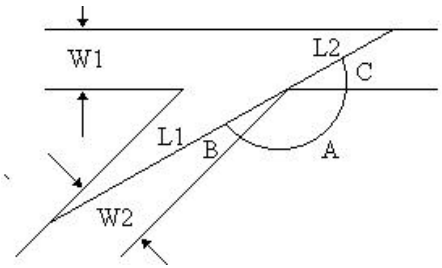
Ift 2421

Chapitre 2

Résolution d'équations non linéaires

Introduction

Description:



$$L_1 = \frac{W_2}{Sin(B)} \quad L_2 = \frac{W_1}{Sin(C)}$$

$$B = \pi - A - C$$

avec $$L = L_1 + L_2 = \frac{W_2}{Sin(B)} + \frac{W_1}{Sin(C)}$$

L est une fonction de C maximum si

$$\frac{dL}{dC} = \frac{W_2 Cos(B)}{Sin^2(B)} - \frac{W_1 Cos(C)}{Sin(C)}$$

$$\frac{dL}{dC} = \frac{W_2 Cos(\pi - A - C)}{Sin^2(\pi - A - C)} - \frac{W_1 Cos(C)}{Sin^2(C)}$$

Méthode de résolution de l'équation scalaire

F(X)=0

On veut évaluer numériquement la (ou les) racines.

G(X) = H(X)
⇔
G(X) - H(X) = 0

Comment est faite la fonction?

Quelles sont ses propriétés?

Sur quel intervalle en X ferons-nous la recherche?

Degré 1:

aX+b =0
X= -b/a

Degré 2:

Solution impossible si le degré du polynôme est supérieur à 4.

Méthode de bissection
(interval-halving method)

Basée sur une alternance de signe de part et d'autre de la racine cherchée pour F(X) = 0

Départ:

X_1 et X_2 telles que
$F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés

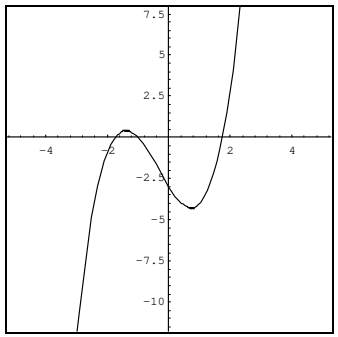
Itérations:

X_3 = centre de [X_1, X_2]

Choisir le bon sous intervalle

Condition suffisante
(de convergence vers une racine):

F est continue sur l'intervalle de recherche [X_1, X_2]

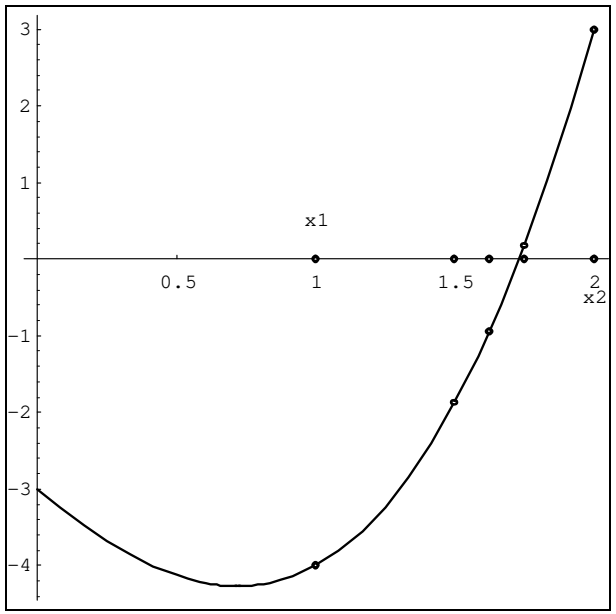


$F(X) = ((X+1)\,X - 3)\,X - 3$

$= X^3 + X^2 - 3\,X - 3$

racine : $-1, -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Méthode de bissection



Algorithme de la méthode de bissection:

Pour déterminer une racine x de F(X), exacte à δ près.
Choisir X_1 et X_2 tels que $F(X_1).F(X_2) \leq 0$
($F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés)

```
Calculer X3 = (X1 + X2)/2;

Tant que { |X1 - X2| ≥ δ et |F(X3)| ≥ ε } faire
    Calculer X3 = (X1 + X2)/2;
    Si { F(X1).F(X3) ≤ 0} alors
        poser X2 = X3;
    Sinon
        poser X1 = X3;
    Fin si
Fin tant
Poser X = X3;
```

Une itération est définie comme un parcours entier de la séquence d'opérations de la boucle Tant.

L'itéré est alors la valeur résultante obtenue après une itération.

Notons l'itéré d'ordre n par $X_{(n)}$.

Au départ, la racine X se trouve dans l'intervalle de confiance $[X_1, X_2]$
L'erreur sur la racine est alors de $\Delta X = |X_1 - X_2|$

Après chaque itération, on divise l'intervalle en 2 on divise cette erreur par 2. Donc **l'erreur absolue** sur l'itéré d'ordre n est

$$\Delta X_{(n)} = \frac{|X_1 - X_2|}{2^n}$$

Méthode de Bissection

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x\,(-3. + x\,(1 + x))$ ou $-3 - 3.\,x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:
x1 = 1.
x2 = 2.
Tolérance sur x: 0.0005
Tolérance sur f(x): 0.00001
Maximum d'itération:100

Itération	x_3	f(x)	$\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$
1	1.5	-1.875	0.5
2	1.75	0.171875	0.25
3	1.625	-0.943359	0.125
4	1.6875	-0.409424	0.0625
5	1.71875	-0.124786	0.03125
6	1.73437	0.0220299	0.015625
7	1.72656	-0.0517554	0.0078125
8	1.73047	-0.0149572	0.00390625
9	1.73242	0.00351267	0.00195312
10	1.73145	-0.0057282	0.000976562
11	**1.73193**	-0.00110924	0.000488281

Tolérance en X trouvée en 11 itérations.

Méthode d'interpolation linéaire

('regula falsi' method)

Basée aussi sur une alternance de signe

Départ:

X_1 et X_2 telles que
$F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés

Itérations:

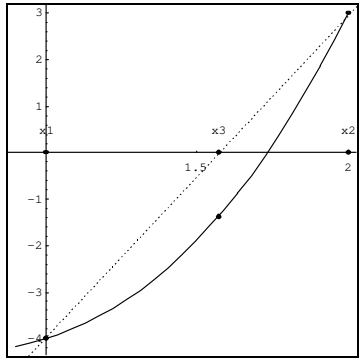
X_3 est l'intersection avec l'axe des x
de la droite passant par

$(X_1,F(X_1))$ et $(X_2,F(X_2))$

choisir le sous intervalle contenant la racine

Condition suffisante
(de convergence vers une racine):

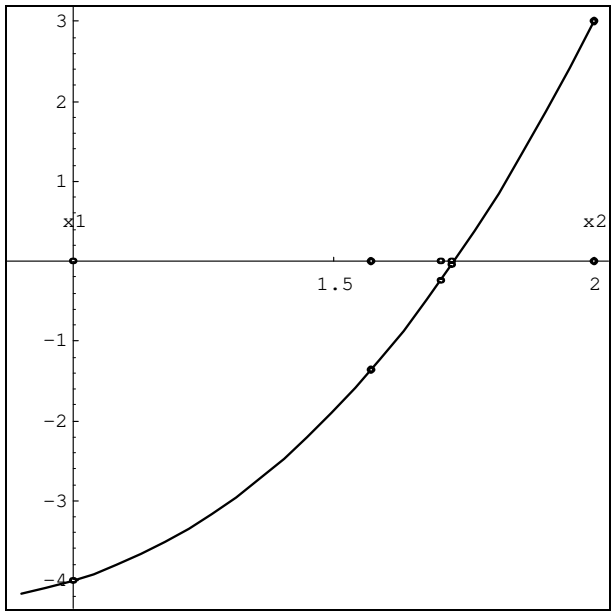
F est continue sur l'intervalle de recherche $[\,X_1, X_2\,]$



Droite parallèles
dans un triangle

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Méthode d'interpolation linéaire



Algorithme de la méthode d'interpolation linéaire:

Pour déterminer une racine x de F(X), exacte à δ près.
Choisir X_1 et X_2 tels que $F(X_1).F(X_2) \leq 0$
($F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont de signes opposés)

```
Calculer X3 = X2 - F(X2)(X2-X1)/(F(X2)-F(X1));

Tant que { |X1 - X2| ≥ δ et |F(X3)| ≥ ε } faire
    Calculer X3 = X2 - F(X2)(X2-X1)/(F(X2)-F(X1));
    Si { F(X1).F(X3) ≤ 0} alors
        poser X2 = X3;
    Sinon
        poser X1 = X3;
    Fin si
Fin tant
Poser X = X3;
```

Mêmes **avantages** que la méthode de bissection:

- Hypothèse faible (continuité) sur F
- Méthode facile à implanter
- Hypothèse de recherche: linéarité

Mêmes **inconvénients** que la méthode de bissection:

- Il faut déterminer un intervalle de départ

- La convergence vers la racine peut être très lente

Méthode d'interpolation linéaire

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x (-3. + x (1 + x))$ ou $-3 - 3. x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:
x1 = 1.
x2 = 2.

Tolérance sur x:0.0005
Tolérance sur f(x):0.00001= 10^{-5}
Maximum d'itération:100

Itér	x3	f(x)	$\|x_1-x_2\|$=	$\|x_1-x_3\|$ =	$\|x_3-x_2\|$
1	1.571428571	-1.36443	1.	0.5714285714	0.4285714286
2	1.705410822	-0.247745	0.4285714286	0.1339822502	0.2945891784
3	1.727882728	-0.0393396	0.2945891784	$2.24719068\ 10^{-2}$	0.2721172715
4	1.731404866	$-6.11067\ 10^{-3}$	0.2721172715	$3.52213735\ 10^{-3}$	0.2685951342
5	1.731950853	$-9.45921\ 10^{-4}$	0.2685951342	$5.45986904\ 10^{-4}$	0.2680491473
6	1.732035344	$-1.46349\ 10^{-4}$	0.2680491473	$8.44911020\ 10^{-5}$	0.2679646561
7	1.732048415	$-2.26406\ 10^{-5}$	0.2679646561	$1.30714566\ 10^{-5}$	0.2679515847
8	**1.732050437**	$-3.50252\ 10^{-6}$	0.2679515847	$2.02217663\ 10^{-6}$	0.2679495625

x3 = 1.732050437

Tolérance en f(X) trouvée en 8 itérations.

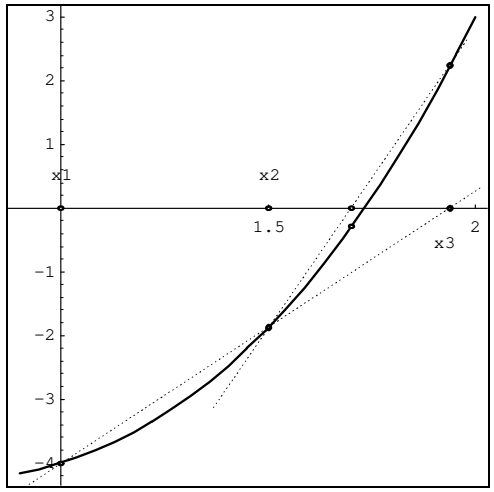
Méthode de la sécante
(secant method)

Similaire à l'interpolation linéaire
mais permet l'**extrapolation**.

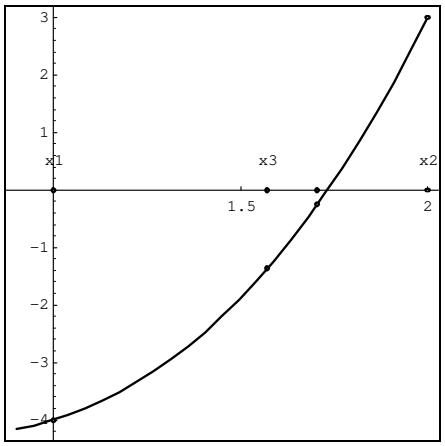
Dans cette méthode, on choisit toujours les
deux valeurs telles que
les $F(X_i)$ sont les plus proches de 0.

Et on a toujours

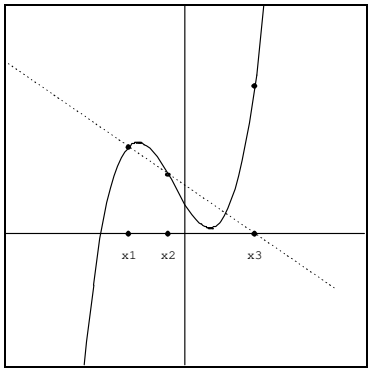
$$X_3 = X_2 - F(X_2)\frac{X_2 - X_1}{F(X_2) - F(X_1)}$$



Exemple :



Problème
de la
méthode de la sécante



Méthode de la sécante

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x\,(-3. + x\,(1 + x))$ ou $-3 - 3.\,x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:
x1 = 1.
x2 = 2.

Tolérance sur x:0.0005
Tolérance sur f(x):0.00001= 10^{-5}
Maximum d'itération:100

Itér	x_1	x_2	x_3	$f(x_3)$	$\lvert x_1-x_2\rvert$
1	1.	2.	1.571428571	-1.36443	1.
2	2.	1.571428571	1.705410822	-0.247745	0.42857142 86
3	1.571428571	1.705410822	1.735135771	0.0292554	0.13398225 02
4	1.705410822	1.735135771	1.731996371	$-5.15177\ 10^{-4}$	0.02972494 902
5	1.735135771	1.731996371	**1.732050698**	$-1.039\ 10^{-6}$	0.00313939 9878

x3 = 1.732050698
Tolérance en f(X) trouvée en 5 itérations.

Remarque importante :

Départ : points quelconques dans le voisinage d'une racine.

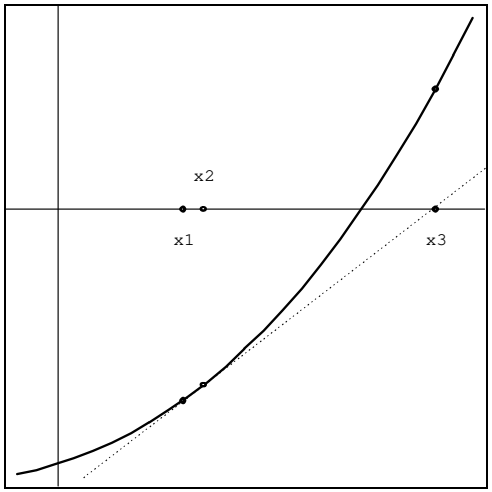
Faire un graphique grossier de la fonction aide parfois beaucoup.

Question ?

Qu'arrive-t-il lorsque

X_1 tend vers X_2 ?

$$X_3 = X_2 - F(X_2)\frac{X_2 - X_1}{F(X_2) - F(X_1)}$$

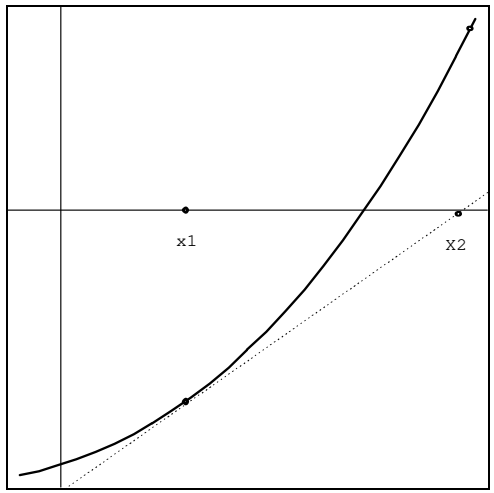


Méthode de Newton
(Newton's Method)

Ne demande qu'une seule valeur de départ X_1.

Mais suppose l'existence de la dérivée de la fonction F(X).

$$\tan(\theta) = \frac{F(X_1)}{X_2 - X_1}$$



Algorithme de la méthode de Newton

Pour déterminer une racine de F(X)=0, exacte à δ près.
Choisir X_1, une valeur approché de la racine

```
Poser X2 = X1;
Calculer X21 = X1 - F(X1)/F'(X1);

Tant que { |X1 - X2| ≥ δ et |F(X2)| ≥ ε et F'(X1)≠0}
faire
    Poser X2 = X1;
    Calculer X1 = X1 - F(X1)/F'(X1);


    Fin si
Fin tant
Poser X = X1;
```

Avantages :

Convergence rapide.
Une seule valeur de départ.

Inconvénients :

F' doit exister.

Evalue F(X) et F'(X).

Méthode de Newton

Exemple :

fonction considérée: $-3 + x\,(-3. + x\,(1 + x))$ ou $-3 - 3.\,x + x^2 + x^3$

Estimations initiales:

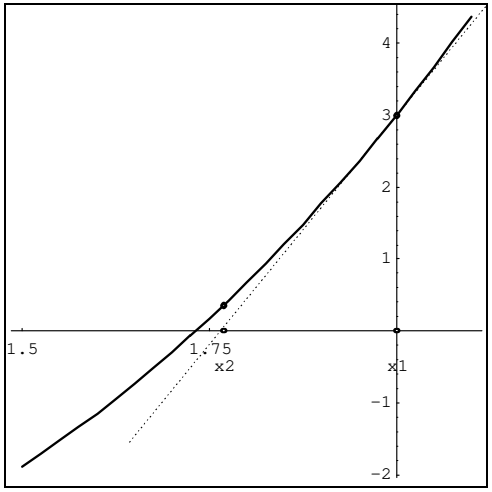
x1 = 2.

Tolérance sur x:0.0005
Tolérance sur f(x): 10^{-5}
Maximum d'itération:100

Itération	x1	x2	f(x2)	|x1-x2|
1	2.	1.769230769	0.360492	0.2307692308
2	1.769230769	1.73292381	0.00826691	0.03630695883
3	1.73292381	**1.732051306**	$4.71824\ 10^{-6}$	0.000872504288

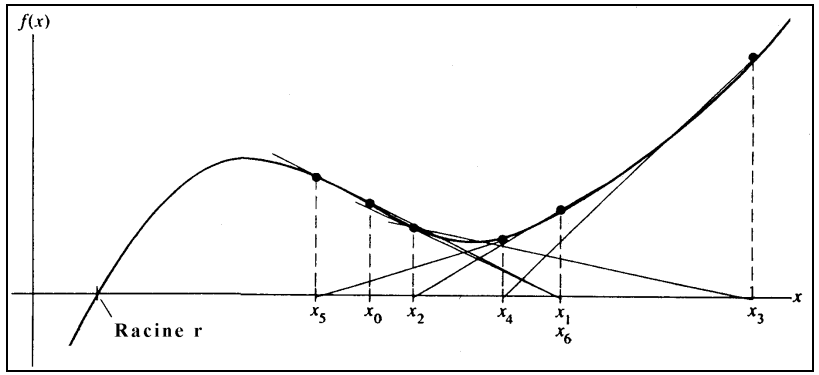
x2 = 1.732051306
Tolérance en f(X) trouvée en 3 itérations.

Exemple :



Problème de la méthode de Newton

La méthode de Newton est-elle toujours efficace ?



Développement formel de la méthode de Newton

Connaissant une approximation

$X_n \approx r$

pour la racine telle que $F(X_n) \neq 0$,

cherchons à corriger

$$X_{n+1} = X_n + \delta$$

pour avoir $F(X_{n+1}) = 0$

$$F(X_{n+1}) = F(X_n + \delta)$$

$$\approx F(X_n) + \delta F'(X_n)$$

donc

$$\delta = - F(X_n) / F'(X_n)$$

ce qui est la méthode de Newton

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X_n)}{F'(X_n)}$$

Remarques :

- Si on a convergence
$X_{n+1} = X_n$

on déduit de l'algorithme que

$$X = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

donc F(X) = 0 => X = r

- Le développement de l'algorithme de Newton est de la forme :

$X_{n+1} = G(X_n)$

avec

$$G(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

racine lorsque X= G(X)

Méthode du point fixe

(x = g(x) méthode)

Réarrangement de f(x)= 0
pour une forme
x = g(x)

Un point fixe x = r est solution de x = g(x)
alors
x =r est solution de
f(x) = 0

Méthode des itérations :
$x_{n+1} = g(x_n)$

Algorithme de la méthode du point fixe

Choisir un réarrangement de f(x) = 0 de la forme x = g(x),

```
Poser X2 = X1;

Répéter

    Poser X1 = X2;
    Calculer X2 = g(X1);

Tant que { |X1 - X2| ≥ δ }

Poser X = X1;
```

Exemple :

$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$

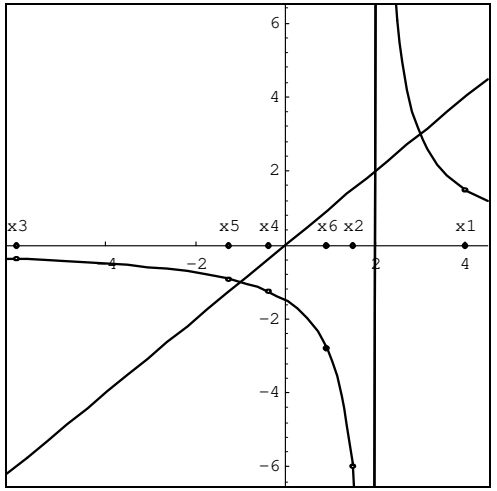
deux racines : $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$

valeur de départ : $x_1 = 4$

Différentes formes x = g(x)
à partir de f(x)=0

- $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$

Graphiquement :



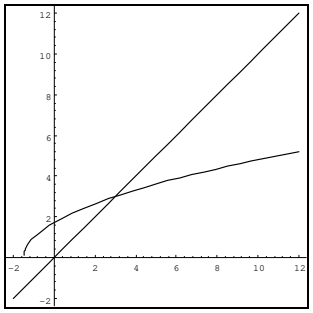
$$x = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$$

Estimations initiales: x1 = 4.
Tolérance sur x:0.0005 et Maximum d'itération:100

Itération	x1	x2	|x1-x2|
1	4.	1.5	2.5
2	1.5	-6.	7.5
3	-6.	-0.375	5.625
4	-0.375	-1.26316	0.888158
5	-1.26316	-0.919355	0.343803
6	-0.919355	-1.02762	0.108269
7	-1.02762	-0.990876	0.0367484
8	-0.990876	-1.00305	0.0121747
9	-1.00305	-0.998984	0.00406649
10	-0.998984	-1.00034	0.00135458
11	-1.00034	**-0.999887**	0.00045162

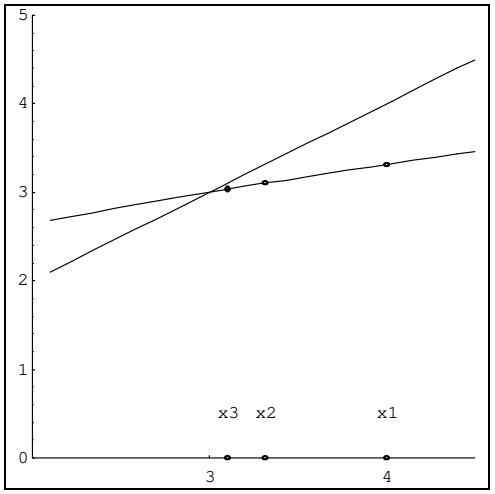
$x_{12} = -0.9998871026$ Converge vers r = -1

- $g(x) = \sqrt{2x+3}$

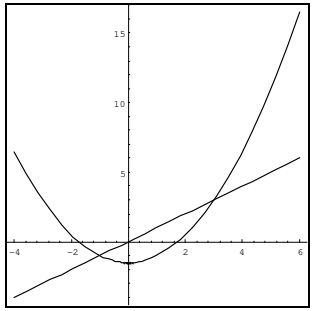


$x_1 = 4.$
$x_2 = 3.31662$
$x_3 = 3.10375$
$x_4 = 3.03439$
$x_5 = 3.01144$
$x_6 = 3.00381$
$x_7 = 3.00127$
$x_8 = 3.00042$
$x_9 = 3.00014$

Converge vers r = 3

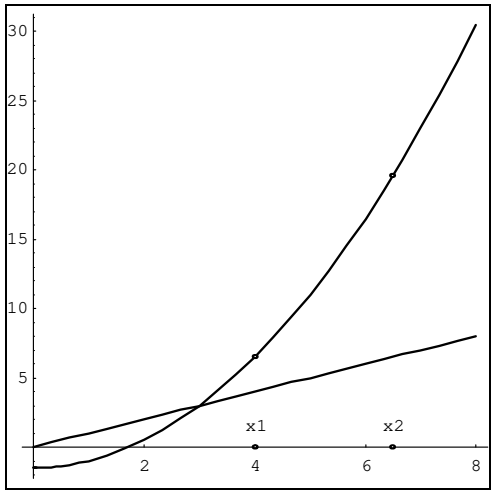


- $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$



$x_1 = 4.$
$x_2 = 6.5$
$x_3 = 19.635$
$x_4 = 191.267$

Diverge



Que se passe-t-il si $x_1 = 0$?

Analyse d'erreurs pour les méthodes itératives

définition:
Caractéristiques de convergence

Supposons que $\{x_n\}$ converge vers x^*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

et que $e_n = x_n - x^*$ pour tout $n \geq 0$.

S'il existe 2 constantes positives C et p telles que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \quad \Rightarrow \quad e_{n+1} \approx C(e_n)^p$$

on dit alors que la convergence de $\{x_n\}$ est d'**ordre p** avec une **constante asymptotique C < 1**.

Remarques :

- Si p = 1, convergence linéaire.
  Si p = 2, convergence quadratique.
- Méthode :
  On essaie avec p= 1 de trouver C.
  Si on obtient un $C \neq 0$, convergence linéaire
  sinon on essaie avec p = 2.
- On définit souvent l'erreur signée par
  $e_n = x_n - x^*$

- La constante asymptotique C affecte la vitesse de convergence, mais d'une façon moins importante que l'ordre de convergence.

Exemple :

Supposons que $y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + 1$

si convergence

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 2$$

On essaie avec p= 1 de trouver C.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_{n+1} - 2|}{|y_n - 2|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(\frac{y_n}{2} + 1) - 2\right|}{|y_n - 2|}$$

$$= \frac{1}{2}$$

donc p =1 et C = 0.5

convergence linéaire

Caractéristiques de convergence
Méthode de bissection

L'intervalle de confiance pour la méthode de bissection rapetisse selon :

$$\Delta X_n = \frac{|X_1 - X_2|}{2^n}$$

L'erreur à l'itération n est bornée par

$$|e_n| = \Delta X_n$$

SI on pose p = 1, on obtient :

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|X_1 - X_2|}{2^{n+1}}}{\frac{|X_1 - X_2|}{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc la méthode de bissection a une convergence linéaire (p=1) avec une constante asymptotique C = ½.

Caractéristiques de convergence
Méthode d'interpolation linéaire

Pour la Méthode d'interpolation linéaire, on a aussi une convergence linéaire (p = 1) C< 1.
avec une constante asymptotique

$$C = \frac{1}{2}|X_2 - X^*|\left|\frac{f''(X^*)}{f'(X^*)}\right|$$

(X_1, X_2) un voisinage de X^*.

- ½ < C < 1 Convergence plus lente que pour la bissection.
- C < ½ Convergence plus rapide que pour la bissection.

Caractéristiques de convergence
Méthode de la sécante

Pour la méthode de la sécante, on a une convergence d'ordre non entier avec :

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

(Nombre d'or)

Caractéristiques de convergence
Méthode du point fixe

Pour la méthode du point fixe, on a :
$X_{n+1} = g(X_n)$ et $r = g(r)$

Par le théorème de la moyenne (Livre de référence page A2-A3), on montre que si $|g'(r)| \neq 0$:

$$\begin{aligned} X_{n+1} - r &= g(X_n) - g(r) \\ &= \frac{g(X_n) - g(r)}{X_n - r}(X_n - r) \\ &= g'(x_n)(X_n - r) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|e_{n+1}| = g'(x_n)|e_n|$$

Donc la convergence sera linéaire et

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} \\ &= \lim_{n\to\infty} |g'(x_n)| \\ &= |g'(r)| \end{aligned}$$

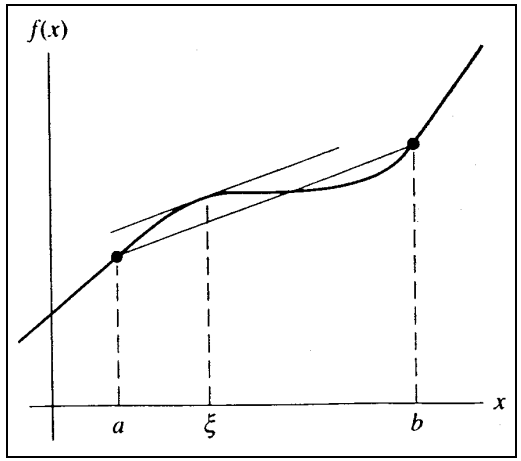
Note :

La condition
$0 < C < 1$

est **nécessaire** pour avoir une convergence linéaire

Ici, il faut que :
$|g'(r)| < 1$ *et* $|g'(r)| \neq 0$

Théorème de la moyenne



Théorème de la moyenne pour la dérivée

Si f(x) est continue sur [a,b]

alors il existe ξ tel que a≤ξ≤b
et

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème de la moyenne appliqué à une intégrale

Si f(x) est continue et intégrable sur [a,b]

alors il existe ξ tel que a≤ξ≤b
et

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x)$$

voir page A-2 et A-3 livre référence

Caractéristiques de convergence
Méthode du point fixe (autre démonstration)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad e_n = x_n - r \qquad e_{n+1} = x_{n+1} - r$$

$$= g(r + e_n)$$

$$= \underbrace{g(r)} + \frac{g'(r)}{1!}e_n + \frac{g''(r)}{2!}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!}e_n^3 + \ldots \quad (Taylor)$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = \frac{g'(r)}{1!}e_n + \frac{g''(r)}{2!}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!}e_n^3 + \ldots$$

- si $g'(r) \neq 0$ $\quad \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = g'(r) + \dfrac{g''(r)}{2!}e_n + \dfrac{g'''(r)}{3!}e_n^2 + \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(r)| \neq 0 \Rightarrow \text{convergence linéaire}$$

note : $|g'(r) < 1$

- si $g'(r) = 0$ *et* $g''(r) \neq 0$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{g''(r)}{2!} + \frac{g'''(r)}{3!}e_n + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|g''(r)|}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{convergence quadratique}$$

- si $g'(r) = g''(r) = 0$ *et* $g'''(r) \neq 0$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^3} = \frac{g'''(r)}{3!} + \frac{g^{(iv)}(r)}{4!}e_n + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = \frac{|g'''(r)|}{3!} \neq 0 \Rightarrow \text{convergence cubique}$$

Remarque :

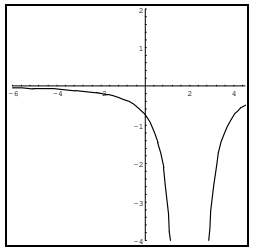
Une condition suffisante de convergence de la suite des approximations est que la valeur absolue de la pente de F soit inférieure à 1 dans un voisinage de la racine r, et que x_0 le point de départ soit dans ce voisinage.

Notes :

- $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$

$$g'(x) = \left|\frac{-3}{(x-2)^2}\right| < 1$$

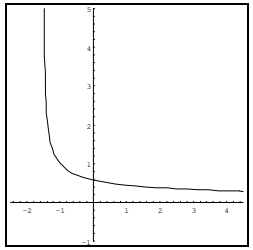
Toujours



- $g(x) = \sqrt{2x+3}$

$$g'(x) = \left|\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\right| < 1$$

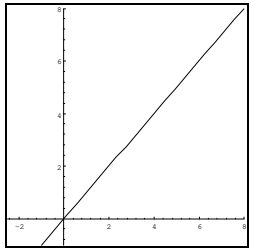
sur l'intervalle de convergence



- $g(x) = \dfrac{x^2-3}{2}$

$$g'(x) = |x| > 1$$

sur l'intervalle
I=]-∞, -1[U]1,+∞[



Caractéristiques de convergence
Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec

$$G(X) = X - \frac{F(X)}{F'(X)}$$

En se servant du résultat précédent, on calcule G'(r)

$$G'(r) = 1 - \frac{F'(r)F'(r) - F(r)F''(r)}{\left(F'(r)\right)^2} = \frac{F(r)F''(r)}{\left(F'(r)\right)^2}$$

Mais F(r) = 0
Si la racine est **simple** en X = r,
on aura G'(r) = 0

On va donc développer G(X) au second ordre en X = r

$$X_{n+1} = G(X_n) = G(r + e_n)$$

$$= G(r) + G'(r)e_n + \frac{1}{2}G''(\mathsf{x}_n)e_n^2$$

$$= r + 0\ e_n + \frac{1}{2}G''(\mathsf{x}_n)e_n^2$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2}G''(\mathsf{x}_n)\right| = \left|\frac{1}{2}G''(r)\right|$$

$\Rightarrow$ convergence quadratique (p=2).

Multiplicité d'une racine

Définition :

L'ordre (ou la multiplicité) d'une racine en X = r est le plus petit entier m pour lequel on ait

$$F(X) = (X - r)^m H(X)$$

avec $H(r) \neq 0$

Exemple :

$F(X) = (X - 3)^3$

$F(r) = 0$

$F'(r) = 3 (X - 3)^2 = 0$

Remarques :

1. Si m = 1, on dit que r est une racine simple.
2. Si m≥2, on dit que r est une racine multiple.

Pour la méthode de Newton, dans le cas de racines multiples, on a une dérivée première

$$\mathbf{F'(X) = (X-r)^{m-1} \{m\, H(X) + (x - r)\, H'(X)\}}$$

et une dérivée seconde

$$\mathbf{F''(X) = (X-r)^{m-2} \{m\,(m-1)\, H(X)+2m(X-r)\, H'(X)+ (X-r)^2\, H''(X)\}}$$

donc

$$G'(X) = \frac{F(X)F''(X)}{\left(F'(X)\right)^2}$$

$$= \frac{H(X)\{m(m-1)H(X) + 2m(X-r)H'(X) + (x-r)^2 H''(x)\}}{(mH(X) + (X-r)H'(X))^2}$$

donc $|G'(r)| = (m - 1)/m$

La convergence est linéaire avec C = (m - 1)/m.

Remarques :

1. Pour la convergence linéaire, à chaque itération (à la limite), on gagne un nombre constant de CSE.

2. Pour la convergence quadratique, à chaque itération (à la limite), on gagne le double du **nombre** de CSE gagnés à l'itération précédente.

$X_n = 1.23456789$

$\Delta X_n \leq 0.005$

Convergence quadratique

$\Delta X_{n+1} = C\,(\Delta X_n)^2 = 0.000025$

$\Delta X_{n+1} \leq 0.00005$

$X_{n+1} = 1.23456789$

$\Delta X_{n+2} = C\,(\Delta X_{n+1})^2 \leq 2.5\ 10^{-9}$

$\Delta X_{n+1} \leq 0.5\ 10^{-8}$

$X_{n+2} = 1.23456789$

Résumé :

1. Bissection et interpolation linéaire :
   Convergence linéaire avec p = 1
2. Sécante :
   Convergence avec p = 1.62
3. Newton :
   Racine simple : Convergence quadratique p = 2
   Racine multiple : Convergence linéaire : p =1
4. Point fixe :
   p = 1, Convergence linéaire.
   g'(x) = 0, Convergence quadratique p =2
   g''(x) = 0, Convergence cubique p =3

Critères de convergence

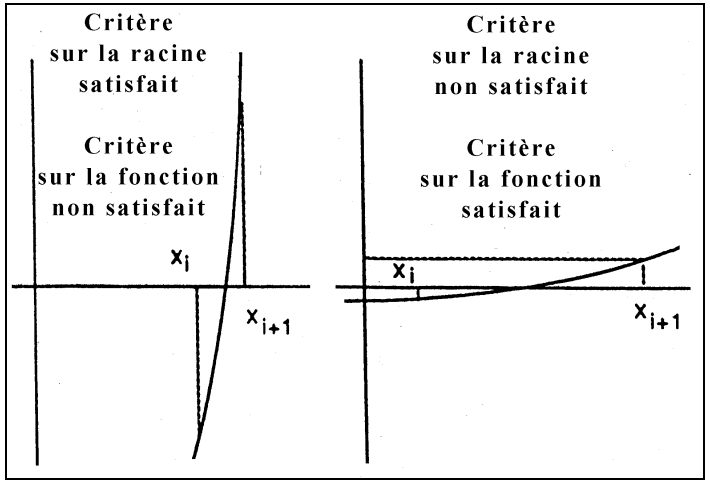
1. On converge parce que
   deux valeurs successives
   sont assez rapprochées.

   $|X_{i+1} - X_i| <$ Tolérance sur la racine

2. On converge parce que
   la fonction en un point est
   suffisamment proche de 0.

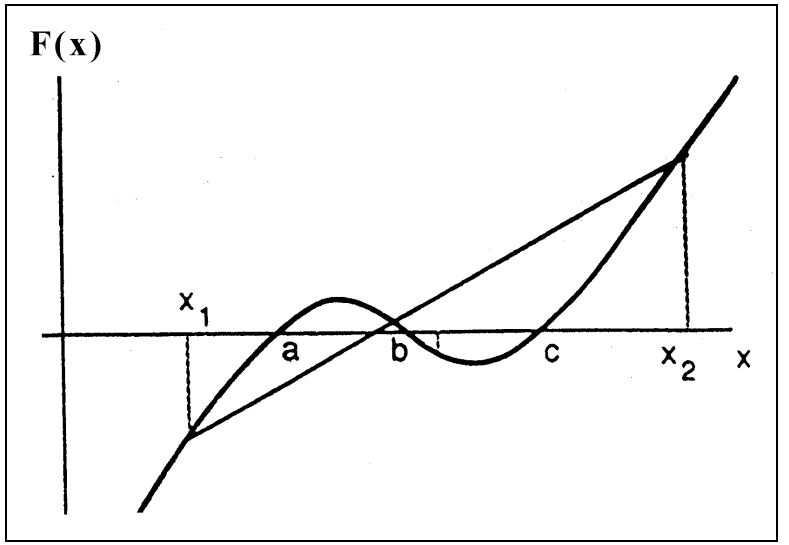
   $|F(X_{i+1})| <$ Tolérance sur la fonction

3. Il arrive de combiner les deux conditions.

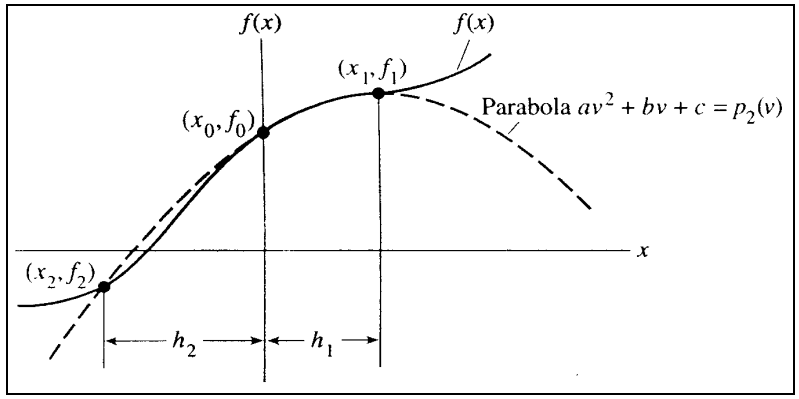


Il y a ici 3 racines {a, b, c}
Où converge-t-on ?

Bissection ?
Interpolation Linéaire ?
Sécante ?
Newton ?



Méthode de Muller



Parabole : a $(X - X_0)^2$ +b $(X - X_0)$ + C = P(X) =0

On trouve a, b et c à partir du système d'équation :

$$\begin{cases} P(X_0) = f(X_0) \\ P(X_1) = f(X_1) \\ P(X_2) = f(X_2) \end{cases}$$

Puis les racines de la parabole :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + X_0$$

On choisit enfin le nouveau X_3 (le plus près de X_0)et on reprend les itérations.