DIRO
IFT 2425

INTRODUCTION AUX ALGORITHMES NUMÉRIQUES

ADDENDUM

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

CONDITION DE CONVERGENCE

Méthode de Newton / du point fixe ▶ $x_n = g(x_{n-1})$

L'erreur d'estimation à l'itération n est ▶ $\varepsilon = |x_n - r|$

$$
\begin{aligned}
(x_n - r) &= \frac{g(x_{n-1}) - g(r)}{(x_{n-1} - r)} \, (x_{n-1} - r) \\
&= g'(\xi) \, (x_{n-1} - r)
\end{aligned}
$$

avec $\xi \in J$ (J est un interval contenant $x_0, x_1, \ldots, x_n$)

Si g est continue sur $J = [a, b]$
$\exists\, \xi \in J$ tq $\dfrac{g(b) - g(a)}{(b - a)} = g'(\xi)$

En posant $K = |g'(\xi)|$

$$
\begin{aligned}
|x_n - r| &= K \, |x_{n-1} - r| \\
&= K^2 \, |x_{n-2} - r| \\
&= \ldots \\
&= K^n \, |x_0 - r| \\
&\leq K^n \, (b - a)
\end{aligned}
$$

Convergence si $\lim_{n \to \infty} x_n = r$, cad ssi $|g'(\xi)| < 1$ $(\forall \xi \in J)$
Convergence d'autant plus rapide que $K < 1$

INVERSION DE MATRICE (RÉSUMÉ)

Inversion de la Matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1- Méthode de Cramer

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(cf. Chap. 3 page 5)

2- Élimination de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer A^{-1}, on doit résoudre le système augmenté suivant

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Par élimination de Gauss (sans pivotage)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

On doit résoudre par substitutions arrière les trois systèmes suivants

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Ce qui donne par substitutions arrière

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/9 \\ -1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/9 \\ -1/9 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 2/9 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{3- Gauss Jordan}}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\blacktriangledown$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/9 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{4- Factorisation LU}}$

Élimination de Gauss

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Factorisation directe

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1- Résolution pour

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

en posant $y = Ux$ $\blacktriangleright$

$$\begin{aligned} LUx &= b \\ Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}$$

2- On trouve U^{-1} et L^{-1} (respectivememt par substitution arrière et avant pour chaque vecteur b_i), puis

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

ERREURS D'ARRONDIS (EXEMPLE)

Défaillance du missile US patriote

Le 25/02/1991, durant la guerre du golf, un missile patriote US à Dharan manque un scud Iraquien et frappe une caserne US tuant 28 soldats et blessant une centaine d'autres.

▶ La cause de ce problème fut une erreur d'estimation du temps écoulé depuis la mise en tension de l'ordinateur du missile (100 heures), causée par une simple erreur d'affectation.

Tps de l'horloge interne est mesuré en dizième de secondes puis multiplié par la valeur $1/10 = 1/2^4 + 1/2^5 + 1/2^8 + 1/2^9 + ... = (0.00110011001\ldots)_2$ (stocké dans un registre de 24 bits).

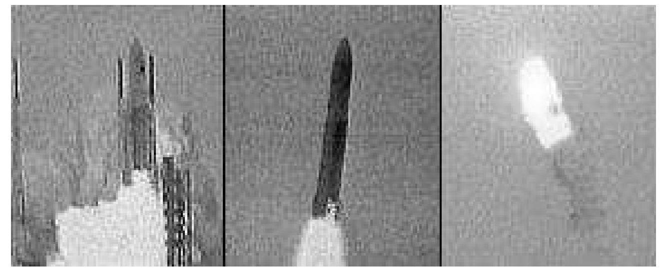
▶ introduit une erreur de $\epsilon = (0. - 23 \times 0 - 11001100...)_2$ ou $(0.000000095)_{10}$. Soit une erreur totale $= \epsilon \times 100 \times 60 \times 60 \times 10 = 0.34$ secondes.

Cf. Page Web du Cours (Rubriques : Interesting Links)

ERREURS D'OVERFLOW (EXEMPLE)

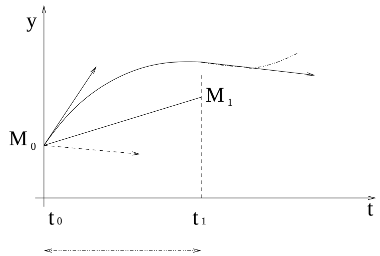
L'explosion de la fusée Ariane 5 juste après son décollage le 04/06/1996 est la conséquence d'un simple overflow.

Explosion d' Ariane 5



▶ La cause de la défaillance venait d'une erreur logicielle dans le sytème de référence inertielle. Plus précisement un nombre flottant de 64 bits (> 32768) lié à la vitesse horizontale de la fusée fut convertit en 16 bits.

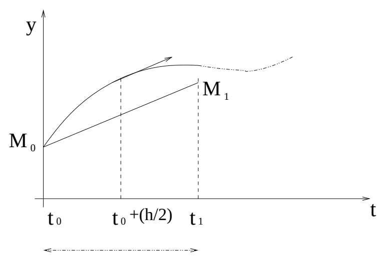
MÉTHODE D'EULER MODIFIÉ



$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[y'_j + y'_{j+1}\right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, y_j) + f(t_j, \tilde{y}_{j+1})\right]. \end{aligned}$$

MÉTHODE DU POINT MILIEU



$$y_{j+1} = y_j + h\left[y'_{j+0.5}\right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1/2} &= y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + h\, f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2}). \end{aligned}$$