEWTON-GRÉGORY :

Table des différences ▷

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0.00	7.39		
		-2.73	
1.00	4.66		-0.14
		-2.87	
2.00	1.79		

Donc le polynôme: $P_2(x) = 7.39 - 2.73\, s - 0.14\, s(s-1)/2$ avec $s = (x-0)/1 = x$. Pour une interpolation en $x = 0.5$, on a $s = 0.5$ et donc:
Interpolation en $x = 0.5$ ▷ $P_2(x = 0.5) = (7.39) + (-1.365) + (0.0175)$ $\boxed{= \mathbf{6.0425}}$

- MÉTHODE DE NEWTON :

Table des différences divisées ▷

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0.00	7.39		
		-2.73	
1.00	4.66		-0.07
		-2.87	
2.00	1.79		

Donc le polynôme: $P_2(x) = 7.39 - 2.73\, x - 0.07\, x(x-1)$
Interpolation en $x = 0.5$ ▷ $P_2(x = 0.5) = (7.39) + (-1.365) + (0.0175)$ $\boxed{= \mathbf{6.0425}}$
<20 pts>

Nota: On nous demandait pas de calculer cette interpolation pour les trois méthodes mais comme finalement le polynôme trouvé est le même (polynôme de collocation d'ordre 2), cela nous a permis de vérifier efficacement que l'on ne s'était pas numériquement trompé dans ces trois calculs.

2.

La première façon consiste à dériver le polynôme de collocation que l'on a trouvé précédemment puis à calculer $P'(1.00)$. On prend la formule de Newton car elle nous demandera finalement moins de travail pour dériver ce polynôme.

Donc pour cette forme du polynôme de collocation: $P_2(x) = 7.39 - 2.73\, x - 0.07\, x(x-1)$
On calcule sa dérivée: $P_2'(x) = -0.14\, x - 2.66$
Et on fait notre interpolation: $P_2'(x = 1.00) = \boxed{\mathbf{-2.8}}$

La deuxième méthode consiste à remarquer que $x = 1.00$ est centré autour de $x = 0.00$ et $x = 2.00$. Donc en utilisant la formule centrée:

$$P_2'(x = 1.00) = \frac{1.79 - 7.39}{2.00 - 0.00} = \boxed{\mathbf{-2.8}}$$

<10 pts>

Nota -1-: C'est tout à fait normale que l'on trouve les mêmes résultats pour $y'(x=1)$ car on rappelle que la formule centrée vient en fait directement de la dérivée de l'unique polynôme de collocation d'ordre 2 passant par trois points.

Nota -2-: Si on avait pris les mauvais trois points, ceux qui encadrent le moins $x = 0.5$, c-à-d, le 2-ième, 3-ième et 4-ième points, on aurait obtenu $P_2(x = 0.5) = 6.875$ et une dérivée $P_2'(x = 1.00) = -1.83$.

3.

• La méthode la plus simple est d'utiliser la méthode de Newton. Pour cela, on va tout d'abord compléter le tableau des différences divisées:

Table des différences divisées ▷

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.00	7.39			
		-2.73		
1.00	4.66		-0.07	
		-2.87		**0.37**
2.00	1.79		**1.04**	
		-0.79		
3.00	1.00			

On obtient le polynôme $P_3(x)$ à partir de $P_2(x)$ par la formule $P_3(x) = P_2(x) + 0.37\,x(x-1)(x-2)$.

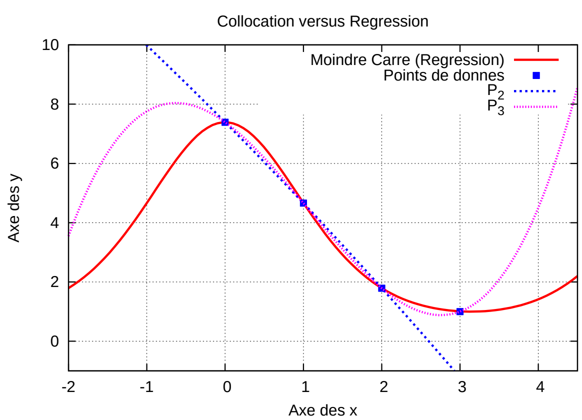
Soit $P_3(x) = 7.39 - 2.73\,x - 0.07\,x(x-1) + 0.37x(x-1)(x-2) = 0.37x^3 - 1.18x^2 - 1.92x + 7.39$.
Donc $P_3'(x) = 1.11x^2 - 2.36x - 1.92$. Et donc $\boxed{P_3'(x=1) = -\mathbf{3.17}}$

<10 pts>

Nota -1-: Je ne vous le demandais pas, mais si on simplifiait l'expression, on trouverait:

$$P_3(x) = 0.37x^3 - 1.18x^2 - 1.92x + 7.39$$

Nota -2-: On affiche sur le graphique suivant; les points de données, la régression et le polynôme de collocation d'ordre 2 et 3.



III. Intégration Numérique (13 pts)

On va reprendre le tableau de l'exercice I (moindre carrés):

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	7.39	4.66	1.79	1.00

1. **Formule numérique d'intégration**

   Donner une approximation du calcul de l'aire sous cette courbe en appliquant la méthode **numérique** d'intégration (résultant de l'intégration du polynôme de collocation) qui assurera le maximum de précision sur ce tableau de données.
   <6 pts>

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**

   Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes pour calculer, en fonction de α et β, une valeur approchée de:

   $$I = \int_0^3 \exp\big(\beta + \alpha\cos(x)\big)\,dx = \int_0^3 e^{[\beta+\alpha\cos(x)]}\,dx$$

   <7 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

La méthode numérique d'intégration (résultant de l'intégration du polynôme de collocation) qui assurera le maximum de précision sur ce tableau de données est la méthode de Simpson (3/8) des quadratures simples. Puisque $h = 1$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{\text{Simpson }(3/8)} &= (3/8)\Big(f(0) + 3f(1) + 3f(2) + f(3)\Big) \\
\hat{I}_{\text{Simpson }(3/8)} &\approx (3/8)\Big(7.39 + 3(4.66) + 3(1.79) + 1\Big) \\
\hat{I}_{\text{Simpson }(1/3)} &\approx \boxed{\mathbf{10.4025}}
\end{aligned}$$

<6 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

En faisant le changement de variable $x = (3t+3)/2$ ou $t = (2x-3)/3$, $dx = 3/2\,dt$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\hat{I}(\alpha,\beta) &= \int_0^3 \exp\big(\beta + \alpha\cos(x)\big)\,dx \\
&= (3/2)\int_{-1}^{1} \exp\big(\beta + \alpha\cos[3t+3)/2]\big)\,dt \\
&= (3/2)\left(\exp\big(\beta + \alpha\cos\big(\frac{-\sqrt{3}+3}{2}\big)\big) + \exp\big(\beta + \alpha\cos\big(\frac{\sqrt{3}+3}{2}\big)\big)\right) \\
&\approx (3/2)\Big(\exp\big(\beta + 0.8057\,\alpha\big) + \exp\big(\beta - 0.7140\,\alpha\big)\Big)
\end{aligned}$$

<7 pts>

Nota: Dans notre cas, puisque l'on a trouvé, à la question **I**.1.a.: $\alpha = \beta = 1.00$, on a donc:
$I \approx (3/2) \times (6.084104312 + 1.33060502) \approx \mathbf{11.123}$.

IV. Splines (23 pts)

On va reprendre le tableau de l'exercice I:

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	7.39	4.66	1.79	1.00

1. **Interpolation**

   Donner l'équation de la spline cubique de type 3 passant par ces points de données.
   <17 pts>

2. **Intégration numérique sous la Spline**

   Utiliser l'interpolation précédente pour calculer **numériquement** l'aire sous cette spline cubique qui passe par ces points de données.
   <6 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

On va devoir tout d'abord estimer S_2 et S_3, les dérivés seconde au deuxième et troisième point. On va ainsi se trouver avec un système de deux équations à deux inconnus dont la première et deuxième équation conduisent, dans le cas de la spline cubique de type 2 (cf. cours; slide #51 du chap. 4), au système matriciel suivant (tous les $h_i = 1$):

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6[(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)] \\ 6[(y_4 - y_3) - (y_3 - y_2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.84 \\ 12.48 \end{pmatrix}$$

Conduisant immédiatement à $\mathbf{S_2 = -0.14}$ et $\mathbf{S_3 = 2.08}$.
La spline étant cubique de type 3 ▶ On a ensuite: $S_1 = 2\,S_2 - S_3$ et $S_4 = -S_2 + 2\,S_3$ (cf. cours, slide 51). Donc $\mathbf{S_1 = -2.36}$ et $\mathbf{S_4 = 4.30}$

. [*Nota: On vérifie que l'on a bien une extrapolation linéaire entre ces quatre dérivées seconde:* $S_1 = -2.36 \triangleright +2.22 \triangleright S_2 = -0.14 \triangleright +2.22 \triangleright S_3 = 2.08 \triangleright +2.22 \triangleright S_4 = 4.30$. *...oui !]*

Du coup, on trouve immédiatement (cf. cours, slide #45 (chap. 4) avec tous les $h_i = 1$ dans notre cas et aussi $d_i = y_i$ et aussi dans notre cas; tous les a_i seront identiques [car type 3 avec $h_i = 1$, $\forall i$):

- ▶ $a_1 = (S_2 - S_1)/6 = \boxed{\mathbf{0.37}}$ $b_1 = S_1/2 = \boxed{\mathbf{-1.18}}$ $c_1 = (y_2 - y_1) - (2S_1 + S_2)/6 = -2.73 + 0.81 = \boxed{\mathbf{-1.92}}$ $d_1 = \boxed{\mathbf{7.39}}$
- ▶ $a_2 = (S_3 - S_2)/6 = \boxed{\mathbf{0.37}}$ $b_2 = S_2/2 = \boxed{\mathbf{-0.07}}$ $c_2 = (y_3 - y_2) - (2S_2 + S_3)/6 = -2.87 - 0.30 = \boxed{\mathbf{-3.17}}$ $d_2 = \boxed{\mathbf{4.66}}$
- ▶ $a_3 = (S_4 - S_3)/6 = \boxed{\mathbf{0.37}}$ $b_3 = S_3/2 = \boxed{\mathbf{1.04}}$ $c_3 = (y_4 - y_3) - (2S_3 + S_4)/6 = -0.79 - 1.41 = \boxed{\mathbf{-2.20}}$ $d_3 = \boxed{\mathbf{1.79}}$

Conduisant au système des trois équations suivantes:

$$\begin{cases} Q_1(x) = 0.37\,x^3 - 1.18\,x^2 - 1.92\,x + 7.39 & x \in [0.0 \;\; 1.0] \\ Q_2(x) = 0.37\,(x-1)^3 - 0.07\,(x-1)^2 - 3.17\,(x-1) + 4.66 & x \in [1.0 \;\; 2.0] \\ Q_3(x) = 0.37\,(x-2)^3 + 1.04\,(x-2)^2 - 2.20\,(x-2) + 1.79 & x \in [2.0 \;\; 3.0] \end{cases}$$

<17 pts>

Nota: Une façon rapide de voir que l'on ne sait pas trompé consiste à vérifier que ses trois courbes sont continues en chaque point (et vérifier aussi qu'il y a une continuité de la dérivée première et seconde). Par exemple, pour vérifier rapidement que la première courbe est bonne, essayons de constater que cette courbe est bien rattaché à la deuxième: $Q_1(x=1) = 7.39 - 1.92 - 1.18 + 0.37 = 4.66 = Q_2(x=1)$, oui !, etc.

On ne vous le demandait pas dans cet examen, mais pour le plaisir et pour compléter cet examen, calculons la dérivé de la courbe spline obtenue en $x = 1$, c-a-d; $y'(x_2 = 1)$. Pour cela, cf. cours chap.5 p.54, $y'(x_2 = 1)$ est simplement estimé par le paramètre c_2 de la deuxième courbe spline ($x \in [1.00 \;\; 2.00]$), c-a-d; $c_2 \approx \mathbf{-3.17}$. qui est **identique** à ce qu'on trouve lorsqu'on dérive le polynôme de collocation de degré 3 (utilisant les 4 points de notre tableau de données) (et établi en Question II.3).

En fait cette spline naturelle de type 3 **est** dans note cas le polynôme de collocation de degré 3. Je ne vous le demandais pas mais toutes ces trois courbes; $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ et $Q_3(x)$ sont identiques ! $Q_1(x)=Q_2(x)=Q_3(x)$). et est égale à l'équation de la courbe demandée à l'exercice II.3 (qui est aussi le polynôme de collocation de degré 3 passant par les 4 points de notre tableau de données.) On a donc:

$$Q_1(x) = 0.37\,x^3 - 1.18\,x^2 - 1.92\,x + 7.39 = Q_2(x) = Q_3(x) = P_3(x) \quad \text{[de la question II.3]}$$

. Pourquoi une spline cubique naturelle de type 3 et un polynôme de collocation de degré trois passant par les mêmes quatre points sont équivalents ?
Pour expliquer plus en détail, une spline cubique est un polynôme de degré trois qui est défini par morceaux. Dans le cas d'une spline cubique naturelle, les secondes dérivées aux extrémités de l'intervalle sont nulles. Alors qu'un polynôme de collocation de degré trois est un polynôme unique de degré trois qui passe par quatre points donnés.
Donc, si vous avez quatre points et que vous construisez à la fois une spline cubique naturelle de type 3 et un polynôme de collocation de degré trois, les deux courbes seront les mêmes car elles sont toutes deux définies par les mêmes quatre points [*car il n'existe qu'un seul polynôme de degré trois passant par ces quatre points*]. Cependant, il est important de noter que cela est vrai seulement pour ces quatre points. Si vous ajoutez un cinquième point, la spline cubique et le polynôme de collocation ne seront plus les mêmes. La spline cubique sera une nouvelle courbe cubique entre le quatrième et le cinquième point, tandis que le polynôme de collocation sera un nouveau polynôme de degré quatre qui passe par les cinq points.

2.

On pourrait intégrer analytiquement sur ces trois courbes $Q_i(x)$ (respectivement sur $[0\ \ 1]$, $[1\ \ 2]$ et $[2\ \ 3]$) pour calculer l'aire sous la courbe passant par ces quatre points. On peut utiliser aussi, et cela est plus simple, directement la formule du cours (cf. slide #55 du chap. 5 avec tous les $h_i=1$ dans notre exemple):

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x)\,dx &= \frac{h^4}{4}\sum_{i=1}^{3} a_i + \frac{h^3}{3}\sum_{i=1}^{3} b_i + \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{3} c_i + h\sum_{i=1}^{3} d_i \;=\; \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} a_i + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} b_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} c_i + \sum_{i=1}^{3} d_i \\
&= \frac{1}{4}(0.37 \times 3) + \frac{1}{3}(-1.18 - 0.07 + 1.04) + \frac{1}{2}(-1.92 - 3.17 - 2.20) + (7.39 + 4.66 + 1.79) \\
&= (0.2775) + (-0.07) + (-3.645) + (13.84) \\
&\approx \boxed{\mathbf{10.4025}}
\end{aligned}$$

<6 pts>

Nota: En fait, je ne vous le demandais pas mais puisque la spline naturelle de type 3 **est** dans notre cas aussi le polynôme de collocation de degré 3 et que:

$$Q_1(x) = 0.37\,x^3 - 1.18\,x^2 - 1.92\,x + 7.39 = Q_2(x) = Q_3(x) = P_3(x) \quad \text{[de la question II.3]},$$

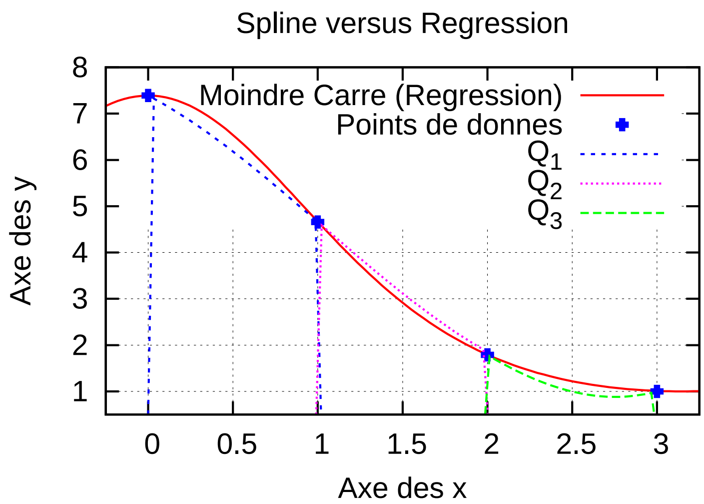
le résultat obtenu est égale à l'intégration analytique de la courbe $Q_1(x)$ entre les bornes 0 et 3:

$$I = \int_0^3 [0.37x^3 - 1.18x^2 - 1.92x + 7.39]\,dx = \Big[\frac{0.37\,x^4}{4} - \frac{1.18\,x^3}{3} - \frac{1.92\,x^2}{2}x^2 + 7.39\,x\Big]_0^3 = \mathbf{10.4025}$$

mais est égale à l'aire sous le polynôme de collocation d'ordre 3 passant par les 4 points de notre tableau de données mais est donc **AUSSI ÉGALE** donc au résultat numérique de la méthode de Simpson 3/8 donnée à la question III.1, c-à-d;

$$\hat{I}_{\text{Simpson }(1/3)} \approx \mathbf{10.4025}$$

Nota -2-: Pour info, voici le graphique de ces trois courbes constituant notre spline cubique de type 3:



Nota -3- : Il n'y a pas de forme analytique concise pour exprimer la vraie valeur analytique de notre intégrale:

$$I = \int_0^3 \exp\big(1 + \cos(x)\big)\ dx = \exp(1) \cdot \int_0^3 \exp\big(\cos(x)\big)\ dx$$

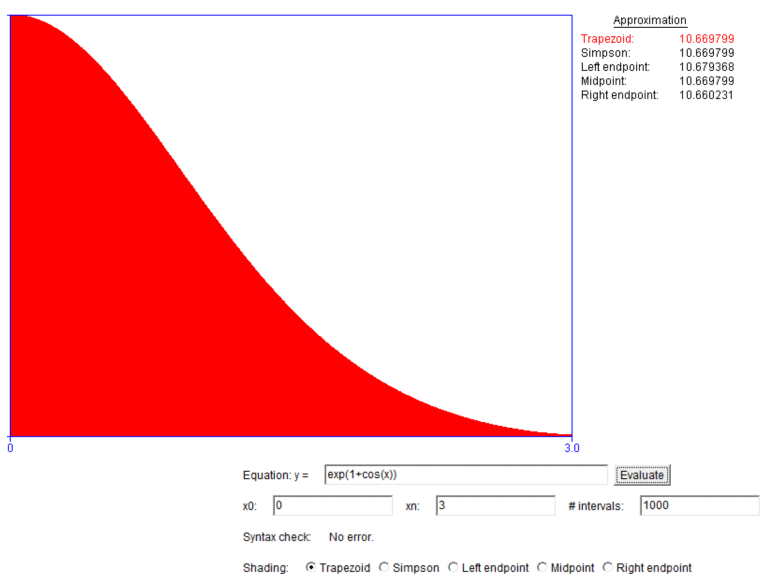
La seule façon est d'étendre en série de Taylor l'exponentiel et d'écrire:

$$I = \exp(1) \cdot \int_0^3 \exp\big(\cos(x)\big)\, dx = \exp(1) \cdot \Big(\int_0^3 1 + \cos(x) + \frac{\cos^2(x)}{2!} + \frac{\cos^3(x)}{3!} + \dots\Big)\, dx$$

$$= \exp(1) \cdot \Big(x + \sin(x) + \int_0^3 \frac{\cos^2(x)}{2!}\, dx + \int_0^3 \frac{\cos^3(x)}{3!}\, dx + \dots\Big)$$

et on peut trouver ensuite, tout seul ou sur le Web, une forme analytique concise pour chaque terme $\int \frac{\cos^n(x)}{n!}\, dx$ de cette série.

En utilisant l'applet qui se trouve sur la page Web du cours, on trouve $I = 10.669799$ pour la méthode du trapèze avec 1000 intervalles (et 6 chiffres après la virgule qui restent stables pour plus d'intervalles).



Nota -FINAL-

Résumons un peu ce qui a été obtenu dans ces exercices.

∘ Si on utilise les données brutes, bruités, on obtiendrait en utilisant les formules numériques possibles (ordre 1 et 2) [provenant de la dérivée analytique du polynôme de collocation passant par ces (3 ou 4) points (bruités), respectivement (de la moins précise à la plus précise): $y'(x_2 = 1) \approx \mathbf{-2.87}, \mathbf{-2.80}, \mathbf{-3.91}$ pour respectivement la formule d'ordre 1 la plus simple et la formule centrée et non centrée provenant du polynôme de collocation utilisant trois et quatre points.

∘ Si on utilise l'*a priori* que las données sont répartis selon une courbe spline, on trouve $y'(x_2 = 1) \approx \mathbf{-3.17}$

∘ Si on utilise la stratégie qui utilise une information *a priori* (celle que les N données expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, sont physiquement réparties selon la loi $y(x) = \exp\big(1 + \cos(x)\big)$, on trouve $y'_2 \approx \mathbf{-3.93}$.

Bien sur, si on sait que les données sont répartis selon la loi $y(x) = \exp\big(1 + \cos(x)\big)$, alors cette dernière estimation est la meilleure mais si on n'en sait rien alors on sait seulement que $y'(x_2 = 1) \in [\mathbf{-3.17}\ \ \mathbf{-3.93}]$.

• Pour l'intégration numérique, cela est pareil mais avec un *range* d'incertitude moins grand (du au fait que l'intégration numérique est un processus numérique beaucoup plus stable que la dérivation numérique). Si on utilise un polynôme de collocation de degré 3 qui passe par les 4 points du tableau, on trouve dessous une surface égale à $I \approx \mathbf{10.4025}$. En utilisant la quadrature Gaussienne avec deux termes; $I \approx \mathbf{11.12}$ et si on utilise une spline naturelle de type 3, alors; $I \approx \mathbf{10.4025}$. Ce qui est normal puisque la spline naturelle de type 3 est aussi le polynôme de collocation de degré 3. Bien sûr, l'estimation la plus précise reste 10.67 (cf. Note -3- de la question IV.2 [cf. plus haut]), qui reste une approximation car on utilise une estimation au moindre carré des paramètres de la distribution des données *a priori* avec des données bruitées.

En résumé, on voit dans ces exercices que le choix de son interpolation est importante. Suivant que l'on choisit, la régression, la méthode du polynôme de collocation, la spline cubique, etc. les résultats de l'interpolation mais aussi ceux de l'estimation numérique de la dérivé en un point ou de l'estimation de l'intégration numérique restent assez différents.

J'ajouterais que dans ce devoir, il n'y avait pas tant de calcul que ça puisque l'on calculait souvent la même chose mais de différentes façons, et surtout on avait de multiples indices pour s'auto-corriger et vérifier que l'on ne s'était pas trompé ! et de plusieurs façons différentes (comme nous l'avons noté dans les différents NOTAs de cette correction).