DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http: //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail: mignotte@iro.umontreal.ca

date: *23/04/2025*

I	Moindres Carrés (45 pts)
II	Interpolation & Dérivation Numérique (32 pts)
III	Spline cubique (14 pts)
IV	Système d'Équations Différentielles (19 pts)
Total	110 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (45 pts)

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, que l'on sait être physiquement distribuées selon la fonction ou le modèle de répartition théorique suivant:

$$y\,(x) = \ln\!\big(\alpha + \beta \sin^2(x)\big) \tag{1}$$

avec les paramètres $[\alpha, \beta]$ qui sont respectivement les paramètres de cette fonction de répartition.
Le but de cet exercice est maintenant de chercher à estimer les paramètres $[\alpha, \beta]$ de cette fonction de répartition (Eq. (1)) qui s'ajustent le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées, à partir du tableau de $N = 4$ données suivant:

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	0.40	1.20	1.30	0.44

1. **Régression**

   (a) Estimer (avec deux chiffres significatifs après la virgule) les coefficients α et β de cette fonction de répartition au sens des moindres carrés en utilisant le changement de variable nécessaire permettant de se ramener à un simple problème d'ajustement d'une **droite** de régression *(linéaire)* sur les données *après avoir linéarisé l'expression: sin*^{2}*(x)*.
   $<$**20 pts**$>$

   (b) En utilisant cette régression, donner une estimation de l'erreur absolue moyenne qui entache les données.
   $<$**5 pts**$>$

   (c) Estimer maintenant (avec toujours deux chiffres significatifs après la virgule) les coefficients α et β de cette fonction de répartition au sens des moindres carrés en utilisant le changement de variable nécessaire permettant de se ramener à un problème d'ajustement *(linéaire)* d'une **courbe quadratique** de régression (*polynôme d'ordre deux*) sur les données.
   $<$**15 pts**$>$

   (d) Si on considérait directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[\alpha, \beta]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidu $R(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} [\ln(\alpha + \beta \sin^2 x_i) - y_i]^2$, (c'est-à-dire une régression non linéaire). **Je ne vous demande pas de donner ce système d'équations (non-linéaires)** mais de me dire si les estimations des paramètres $[\alpha, \beta]$ que l'on obtiendrait (*i.e.*; les solutions de ce système d'équations) donneraient exactement les mêmes estimations des coefficients α et β (aux erreurs numériques près) que celles données aux question (a) et (c) ? Justifier bien votre réponse.
   $<$**5 pts**$>$

Réponse

1.(a)

$y(x)$ s'écrit, *après linéarisation de sin*^{2}*(x)*:

$$y\,(x) = \ln\!\big(\alpha + \beta \sin^2(x)\big) = \ln\!\Big(\alpha + \beta \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{2}\Big)$$

Re-exprimons maintenant cette Équation (Eq. (1)) avec le changement de variables suivant:

$$\underbrace{\exp\big(y(x)\big)}_{Y} \;=\; \underbrace{(\alpha+\frac{\beta}{2})}_{b} + \underbrace{\Big(-\frac{\beta}{2}\Big)}_{a}\underbrace{\cos(2x)}_{X}$$
$$Y \;=\; b\,+\,aX$$

On obtient donc, après le changement de variables; $Y=\exp\big(y(x)\big)$ et $X=\cos(2x)$, un simple problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données:

X_i	1.000	-0.416	-0.654	0.960
Y_i	1.492	3.320	3.669	1.553

sur la droite $Y=aX+b$, avec $a=(-\beta/2)$ et $b=(\alpha+\beta/2)$, et avec (a,b), les paramètres de cette régression linéaire, solutions des équations normales ou du système matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i \\ \sum_{i=1}^N X_i & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N X_i\,Y_i \\ \sum_{i=1}^N Y_i \end{pmatrix}$$

conduisant au système d'équations linéaires suivantes:

$$\begin{pmatrix} 2.5224 & 0.8900 \\ 0.8900 & 4.0000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7978 \\ 10.034 \end{pmatrix}$$

Par une opération élémentaire; $R_2=R_2-\frac{0.8900}{2.5224}R_1=R_2-0.03528\,R_1$, on obtient immédiatement:

$$\begin{pmatrix} 2.5224 & 0.8900 \\ 0 & 3.6860 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7978 \\ 10.3155 \end{pmatrix}$$

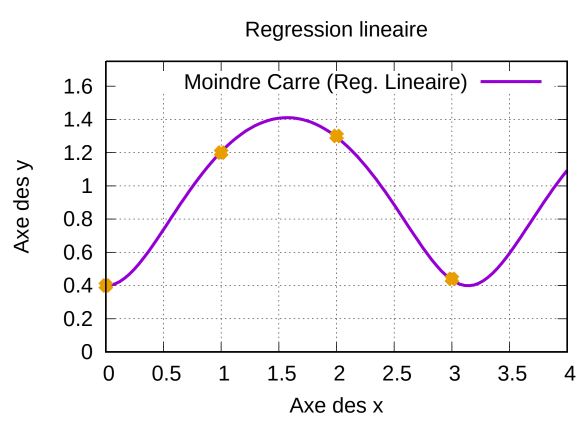
Ce qui nous permet d'obtenir, $b\approx 2.7986$, puis, $2.5224\,a+(0.8900\times 2.7986)=-0.7978$, *i.e.*; $a\approx -1.3034$ et donc $\boxed{\beta\approx 2.61}$ et $\boxed{\alpha\approx 1.49}$ en recadrant notre estimation, avec deux chiffres après la virgule, tel qu'il est demandé dans l'énoncé.

<20 pts>

Notation: 5 points pour le changement de variables, 5 point pour le bon tableau, 5 pour la bonne matrice et 5 points pour l'estimation finale.

Nota -0- : Pour ceux qui sont allergiques à cette triangulation supérieure de (simple) matrice 2×2, on peut bien sur utiliser la formule: $a=\frac{N(\sum_{i=1}^N X_iY_i)-(\sum_{i=1}^N X_i)(\sum_{i=1}^N Y_i)}{N(\sum_{i=1}^N X_i^2)-(\sum_{i=1}^N X_i)^2}$ et $b=\frac{1}{N}(\sum_{i=1}^N Y_i)-\frac{a}{N}(\sum_{i=1}^N X_i)$ qui donnent la même chose (au prix de la mémorisation de cette formule...)

Nota -1- : On peut remarquer, avec les paramètres trouvés, la régression linéaire de notre exemple s'ajuste presque parfaitement aux points de données, qui dans ce cas ne semblent être pas très bruitées (cf. question 1.(b).)



Nota -2- : Une variante de la réponse précédente, et n'utilisant pas les équation normales (mais en les retrouvant implicitement) consistait à dire que le tableau $[X_i, X_i]$ des $N=4$ points de données $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{N}$ ci-dessus nous permet d'écrire le système suivant (à un bruit prêt entachant les données):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ X_3 & 1 \\ X_4 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}}_{b} \triangleright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.416 & 1 \\ -0.654 & 1 \\ 0.960 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.492 \\ 3.320 \\ 3.669 \\ 1.553 \end{pmatrix}}_{b} \triangleright \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} 1.492 \\ 3.320 \\ 3.669 \\ 1.553 \end{pmatrix} \triangleright \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3034 \\ -0.798 \end{pmatrix}$$

Et cette méthode correspond à poser indirectement $X = \sin^2(x)$ pour lequel je vous demandais de linéariser.

Nota -3-: Si on avait pas linéarisé $\sin^2(x)$, (**tel que demandé dans l'énoncé**), on aurait écrit $y\,(x) = \ln\big(\alpha + \beta \sin^2(x)\big)$ avec le changement de variables $X = \sin^2(x)$ pour toujours un problème d'ajustement d'une droite de régression linéaire et dans ce cas, on aurait obtenu, pour $Y = \exp\big(y(x)\big)$ et $X = \sin^2(x)$, avec:

X_i	0.000	0.7081	0.8268	0.0199
Y_i	1.4918	3.3201	3.6693	1.5527

sur $Y = aX + b$, avec $a = \beta$ et $b = \alpha$, et avec (a, b), solutions de:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i\, Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1.1854 & 1.5548 \\ 1.5548 & 4.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5.4156 \\ 10.034 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1.1854 & 1.5548 \\ 0 & 1.9607 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5.4156 \\ 2.9309 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Permettant d'obtenir; $b = \boxed{\alpha \approx 1.495}$, puis; $1.1854\,\beta + 1.5548 \times 1.495 = 5.4156$ donc $a = \boxed{\beta \approx 2.608}$ qui sont les mêmes estimations que précédemment (aux erreurs numériques près) ce qui est normale puisqu'on minimise la même chose (les moindres carrés)..

Notation $\triangleright$: 18/20 si juste pour les méthodes du Nota-2- et Nota -3- ci-dessus (dans lesquels aucune linéarisation de $(\sin x)$ [demandé dans l'énoncé] était faite).

1.(b)

Avec ce modèle de régression linéaire, les données s'écrivent:

$$\begin{aligned}
y\,(0.0) &= \ln\big(1.49 + 2.61 \sin^2(0)\big) \approx 0.398776 \neq 0.40 \\
y\,(1.0) &= \ln\big(1.49 + 2.61 \sin^2(1)\big) \approx 1.205393 \neq 1.20 \\
y\,(2.0) &= \ln\big(1.49 + 2.61 \sin^2(2)\big) \approx 1.294180 \neq 1.30 \\
y\,(3.0) &= \ln\big(1.49 + 2.61 \sin^2(3)\big) \approx 0.433065 \neq 0.44
\end{aligned}$$

Soit une moyenne d'erreur absolue de $0.004843 < 0.5 \times 10^{-3}$ soit des mesures données avec (*en moyenne*) le millième comme chiffre significatif exact (données peu bruitées).

<5 pts>

Nota: Si on prend la valeur d'erreur la plus élevé (et non pas la moyenne), on trouve le même résultat et je compte le raisonnement comme bon aussi.

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$

Re-exprimons maintenant directement l'Équation (Eq. (1)) avec le changement de variables suivant:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\exp\big(y(x)\big)}_{Y} &= \underbrace{\alpha}_{b} + \underbrace{\beta}_{a} \underbrace{\sin^2(x)}_{\text{Soit } X=\sin(x)} \\
Y &= b + aX^2
\end{aligned}$$

On obtient donc, après le changement de variables; $Y\!=\!\exp\big(y(x)\big)$ et $X\!=\!\sin(x)$, un problème d'ajustement (ou régression) des données:

X_i	0.000	0.8415	0.9093	0.1411
Y_i	1.4918	3.3201	3.6693	1.5527

sur la quadratique $Y = aX^2 + b$, avec $a=\beta$ et $b=\alpha$, et avec (a,b), les paramètres de cette régression, solutions des équations normales ou du système matriciel suivant (en s'inspirant beaucoup du Slide 87 du Chapitre 4 du cours):

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N X_i^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N Y_i \\ \sum_{i=1}^N X_i^2\, Y_i \end{pmatrix}$$

conduisant au système d'équations linéaires suivantes:

$$\begin{pmatrix} 4.0000 & 1.5549 \\ 1.5549 & 1.1855 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0339 \\ 5.41551 \end{pmatrix}$$

Par une opération élémentaire; $R_2 = R_2 - \frac{1.5549}{4.0000} R_1 = R_2 - 0.388725\, R_1$, on obtient immédiatement:

$$\begin{pmatrix} 4.0000 & 1.5549 \\ 0 & 0.5811 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0339 \\ 1.5151 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $a \approx 2.61$, puis $4\,b + (1.5549 \times 2.61) = 10.0339$, *i.e.*; $b \approx 1.49$ et donc $\boxed{\alpha \approx 1.49}$ et $\boxed{\beta \approx 2.61}$ en recadrant notre estimation, avec deux chiffres après la virgule, tel qu'il est demandé dans l'énoncé.

<15 pts>

Notation ▷: 3 points pour le changement de variables, 3 points pour le tableau, 3 points pour la matrice théorique a résoudre, 3 point pour la matrice numérique a résoudre, 3 points pour l'estimation des paramètres.

Nota: Aux erreurs numériques près, ces deux méthodes conduiront aux deux mêmes estimations des paramètres α et β, au sens des moindres carrés, car le résidu est en fait le même (régression linéaire). Avec une précision maximale en numérotation flottante, on devrait trouver pour la question (a) et (c) ; $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \approx (1.494701\,,\, 2.608143)$.
On peut constater que la première méthode nous donne des estimations légèrement plus précises (si on prend en compte trois chiffres après la virgule). C'est normal, la deuxième méthode est obligé d'utiliser des $(\sum_{i=1}^N X_i^4)$ qui engendrent un petit peu plus d'erreurs numériques.

Nota: Matriciellement, cela est équivalent à (avec $Y_i\!=\!\exp(y_i)$ et $X_i\!=\!\sin(x_i)$):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & X_1^2 \\ 1 & X_2^2 \\ 1 & X_3^2 \\ 1 & X_4^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}}_{b} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} \quad \triangleright \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.49 \\ 2.61 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{1.(d)}}$

Le modèle de répartition est certes identique mais comme le résidu est différent dans le cas de la question (a) et (c), l'estimation des paramètres α et β, au sens des moindres carrés, utilisant ces deux changements de variables différents, seront donc forcément différents.
<5 pts>

Nota -1-: Tous changement de variables se fait au prix d'une modification de la structure des erreurs. En effet, tout changement de variables différent entraîne une modification des différents termes du résidu ou une modification de poids de chaque couple (x_i, y_i) dans la somme des carrées des résidus. Ainsi le résidu dans ce cas (*versus* celui de la question (a) et(c)) est différent, bien que le critère de régression (les moindre carrés) soit identique dans les deux cas. Comparativement à une régression linéaire, la présence d'une non-linéarité (dans la régression) donne indirectement plus de poids à certaines données.
Cependant, comme les données sont ici peu bruitées, cela donnerait des estimations tout de même assez proches.

Nota -2-: On aurait aussi pu écrire $y\,(x) = \ln\big(\alpha + \beta \sin^2(x)\big) = \ln\big([\alpha+\beta] - \beta \cos^2(x)\big)$ et faire un changement de variables avec $X = \cos(x)$ pour un problème d'ajustement d'une **courbe quadratique** de régression comme dans la question (c). Dans ce cas, on aurait obtenu les mêmes estimations que celles obtenus à la question (a) et (c) (aux erreurs numériques près). On aurait obtenu, pour $Y = \exp\big(y(x)\big)$ et $X = \cos(x)$:

X_i	1.000	0.5403	−0.4161	−0.9900
Y_i	1.4918	3.3201	3.6693	1.5527

sur $Y = aX^2 + b$, avec $a = -\beta$ et $b = \alpha + \beta$, et avec (a, b), solutions de:

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N X_i^2 \\ \sum_{i=1}^N X_i^2 & \sum_{i=1}^N X_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N Y_i \\ \sum_{i=1}^N X_i^2\, Y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4.0000 & 2.445 \\ 2.445 & 2.0758 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0339 \\ 4.62222 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4.0000 & 1.5549 \\ 0 & 0.5813 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0339 \\ -1.5110 \end{pmatrix}$$

Permettant d'obtenir; $a \approx -2.60$, puis $4\,b + (1.5549 \times 2.61) = 10.0339$, *i.e.*; $b \approx 1.49$ et donc $\boxed{\alpha \approx 1.49}$ et $\boxed{\beta \approx 2.61}$.

Nota -3-:
En conclusion, pour toutes ces quatre méthodes; *i.e.*,

1. Après linéarisation de $\sin^2(x)$, et le changement de variables; $Y = \exp\big(y(x)\big)$ et $X = \cos(2x)$ pour un ajustement sur la droite de régression.
2. Sans linéarisation de $\sin^2(x)$, et le changement de variables; $Y = \exp\big(y(x)\big)$ et $X = \sin^2(2x)$ pour un ajustement sur la droite de régression.
3. Après le changement de variables; $Y = \exp\big(y(x)\big)$ et $X = \sin(x)$, pour un ajustement sur la quadratique de régression .
4. Après l'utilisation de la formule de identité trigonométrique fondamentale $(\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1)$ et le changement de variables; $Y = \exp\big(y(x)\big)$ et $X = \cos(x)$ pour un ajustement sur la courbe quadratique de régression.

On obtient la même estimation (régression linéaire) aux erreurs numériques près, bien sûr. **Question**: laquelle méthode, selon vous, donnera le moins d'erreurs numériques de calculs ?. **Réponse**: celle qui utiliser le moins de non-linéarité (dans l'expression ou le changement de variables ou la courbe de régression), c-à-d la 1.

II. Interpolation & Dérivation Numérique (32 pts)

On va reprendre le tableau de l'exercice I (moindre carrés):

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	0.40	1.20	1.30	0.44

1. On désire trouver le polynôme P_2 de collocation d'ordre 2 qui permette d'interpoler au mieux $y(x = 2.5)$. Trouver ce polynôme de collocation avec la méthode de Newton-Grégory et donner ensuite une estimation de $y(x = 2.5)$. Justifier bien les points que vous utiliserez.
   <8 pts>
2. Donner une estimation de l'erreur (la plus précise possible) de vos estimations de $y(x = 2.5)$, **en utilisant seulement ce tableau de données**, et préciser ainsi le nombre de chiffres significatifs que vous avez faîtes précédemment dans l'estimation de $y(x = 2.5)$ avec P_2.
   <8 pts>
3. Trouver le polynôme P_3 de collocation d'ordre 3 utilisant le tableau des 4 points de données et utiliser ce résultat pour donner ensuite une nouvelle estimation de $y(x = 2.5)$.
   <8 pts>
4. Trouver une estimation de $y'(x = 2.5)$ de deux façons **différentes**.
   <8 pts>

Réponse

1.

Afin de minimiser les erreurs de collocation, on va donc prendre trois points (nécessaires pour un polynôme d'ordre 2) centrés autour de l'estimation demandée $y(x = 2.5)$; c'est-à-dire les points d'abscisse $[x_1 = 1.00 : x_2 = 2.00 : x_3 = 3.00]$.

Méthode de Newton-Grégory :

Table des différences ▷

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1.00	1.20		
		0.10	
2.00	1.30		-0.96
		-0.86	
3.00	0.44		

Donc le polynôme: $P_2(x) = 1.20 + 0.10\,s - 0.96\,s(s-1)/2$ avec $s = (x-1)/1$, *i.e.*, le polynôme: $P_2(x) = 1.2 + 0.1(x-1) - 0.48(x-1)(x-2)$.

Pour une interpolation en $x = 2.5$, on a $s = 1.5$ et donc:
Interpolation en $x = 2.5$ ▷ $P_2(x = 2.5) = (1.20) + (0.10 \times 1.5) - (0.96 \times 1.5 \times 0.5/2)$ $\boxed{= \mathbf{0.99}}$
<8 pts>

2.

On va devoir compléter la table des différences avec tous nos (4) points de données.

Table des différences ▷

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.00	0.40			
		0.80		
1.00	1.20		-0.70	
		0.10		-0.26
2.00	1.30		-0.96	
		-0.86		
3.00	0.44			

Une approximation de l'erreur (en $x\!=\!2.5$) est donnée par $E_2(x) = \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\,(-0.26)$ avec toujours $s\!=\!1.5$, donc $E_2(x) = (1.5\times 0.5\times -0.5/6)\times(-0.26) = -0.01625$. Une bonne approximation de l'erreur absolue faîte sur $P_2(x=2.5)$ est donc de $\boxed{\mathbf{0.01625}}$. Puisque $0.01625 < 0.5\times 10^{-1}$, le nombre des dixième est donc un chiffre significatif dans l'estimation de $P_2(x\!=\!2.5)$, *i.e.*, **1 chiffre significatif après la virgule** (ou deux cse en tout), soit $P_2(x=2.5) = \underline{\mathbf{0.99}}$ (en conséquence, il serait aussi correcte de noter cette estimation par $\underline{1.0}$, après un arrondissement approprié, pour conserver 1 cse après la virgule).
<8 pts>

Nota -1-: Vérifions que cette erreur d'estimation est moins grande que celle que l'on aurait eu si on avait pris initialement les trois mauvais points pour estimer $P_2(x\!=\!2.5)$. La table des différences est celle donnée plus haut mais on a le polynôme: $P_2(x) = 0.40 + 0.80\,s - 0.70\,s(s-1)/2$ avec $s = (x-0)/1 = x$. Pour une interpolation en $x\!=\!2.5$, on a $s\!=\!2.5$ et donc: $P_2(x\!=\!2.5) = (0.40) + (0.80\times 2.5) - (0.70\times 2.5\times 1.5/2) = 1.0875$ avec une erreur de: $E_2(x) = \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\cdot(-0.26) = (2.5\times 1.5\times 0.5/6)\cdot(-0.26) = -0.08125$ (*qui est, en absolue, 5 fois supérieure, à l'erreur précédente*).

Nota -2-: Vérifions qu'avec la méthode de Newton-Grégory **ascendante** (et non plus *descendante* comme celle donnée en Question 1.), cela donne la même chose. La table des différences est celle donnée plus haut mais on a le polynôme: $P_2(x) = 0.44 - 0.86\,s - 0.96\,s(s+1)/2$ avec $s = (x-3.0)/1$. Pour une interpolation en $x\!=\!2.5$, on a: $s = -0.5$ et donc: $P_2(x\!=\!2.5) = (0.44) - (0.86\times -0.5) - 0.96\times(-0.5\times 0.5/2) = 0.99$ [*même estimation; ce qui est normale*] et estimons maintenant l'erreur: $E_2(x) = \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\cdot(-0.25)$ avec toujours $s = -0.5$; ce qui donne $E_2(x=2.5) = (-0.5\times 0.5\times 1.5/6)\cdot(-0.26) = 0.01625$ (*même estimation; ce qui est normale*).

$\boxed{\mathbf{3.}}$

En utilisant le Tableau des différences de la Question 2., on obtient le polynôme:

$$P_3(x) = 0.40 + 0.80\,s - 0.70\,s(s-1)/2 - 0.26s(s-1)(s-2)/6 \quad \text{avec } s = (x-0)/1 = x.$$

i.e., le polynôme: ▷ $P_3(x) = 0.40 + 0.80\,x - 0.35\,x(x-1) - (0.04\overline{3})x(x-1)(x-2)$

Pour une interpolation en $x\!=\!2.5$, on a $s\!=\!2.5$ et donc: Interpolation en $x\!=\!2.5$

▷ $P_3(x\!=\!2.5) = (0.40) + (0.80\times 2.5) - (0.70\times 2.5\times 1.5/2) - (0.04\overline{3})\times 2.5\times 1.5\times 0.5$

$=$ 0.40 + 2 - 1.3125 - 0.08125 $\boxed{=\mathbf{1.00625}}$ (que l'on peut écrire aussi 1.01 si on conserve 1 cse après la virgule et le deuxième après la virgule étant arrondi).
<8 pts>

$\boxed{\mathbf{4.}}$

- En calculant $P_3'(x=2.5)$:

$$P_3'(x) = (1/8)x^2 - 0.95x + 1.23\overline{6} \;\triangleright\; P_3'(x=2.5) = (1/8)x^2 - 0.95x + 1.23\overline{6} = \boxed{-0.82583}$$

- En calculant numériquement avec la formule centrée: ▷ $P_3'(x=2.5) = \frac{y(3)-y(2)}{2h} = \frac{0.44-1.30}{1} = \boxed{-0.86}$

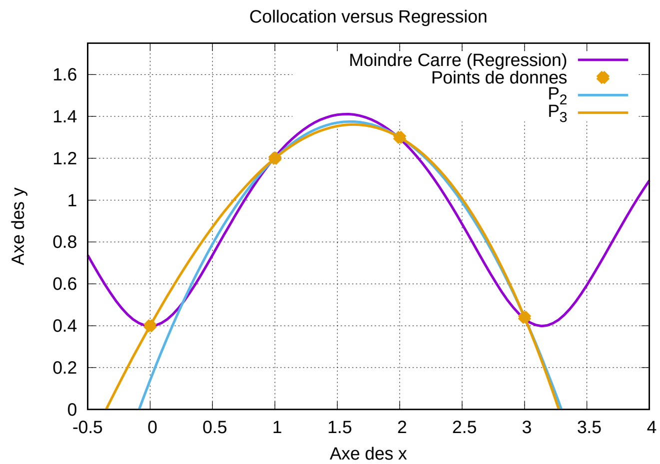
<8 pts>

Notation ▷: Je comptais juste si on avait dérivé le polynôme de collocation d'ordre 2 (on obtenais -0.86) et non pas, tel que demandé, le polynôme de collocation d'ordre 3 qui donnait une valeur d'estimation plus précise.

Nota -1-: Je ne vous le demandais pas, mais si on simplifiait l'expression, on trouvait:

$$P_3(x) = -0.0\overline{3}x^3 - 0.221x^2 - 1.06\overline{3}x + 0.40$$

Nota -2-: On affiche sur le graphique suivant; les points de données, la régression et le polynôme de collocation d'ordre 2 et 3.



III. Splines (14 pts)

On va reprendre le tableau de l'exercice I:

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
$y_i = y(x_i)$	0.40	1.20	1.30	0.44

1. **Interpolation**

   Donner l'équation de la spline cubique **de type 2** passant par ces points de données.
   <14 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

On va devoir tout d'abord estimer S_2 et S_3, les dérivés seconde au deuxième et troisième point. On va ainsi se trouver avec un système de deux équations à deux inconnus dont la première et deuxième équation conduisent, dans le cas de la spline cubique de type 2 (cf. cours; slide #50 du chap. 4), au système matriciel suivant (tous les $h_i = 1$):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6[(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)] \\ 6[(y_4 - y_3) - (y_3 - y_2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.2 \\ -5.76 \end{pmatrix}$$

Par une opération élémentaire; $R_2 = R_2 - \frac{1}{5}R_1 = R_2 - 0.2\,R_1$, on obtient immédiatement:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.2 \\ -4.92 \end{pmatrix}$$

Conduisant immédiatement à $\mathbf{S_3} = -\mathbf{1.025}$ et $\mathbf{S_2} = -\mathbf{0.635}$.
La spline étant cubique de type 2 ▶ On a ensuite: $S_1 = S_2 = -0.635$ et $S_4 = S_3 = -1.025$

(cf. cours, slide 51).

Du coup, on trouve immédiatement (cf. cours, slide #45, chap. 4) avec tous les $h_i = 1$ dans notre cas et aussi: $\mathbf{d_i = y_i}, (\forall \mathbf{i})$ et $\mathbf{b_1 = b_2}$ (car $S_1 = S_2$: spline de type 2):

- $a_1 = (S_2 - S_1)/6 = \boxed{\mathbf{0.000}}$ $b_1 = S_1/2 = \boxed{\mathbf{-0.3175}}$ $c_1 = (y_2 - y_1) - (2S_1 + S_2)/6 = \boxed{\mathbf{1.1175}}$ $d_1 = \boxed{\mathbf{0.40}}$
- $a_2 = (S_3 - S_2)/6 = \boxed{\mathbf{-0.065}}$ $b_2 = S_2/2 = \boxed{\mathbf{-0.3175}}$ $c_2 = (y_3 - y_2) - (2S_2 + S_3)/6 = \boxed{\mathbf{0.4825}}$ $d_2 = \boxed{\mathbf{1.20}}$
- $a_3 = (S_4 - S_3)/6 = \boxed{\mathbf{0.000}}$ $b_3 = S_3/2 = \boxed{\mathbf{-0.5125}}$ $c_3 = (y_4 - y_3) - (2S_3 + S_4)/6 = \boxed{\mathbf{-0.3075}}$ $d_3 = \boxed{\mathbf{1.30}}$

Conduisant au système des trois équations suivantes:

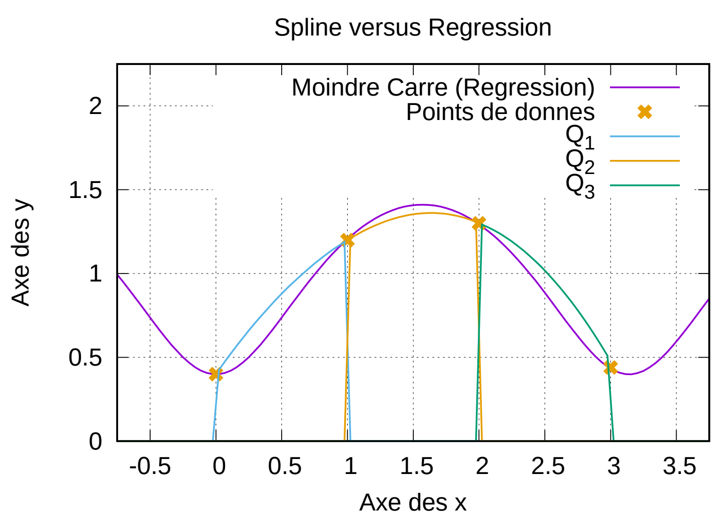
$$\left\{ \begin{array}{lcrl} Q_1(x) & = & -0.3175\, x^2 + 1.1175\, x + 0.40 & x \in [0.0 \;\; 1.0] \\ Q_2(x) & = & -0.065\, (x-1)^3 - 0.3175\, (x-1)^2 + 0.4825\, (x-1) + 1.20 & x \in [1.0 \;\; 2.0] \\ Q_3(x) & = & -0.5125\, (x-2)^2 - 0.3075\, (x-2) + 1.30 & x \in [2.0 \;\; 3.0] \end{array} \right.$$

<14 pts>

Notation ▷: 6 points pour le bon S_2 et S_3, 2 points pour $s_1 = S_2$ et $s_3 = S_4$ (spline type 2) et 6 points pour les $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$.

Nota -1-: On remarque bien le comportement de type 2 de cette spline ou comportement parabolique (ou quadratique) aux extrémités. On vérifie rapidement que la première courbe est connectée à la seconde; $Q_1(x=1) = -0.3175 + 1.1175 + 0.40 = 1.20 = Q_2(x=1)$ ...oui ! et que la seconde est connectée à la troisième; $Q_2(x=2) = -0.065 - 0.3175 + 0.4825 + 1.2 = 1.3 = Q_3(x=2)$ ...oui ! ce qui nous montre que l'on ne sait sans doute pas trompé (il resterait toutefois à vérifier les autres continuités de la spline).

Nota -2-: Pour info, voici le graphique de ces trois courbes constituant notre spline cubique de type 3:



IV. Système d'Équations Différentielles (19 pts)

Soit l'équation différentielle suivante:

$$x'''(t) + (x''(t))^2 \;=\; 0$$

On considérera les conditions initiales $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$. On vous demande de:

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <4 pts>

2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser qu'elle serait le système de relations itératives qui serait obtenu.
   <3 pts>

3. À partir de $x(t=0)=x_0=1.0$, trouver $x(t=0.2)$, $x(t=0.4)$, $x(t=0.6)$ et $x(t=0.8)$ **avec tous les chiffres significatifs**.
   <12 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En posant, $x'(t)=x_p(t)$ et $x_p'(t)=x_{pp}(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x_p(t) \\ x_p'(t) & = & x_{pp}(t) \\ x_{pp}'(t) & = & -\left(x_{pp}(t)\right)^2 \end{array}\right.$$

<3 pts>

Avec les conditions initiales $x(0)=x_p(0)=x_{pp}(0)=1$.

<1 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivantes:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t_{n+1}) & = & x(t_n) + h\, x_p(t_n) \\ x_p(t_{n+1}) & = & x_p(t_n) + h\, x_{pp}(t_n) \\ x_{pp}(t_{n+1}) & = & x_{pp}(t_n) - h\,\big(x_{pp}(t_n)\big)^2 \end{array}\right.$$

<3 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

En se souvenant que la fonction qui nous intéresse (solution de l'équation différentielle) est $x(t)$ et en partant des conditions initiales $x(0)=x_p(0)=x_{pp}(0)=1$, on obtient immédiatement pour $h=0.2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0.2) & = & 1.0 + (0.2 \times 1.0) = \mathbf{1.2} \\ x_p(0.2) & = & 1.0 + (0.2 \times 1.0) = 1.2 \\ x_{pp}(0.2) & = & 1.0 - 0.2\left(1^2\right) = 0.8 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0.4) & = & 1.2 + (0.2 \times 1.2) = \mathbf{1.44} \\ x_p(0.4) & = & 1.2 + (0.2 \times 0.8) = 1.36 \\ x_{pp}(0.4) & = & 0.8 - 0.2\left(0.8^2\right) = 0.672 \end{array}\right.$$

$$\text{et;} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(0.6) & = & 1.44 + (0.2 \times 1.36) = \mathbf{1.712} \\ x_p(0.6) & = & 1.36 + (0.2 \times 0.672) = 1.4944 \\ x_{pp}(0.6) & = & 0.672 - 0.2\left(0.672^2\right) = 0.5816832 \end{array}\right.$$

$$\text{et;} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(0.8) & = & 1.712 + (0.2 \times 1.4944) = \mathbf{2.01088} \\ x_p(0.8) & = & 1.4944 + (0.2 \times 0.672) = 1.6288 \\ x_{pp}(0.8) & = & 0.5816832 - 0.2\left(0.5816832^2\right) = 0.514024043 \end{array}\right.$$

<12 pts>

Nota: $x_p(.)$ et $x_{pp}(.)$ n'étaient pas demandées dans l'énoncé.