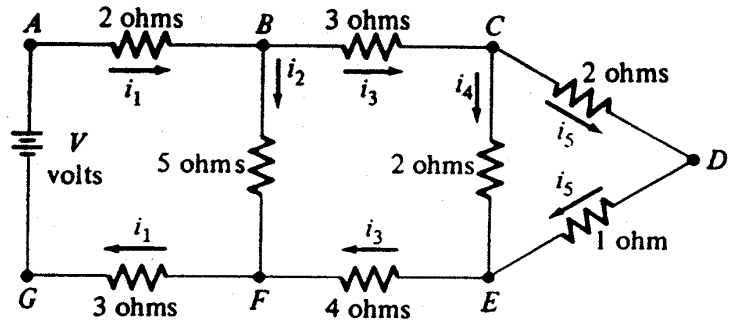
Ift 2421

Chapitre 3

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Introduction

Description:



$U = R \cdot I$

Loi de Kirchhoff:

Le voltage sur une boucle fermée est nul.

Intensité entrante = intensité sortante.

donc

$5 i_1 + 5 i_2 = V$

$i_3 - i_4 - i_5 = 0$

$2 i_4 - 3 i_5 = 0$

$i_1 - i_2 - i_3 = 0$

$5 i_2 - 7 i_3 - 2 i_4 = 0$

Exemples de situations nécessitant la résolution d'un système d'équations linéaires.

- Potentiel dans un circuit électrique
- Tension dans une structure
- Flot dans un réseau hydraulique
- Mélange de produits chimiques
- Vibration d'un système mécanique
- Élasticité
- Transfert de chaleur
- Réduction d'équation différentielles

Ift 2450

Notation :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Ce système sera noté par :
(en notation matricielle)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ou aussi

$$A \cdot x = b$$

10 Rappels sur les matrices :

1. Multiplications entre matrices conformes seulement : si A est KxL et B est MxN alors A.B existe ssi L=M.
2. On a l'associativité du produit : A.(B.C)=(A.B).C
3. On n'a pas de façon générale de commutativité : $A.B \neq B.A$
4. Un vecteur est une matrice dont l'une des dimensions est 1.
5. Une matrice 1x1 est associée de façon bijective à un nombre réel.
6. La transposée A^T d'une matrice A est obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes.
7. Une matrice carrée NxN est dite d'ordre N.
8. La matrice Zéro (notée 0) est entièrement composée de zéros.
9. La matrice identité (notée I) a des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.
10. La trace d'une matrice est la somme des éléments de sa diagonale.

Méthode de Cramer

Si A . x = b est un système de n équations
avec n inconnues

tel que det (A) ≠ 0

alors le système a une solution unique qui est

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

avec A_j la matrice obtenue en remplaçant la $j^{ème}$ colonne de A
par le vecteur b.

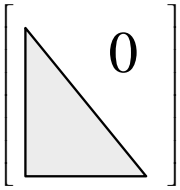
Ordre de la méthode:

O(n!)

n > 20
⇔
5 fois la vie de l'univers.

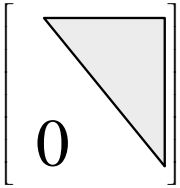
Système triangulaire :

- Inférieur



→ Substitution Avant

- Supérieur



→ Substitution Arrière

Résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \\ -42 \end{bmatrix}$$

et le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 22 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & 0 & 22 \\ 2 & 7 & -21 & -19 \end{array}\right]$$

Systèmes équivalents

2 systèmes sont équivalents
⇔
Ils peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre avec uniquement des opérations élémentaires.

Deux systèmes équivalents ont la même solution.

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

1. Multiplication d'une rangée par une constante

2. Les équations peuvent être permutées.

3. Combinaison linéaire des rangées.

Exemple de système

$$R_1:\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$R_2:\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$R_3:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et de systèmes équivalents

$$2R_1:\ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24$$
$$R_3:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$
$$R_2 + R_3:\ 3x_1 + 2x_3 = 13$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Élimination de Gauss

2 étapes :

1. Transformation du système original en un système <u>triangulaire supérieur</u>.

2. Résolution du système triangulaire par <u>substitution arrière</u>.

Exemple de système :

$$R_1:\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$R_2:\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$R_3:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

Premier pivot ($a_{11} = 3$) :

$$R_1:\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$R_2 - \tfrac{1}{3}R_1:\ \frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 7$$
$$R_3 - \tfrac{2}{3}R_1:\ -\frac{4}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_3 = -6$$

Second pivot ($a_{22} = 7/3$) :

$$R_1:\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$R_2:\ (7/3)x_2 + (7/3)x_3 = 7$$
$$R_3 - ((-4/3)/(7/3))R_2:\ -x_3 = -2$$

Substitution arrière :

$$x_3 = 2$$
$$x_2 = (3/7)[7 - (7/3)x_3]$$
$$= (3/7)[7 - (7/3)2] = 1$$
$$x_1 = (1/3)[12 + x_2 - 2x_3]$$
$$= (1/3)[12 + 1 - 2(2)] = 3$$

Remarques sur la méthode de Gauss

1. Un pivot est une valeur par laquelle on doit diviser pour résoudre le système linéaire.

2. On n'a pas utilisé la seconde opération élémentaire.

3. On peut aussi travailler avec la matrice augmentée.

Coût :

Ordre $O(n^3/3)$ flops

(Floting point operations)

Notes :

Substitution arrière
Ordre $O(n^2/2)$ flops

négligeable lorsque n tend vers infini.

Méthode de Gauss Jordan

- fait disparaître les coefficients en haut et en bas de la diagonale.

- Pas de substitution arrière.

Coût :

Ordre $O(n^3/2)$ flops

déconseillée

Pivotage

Technique de **pivotage partiel** :

Permute 2 lignes pour avoir le pivot maximum en valeur absolue.

Technique de **pivotage complet** :

Permute 2 lignes de la matrice augmentée, puis interchange 2 inconnues du système pour avoir le pivot maximum en valeur absolue.

Raisons du pivotage

Division par un très petit pivot

$$\frac{valeur + erreur}{Pivot} = \frac{valeur + erreur}{10^{-15}} = valeur 10^{15} + erreur 10^{15}$$

Exemple :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -32 & 3 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

Pivotage partiel ($R_1 \leftrightarrow R_3$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -32 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Suffisant pour éviter les divisions par 0.
Peut aussi améliorer la précision des calculs.

Pivotage Complet

Étape 1 : ($R_1 \leftrightarrow R_2$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -32 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

Étape 2 : ($C_1 \leftrightarrow C_3$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -32 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

<u>Attention :</u>

Garder l'ordre des inconnues.
O = (3, 2, 1)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -32 \\ 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix} -32 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -32 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}x_1 = \begin{bmatrix} -32 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pivotage (autre exemple)

Cet exemple montre que la précision peut être améliorée par le pivotage. Considérons un système avec b= 10 et s = 4.
(Arrondi à chaque opération)

Soit le système A x = b tel que :

$$A = \begin{bmatrix} -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \\ 3.000 & -4.031 & -3.112 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7.998 \\ -4.481 \\ -4.143 \end{bmatrix}$$

La matrice triangulaire supérieure sans pivotage est :
(augmentée)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -0.002 & 4.000 & 4.000 & 7.998 \\ 0 & -3.997 & -4.005 & -8.002 \\ 0 & 0 & -10.00 & 0.000 \end{array}\right]$$

ce qui donne la solution : x^* = (-1496, 2.000, 0.000)

Si on utilise le pivot partiel :

$$A = \begin{bmatrix} 3.000 & -4.031 & -3.112 \\ -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -4.143 \\ 7.998 \\ -4.481 \end{bmatrix}$$

La matrice triangulaire supérieure avec pivotage est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3.000 & -4.031 & -3.112 & -4.143 \\ 0 & 3.997 & 3.998 & 7.995 \\ 0 & 0 & -7.681 & -7.681 \end{array}\right] \quad \text{ce qui donne} \quad x^* = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Normalisation partielle
(Scaling)

Diviser chaque élément d'une rangée de la matrice par l'élément maximum de la rangée.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sans normalisation
(b=10, s = 3)
$x_1 = 1.00$, $x_2 = 1.09$, $x_3 = 0.94$

Avec normalisation :
$R_1/100$, $R_2/100$, $R_3/2$

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.02 & 1.00 \\ -0.01 & 0.03 & 1.00 \\ 0.50 & 1.00 & -0.50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.02 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Puis pivot partiel
$x_1 = 1.00$, $x_2 = 1.00$, $x_3 = 1.00$

Remarques :

1. Peut détruire la symétrie.

2. Surcroît de calcul : à employer seulement dans les cas difficiles.

3. Utiliser le pivotage partiel dans la plupart des cas.

Plusieurs membres de droite

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \textit{ et } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On a en fait deux systèmes avec la même matrice.

On travaille alors avec la matrice augmentée de plusieurs membres de droite.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 2 & 12 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 11 & 14 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Réduction de cette matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 2 & 12 & 14 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 & 28/3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

On résout le système pour tous les membres de droite à la fois.

Problème

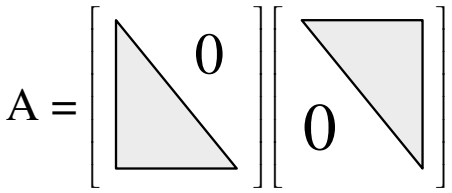
Si on veut résoudre le système pour un nouveau membre de droite plus tard.

On trouve :
$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$
et
$y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2$

Méthode de factorisation triangulaire (décomposition LU)

Décomposer la matrice A en un produit de deux matrices triangulaire.

A x = b



Étape 1. Décomposition

A . x = L . U . x = b

où L et U sont simples

Étape 2. Résolution

Poser y = U . x

1. Résoudre L . y = b par substitution avant.

2. Résoudre U . x = y par substitution arrière.

Factorisation LU

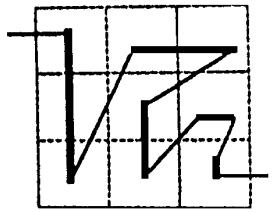
On désire factoriser une matrice 3 x 3 en posant que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce système a 9 inconnues et 9 équations.

Il faut calculer les coefficients L_{ij} et U_{ij} dans l'ordre suivant :

Ordre des calculs



d'abord colonne puis ligne

Note $U_{ii} = 1$ pour unicité

1. Calcul de L_{i1} et U_{1j} :

$L_{11} = a_{11}$

$L_{21} = a_{21}$

$L_{31} = a_{31}$

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}}$$

$$U_{13} = \frac{a_{12}}{L_{11}}$$

2. Calcul de L_{i2} et U_{2j} :

$L_{22} = a_{22} - L_{21} U_{12}$
$L_{32} = a_{32} - L_{31} U_{12}$

$$U_{23} = \frac{a_{23} - L_{21}U_{13}}{L_{22}}$$

3. Calcul de L_{33} :

$L_{33} = a_{33} - L_{31} U_{13} - L_{32} U_{23}$

Exemple Factoriser la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calcul de L_{i1} et U_{1j} :

$L_{11} = 2$

$L_{21} = 0$

$L_{31} = 6$

$$U_{12} = \frac{-1}{2} \qquad U_{13} = \frac{-1}{2}$$

2. Calcul de L_{i2} et U_{2j} :

$L_{22} = -4 - 0*(-1/2) = -4$
$L_{32} = -3 - 6*(-1/2) = 0$

$$U_{23} = \frac{2 - 0*(-\frac{1}{2})}{-4} = -\frac{1}{2}$$

3. Calcul de L_{33} :

$$L_{33} = 0 - 6*(-\frac{1}{2}) - 0*(-\frac{1}{2}) = 3$$

on trouve :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple: résoudre le système

$$A\,x = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

or A = L.U

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Résoudre L.y = b par substitution avant

$y_1 = 0$

$y_2 = ½$

$y_3 = 1$

Résoudre U.x = y par substitution arrière

$x_3 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

Formules générales de factorisation d'une matrice d'ordre N sous la forme L.U

Pour les éléments de L :

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \qquad j \le i \qquad i = 1, 2, 3, ..., N$$

Pour les éléments de U :

$$U_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj} \right] \qquad i \le j \qquad j = 1, 2, 3, ..., N$$

Stockage compact

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Décomposition stockée sous la forme :

$$A = L.U = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & -1/2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

On peut détruire A en cours de calcul de L et U.

Avantages

1. Une factorisation même s'il y a plusieurs seconds membres.

Factorisation = $O(n^3)$ flops. (> Gauss)
Résolution = $O(n^2)$ flops. (économie)

2. Peu de mémoire.

Stockage compact de LU dans A.

3. Préserve le profil de la matrice originale ;
les zéros les plus extrêmes sont conservés (matrice creuse)

Inconvénients

1. Pour une matrice symétrique, l'information de la symétrie n'est pas prise en compte.
(voir factorisation LL^T ou LDL^T $O(n^3/6)$)

2. Le pivotage se complique par rapport à la méthode de Gauss.

Algorithme de la méthode de décomposition LU

Pour transformer une matrice nxn
en un produit de matrice L et U.

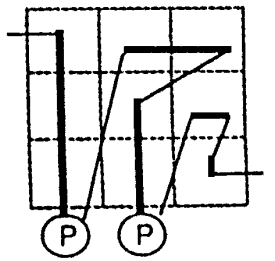
```
Faire pour i = 1 jusqu'à n , pas = 1 :
       L[i,1] = A[i,1] ;
fin faire pour.

Faire pour j = 2 jusqu'à n , pas = 1 :

   Faire pour i = j jusqu'à n , pas = 1 :
      Faire pour k = 1 jusqu'à j-1 , pas = 1 :
        Accumuler Somme de L[i,k] * U[k,j]
              en double précision;
      fin faire pour.
      L[i,j] = A[i,j] - Somme ;
   fin faire pour.

   U[j,j] = 1 ;

   Faire pour i = j + 1 jusqu'à n , pas = 1 :
      Faire pour k = 1 jusqu'à j-1 , pas = 1 :
          Accumuler Somme de L[j,k] * U[k,i]
                en double précision;
      fin faire pour.
      U[j,i] = ( A[j,i] - Somme ) / L[j,j] ;
   fin faire pour.
fin faire pour.
```


Factorisation triangulaire avec pivotage

1. Utilise les opérations élémentaires
de ligne sur la partie non augmentée de la matrice.
Garder un vecteur des permutations.

2. Pivotage
Immédiatement
après calcul d'une colonne de L.

Ordre des calculs :



D'abord colonne, ensuite pivot puis ligne.

Remarque :

Le pivotage détruit la structure de la matrice originale.

Exemple :

Matrice originale

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Calcul de L_{i1}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Premier pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Calcul de U_{1j}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Calcul de L_{i2}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Second pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Calcul de U_{2j}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Calcul de L_{33}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right]$$

Attention à garder l'ordre des permutations !

Exemple (suite)

Soit le système :

$$A\,x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

or, avec pivotage,

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on doit donc résoudre

$$L \cdot U \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Lors du premier pivot

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

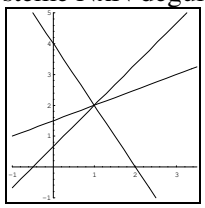
Soit P la matrice nxn des permutations
A.x = b est équivalent à LU x = P.b
LU étant obtenu avec pivotage.

Au début, P = **I**.
à chaque permutation de L_i et L_j dans la matrice compacte,
permuter C_i et C_j dans P.

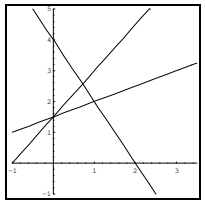
Systèmes linéaires rectangulaires

plus d'équations que d'inconnues:

1. Équations supplémentaires **redondantes**: système NxN déguisé



2. Équations supplémentaires **inconsistantes**: pas de solution.

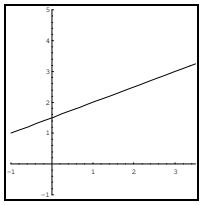


Exemple 1:

$$2\,x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - 2\,x_2 = -3$$
$$4\,x_1 - 3\,x_2 = -2$$

moins d'équations que d'inconnues:

infinité de solutions.



Exemple 2:

$$2\,x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - 2\,x_2 = -3$$
$$-3\,x_1 + 2\,x_2 = 3$$

Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés

Système surdéterminé
$A\,x = b$
peut ne pas avoir de solution.

Trouver x_0 qui minimise
$r = A\,x - b$ (**r = résidu**)

Il suffit de résoudre
$\mathbf{A^T A\,x_0 = A^T\,b}$
si $A^T A$ inversible, 1 solution unique.

Minimiser la distance de r à 0, minimisons ici

$$F(x) = \| r \|^2 = \| A\,x - b \|^2$$
$$= (A\,x - b)^T (A\,x - b)$$

Dérivées :

$$\frac{dF}{dx} = 2(A^T Ax - A^T b)$$

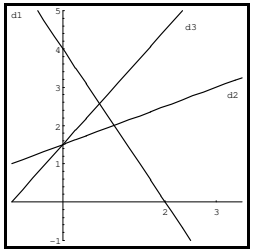
Au minimum, $x = x_0$, dérivée = 0.

$$donc \quad A^T Ax_0 = A^T b$$

Utilisons la méthode $\mathbf{A^T A\ x_0 = A^T\ b}$

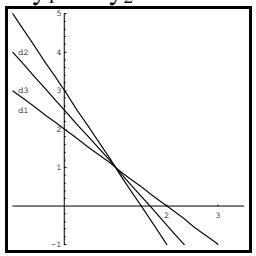
Exemple 1:

$$2\ x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - 2\ x_2 = -3$$
$$-3\ x_1 + 2\ x_2 = 3$$



Exemple 2:

$$y_1 + y_2 = 2$$
$$2\ y_1 + y_2 = 3$$
$$3\ y_1 + 2\ y_2 = 5$$



Formons la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & & 4 \\ 1 & -2 & & -3 \\ -3 & 2 & & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Multiplions par la matrice transposée

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & & 4 \\ 1 & -2 & & -3 \\ -3 & 2 & & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Nous devons donc résoudre

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -6 & -4 \\ -6 & 9 & 16 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 9 & 23 \\ 9 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

Ce qui donne

$x_1 = 100/45 = 2.22$ $\qquad$ $y_1 = 1$

$x_2 = 2/3 = 0.67$ $\qquad$ $y_2 = 1$

Calculer les résidus r = A x - b

Systèmes singuliers et non singuliers pour des matrices carrées

Matrice **singulière** = 1 pivot nul ou plus
avec Gauss et pivotage.

Rang d'une matrice = nombre de pivots non nuls.

Matrice NxN régulière
si son rang = N.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On permute les lignes 2 et 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Après le premier pivot :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Après le second pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc matrice singulière de rang 2.

Rang versus vecteur linéairement indépendants

Des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement **dépendants**

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = 0$
avec a_n non tous nuls

Rang = nombre de rangées ou de colonnes linéairement indépendantes d'une matrice.

Exemple :

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dans ce cas,
pour les lignes

$R_3 = R_1 - 2 R_2$
$R_4 = R_1 - R_2$
et
pour les colonnes
$C_3 = C_2$
$C_4 = C_1$
donc le rang est 2.

Déterminant d'une matrice carrée

Cofacteur $cof_{ij}(A)$ d'une matrice A obtenu:

1. en supprimant la ligne i et la colonne j de A
2.en calculant le déterminant de la matrice résultante
3. en multipliant par le signe $(-1)^{i+j}$

Le déterminant $|A|$ de la matrice A est donné par la relation

$$|A| = \sum_j a_{ij} cof_{ij}(A) = \sum_i a_{ij} cof_{ij}(A)$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Les cofacteurs de la première ligne sont :

$$cof_{11}(A) = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$cof_{12}(A) = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$cof_{13}(A) = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 24$$

Le déterminant de A est donc

$|A| = a_{11} cof_{11}(A) + a_{12} cof_{12}(A) + a_{13} cof_{13}(A)$
$= 2 cof_{11}(A) + (-1) cof_{12}(A) + (-1) cof_{13}(A)$
$= 2 (6) + (-1)(12) + (-1)(24) = -24$

Note : N'importe quelle ligne ou colonne peut être utilisée pour développer le déterminant.

Propriétés des déterminants

$| A B | = | A | | B |$

$| A^T | = | A |$

$| A | = 0$ <=> A est singulière

et pour une matrice triangulaire L:

$$|L| = \prod_i L_{ii}$$

Exemple de calcul du déterminant
après une factorisation A = L U

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|L| = 2\ \mathrm{cof}_{11}(L) = (2)\ (-4)\ (3) = -24$

$|U| = 1\ \mathrm{cof}_{11}(U) = (1)\ (1)\ (1) = 1$

donc

$|A| = |L|\ |U| = (-24)\ (1) = -24$

Effet sur le déterminant des opérations élémentaires de lignes

1. Multiplier une ligne par une constante $R'_j = k\ R_j$

Exemple $R'_2 = k\ R_2$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\,a_{21} & k\,a_{22} & k\,a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

| A' | = k | A |

Le déterminant est aussi multiplié par k.

2. Permuter deux lignes de la matrice $R'_i = R_j$ et $R'_j = R_i$

Exemple $R'_3 = R_2$ et $R'_2 = R_3$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

| A' | = - | A |

Le déterminant change de signe à chaque permutation.

3. Additionner une constante k fois une ligne à une autre ligne

$R'_i = R_i + k\ R_j$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k\,a_{31} & a_{22} + k\,a_{32} & a_{23} + k\,a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

| A' | = | A |

Le déterminant reste inchangé.

Calcul du déterminant après factorisation triangulaire avec pivotage:

1. Multiplier les pivots

2. Faire un changement de signe à chaque fois qu'on permute deux lignes

3. Ne pas employer l'opération 1

de multiplication par une constante

! ne pas oublier le dernier coefficient

Exemple :

Calcul du déterminant de la matrice factorisée ci dessous.

(-1)(3)(-1)(2)(-1/3) = - 2

Matrice originale

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Calcul de L_{i1}

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Premier pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Calcul de U_{1j}

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Calcul de L_{i2}

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Second pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Calcul de U_{2j}

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Calcul de L_{33}

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Inversion de matrices carrées

L'inverse de A est notée par A^{-1}:

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I$$

Calculer A^{-1} => résoudre un système avec N membres de droites :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemple :

Calculer l'inverse de

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Par élimination de gauss ou Gauss-Jordan.

2. Par factorisation triangulaire.

Remarque :
Pour la factorisation, utiliser la propriété suivante :

$$(A.B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$$

appliqué à la décomposition
$A = L . U$

on en déduit
$A^{-1} = U^{-1} . L^{-1}$

U^{-1} et L^{-1} se trouve rapidement par substitution avant et arrière.

Résolution de systèmes linéaires par l'inverse

Si on veut résoudre
$A\,x = b$
on multiplie de chaque côté par l'inverse A^{-1}

$$A^{-1} A\,x = A^{-1} b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1} b$$

Exemple : Résoudre par l'inverse le système

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

L'inverse de la matrice est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution est donc :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Méthode avantageuse seulement si:

1. Il y a beaucoup de systèmes à résoudre avec la même matrice
$A\,x_i = b_i \qquad i = 1,2,3...$

2. La matrice est pleine (elle ne comporte que peu de 0), car l'inversion détruit le profil.

Note: Seules les matrices non singulières sont inversibles.

Propriétés équivalentes d'une matrice non singulière

Soit A une matrice NxN,
les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La matrice est non singulière.

2. La matrice est inversible.

3. Le système a une solution unique.

4. Aucun pivot nul lors de l'élimination de Gauss avec pivotage partiel.

5. Rang(A) = N.

6. Les rangées sont linéairement indépendantes.

7. Les colonnes sont linéairement indépendantes.

8. dét(A) $\neq 0$.

Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur v est nombre réel noté $\| v \|$ tel que:

1. $\| v \| \geq 0$
2. $\| v \| \geq 0$ et $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\| k v \| = |k| \| v \|$ pour tout scalaire k et tout vecteur v
4. $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ pour tous vecteurs v et w
5. $\| v . w \| \leq \| v \| . \| w \|$ pour tous vecteurs v et w

Pour un vecteur v de R^n
Norme euclidienne (longueur)

$$\|v\|_e = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Autre façon de définir une norme:
Les normes p sont de la forme

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ainsi

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \|v\|_e$$

Exemple

Calculer les normes pour p=1, 2 et la norme infinie pour le vecteur

x=(1.25, 0.02,-5.15, 0)

$$\|x\|_1 = 6.42$$

$$\|x\|_2 = 5.2996$$

$$\|x\|_\infty = 5.15$$

Norme d'une Matrice

$\| A \|$ avec

1. $\| A \| \geq 0$
2. $\| A \| \geq 0$ et $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
3. $\| k A \| = | k | \| A \|$ pour tout scalaire k et toute matrice A.
4. $\| A + B \| \leq \|A\| + \|B\|$ pour toutes matrices A et B
5. $\| A B \| \leq \|A\| \|B\|$ pour toutes matrices A et B

Théorème:

Si $\| \|$ est une norme vectorielle alors

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

est une norme matricielle

On dit que c'est une norme matricielle naturelle associée à la norme vectorielle.

Pour une matrice A d'ordre n, les normes 1 et infinie sont de la forme :

$$\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

La norme matricielle 2, $\| A \|_2$,
associée à la norme vectorielle 2
n'est pas facile à calculer
car elle dépend des valeurs propres de la matrice A.

$\| A \|_2$ est la plus petite des normes de A.
Elle est donc la plus précise des mesures de norme de A.
$\| A \|_2$ est aussi appelé la norme spectrale.
(rarement utilisée à cause de sa complexité de calcul)

On peut définir aussi la norme euclidienne pour une matrice par extension de la norme euclidienne d'un vecteur:

$$\| A \|_e = (\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration:

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

1.

Soit x un vecteur colonne de n éléments tel que

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| = 1$$

A.x est donc aussi un vecteur colonne de n éléments.

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |(Ax)_i| = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \max_{1 \le j \le n} |x_j| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \|x\|_\infty$$

or $\|x\|_\infty = 1$

$$\|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2.

Si p est un entier, 1 ≤ p ≤ n, tel que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{pj} \right| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Choisissons x tel que:

$$x_j = \begin{cases} 1, & si\ a_{pj} \geq o \\ -1, & si\ a_{pj} \leq o \end{cases}$$

$$\|x\|_\infty = 1 \text{ et } a_{pj}x_j = \left|a_{pj}\right| \text{ pour j = 1, 2, ..., n.}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq \left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|a_{pj}\right| = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

on a donc

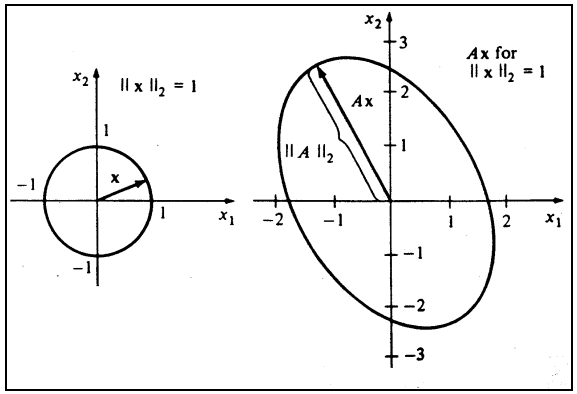
$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty \geq \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

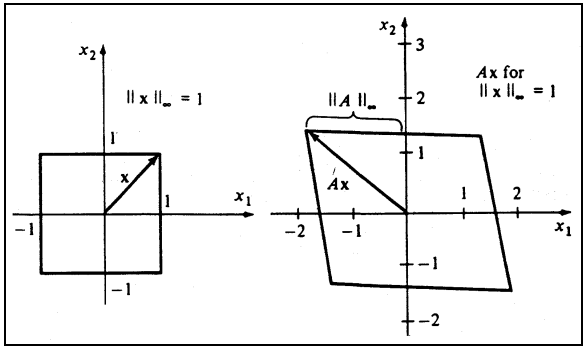
3.

les résultats de 1 et 2 donnent:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

Une illustration, pour n = 2, des normes infinie et 2 est:





Exemple :

Calculer ces 3 normes pour la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = 16$$

$$\|A\|_e = 15$$

$$\|A\|_\infty = 17$$

$$\|A\|_2 = 12.03$$

Remarque

Utilités des normes:
Les normes servent à borner les erreurs commises lors de la solution de systèmes linéaires et à mesurer la convergences des méthodes itératives.

Compatibilité des normes:

Une norme matricielle est compatible avec une norme vectorielle si:

pour tout vecteur x et toute matrice A l'inégalité suivante est respectée:

$$\|A\,x\| \le \|A\|\,\|x\|$$

Pour une matrice A d'ordre n, la norme euclidienne est de la forme

$$\|A\|_e = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|$$

Les deux normes du maximum sont compatibles avec les normes p vectorielles correspondantes.
Mais pas la norme euclidienne.

Remarques sur les normes

1. La norme de I est toujours ≥ 1:

$$\| A \| \leq \| I A \| \leq \| I \| \| A \|$$

donc $\| I \| \geq 1$.

2. La norme de A^{-1} est toujours supérieure ou égale à l'inverse de la norme de A:

$$1 \leq \| A A^{-1} \| \leq \| A \| \ \| A^{-1} \|$$

donc

$$\| A^{-1} \| \geq \frac{1}{\|A\|}$$

Conditionnement

Un système linéaire est mal conditionné
lorsque certaines équations sont quasi redondantes.

Conséquence:

erreurs d'arrondi
dues à des soustractions
entre nombres quasi égaux.

Exemple

$$2.1\ x_1 + 3.1\ x_2 = 5.2$$

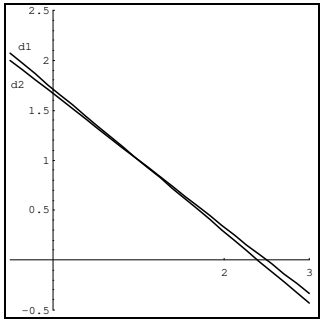
$$2\ x_1 + 3\ x_2 = 5$$

On dit que la matrice

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 3.1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

est mal conditionnée.

On représente sur la figure les droites correspondant aux deux équations.



Nombre de condition

Notation

Nombre de condition = cond(A)

$cond(A) = \| A \| \| A^{-1} \|$

A est bien conditionnée
$\Leftrightarrow$
cond(A) = 1.

Remarques:

1. Le nombre de condition dépend du type de norme matricielle qu'on utilise.

2. cond(A) $\geq$ 1 toujours.

Exemple précédent

$$A = \begin{bmatrix} 2.1 & 3.1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & -31 \\ -20 & 21 \end{bmatrix}$$

Calculer le nombre de condition en utilisant les normes :
$\| \|_1$, $\| \|_\infty$ et $\| \|_e$

Réponses : 317.2, 317.2 et 270.2

Théorèmes relatifs au conditionnement

Soit un système linéaire A x = b

Comment les erreurs sur A et/ou sur b sont amplifiées pour x ?

nombre de conditionnement.

Soit un système linéaire A x = b

Théorème no.1 :

x^* = approximation de x
résidu r = b - A x^*
alors:

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Signification:
Si cond(A) est petit, r mesure bien la précision relative de x .

Corollaire au théorème 1 :

b^* = approximation de b
x^* = solution de $A\,x^* = b^*$

alors :

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|b^* - b\|}{\|b\|} \le \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}$$

Signification:
Le conditionnement amplifie l'effet des erreurs dans b.

Théorème no.2:

A^* = approximation de A
x^* = solution de $A^*\,x^* = b$

alors :

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \le cond(A)\frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}$$

Signification:
Le conditionnement amplifie l'effet des erreurs dans A.

Démonstration théorème 1 :

$r = b - A\,x^* = A\,x - A\,x^* = A\,(x - x^*) = A\,e$
donc $e = A^{-1}\,r$

Si nous considérons des normes compatibles, nous avons :

$$\| e \| \le \| A^{-1} \| \; \| r \|$$

or, à partir de $r = A\,e$, nous avons $\| r \| \le \| A \| \; \| e \|$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \le \|e\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\|$$

En appliquant le même raisonnement sur $A\,x = b$ et $x = A^{-1}\,b$, nous avons :

$$\frac{\|b\|}{\|A\|} \le \|x\| \le \|A^{-1}\|\,\|b\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|\,\|b\|} \le \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\frac{1}{\|A\|\,\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

$$\boxed{\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}}$$

Démonstration théorème 2 :

En utilisant A x = b et A^* x^* = b, nous pouvons écrire :

$$x = A^{-1} b = A^{-1} (A^* x^*) = A^{-1} (A + A^* - A) x^*$$
$$= [I + A^{-1} (A^* - A)] x^*$$
$$= x^* + A^{-1} (A^* - A) x^*$$

$$x - x^* = A^{-1} (A^* - A) x^*$$

Si nous considérons des normes compatibles, nous avons :

$$\|x - x^*\| \le \|A^{-1}\| \|A - A^*\| \ \|x^*\| = \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|} \ \|x^*\|$$

et donc

$$\boxed{\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \le cond(A) \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}}$$

Perturbation sur un système

soit le système

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Il a pour solution :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'inverse de A est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

La norme infinie de A est : $\| A \|_\infty = 33$
La norme infinie de A^{-1} est : $\| A^{-1} \|_\infty = 136$

Le conditionnement de A en norme infinie est
$Cond (A)_\infty = 33 \times 136 = 4488$
La matrice est donc très mal conditionnée.

S'il y a des erreurs sur b :

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons la solution :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{bmatrix}$$

$$\|b^* - b\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.1$$

$$\frac{\|b^* - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0.1}{33} = 0.00303$$

$$\|u^* - u\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 8.2 \\ -13.6 \\ 3.5 \\ -2.1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 13.6$$

$$\frac{\|u^* - u\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \frac{13.6}{1} = 13.6$$

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|} \le \frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \le cond(A) \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}$$

S'il y a des erreurs sur A :

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7 & 5.01 & 6 & 5.02 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9.1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons la solution :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.33 \\ 8.02 \\ -0.73 \\ 2.09 \end{bmatrix}$$

$$\|A^* - A\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7 & 5.01 & 6 & 5.02 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9.1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & .01 & 0 & .02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.01 & -.01 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.3$$

$$\|u^* - u\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -3.33 \\ 8.02 \\ -0.73 \\ 2.09 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -4.33 \\ 7.02 \\ -1.73 \\ 1.09 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 7.02$$

$$\frac{7.02}{8.02} \le 4488 \frac{03}{33} = 40.8$$

$$\boxed{\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \le cond(A) \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}}$$

Amélioration itérative.

Solution approchée $x^* = x$
pour le problème $A x = b$.
Cond(A) raisonnable.

3 étapes pour l'améliorer:

1. calculer $r = b - A x^*$ en double précision.
2. résoudre $A e = r$ (rapide).
3. poser $x \approx x^* + e$.

Exemple :

Nous voulons résoudre

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

par l'inverse, mais cet inverse est entaché d'erreurs :

$$(A^{-1})^* = \begin{bmatrix} 0.4 & -.25 \\ -.25 & .55 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} .375 & -.25 \\ -.25 & .5 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons

$$x^* = (A^{-1})^* b = \begin{bmatrix} 1.15 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} -1.10 \\ -1.05 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} -0.1775 \\ -0.3025 \end{bmatrix}$$

Avec un raffinement itératif, nous trouvons :

$$x = x^* + e = \begin{bmatrix} 0.9725 \\ 0.9475 \end{bmatrix}$$

Remarques:

1. On peut effectuer plusieurs étapes d'amélioration d'erreur. dans l'exemple, un second raffinement conduit à

$$x = \begin{bmatrix} 1.005 \\ 1.011 \end{bmatrix}$$

2. Cette technique fonctionne bien lorsque cond(A) n'est pas trop grand (voir Théorème no.1)

3. L'amélioration itérative est équivalente à une méthode de point fixe.
$x^{n+1} = G(x^n)$

Méthodes itératives

1. Jacobi :

Soit le système

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Nous pouvons réarranger le système :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.000 - 0.125x_2 + 0.125x_3 \\ x_2 &= 0.571 + 0.143x_1 + 0.286x_3 \\ x_3 &= 1.333 - 0.222x_1 - 0.111x_2 \end{aligned}$$

Estimations successives de la solution : (méthode de Jacobi)

	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème
x_1	0	1.000	1.095	0.995	0.993	1.002	1.001	1.000
x_2	0	0.571	1.095	1.026	0.990	0.998	1.001	1.000
x_3	0	1.333	1.048	0.969	1.000	1.004	1.001	1.000

C'est la même méthode que la méthode appliquée à une simple équation mais appliquée à un ensemble d'équations.
Nous pouvons réécrire le système sous la forme :

$$x^{n+1} = G x^n = b' - B x^n$$

Point fixe
Où x^{n+1} et x^n sont les $n^{ième}$ et $(n+1)^{ième}$ itérés du vecteur x.
G est une transformation linéaire plutôt qu'une fonction non linéaire

Considérons la notation matricielle du système

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Posons A = L + D + U

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A\ x = (\ L + D + U\ )\ x = b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$D\ x = -\ (\ L + U\ )\ x + b$$

$$x = -\ D^{-1}\ (\ L + U\ )\ x + D^{-1}\ b$$

$$x^{n+1} = -\ D^{-1}\ (\ L + U\ )\ x^{n} + D^{-1}\ b$$

$$x^{n+1} = G(\ x^{n}\ )$$

Exemple (suite)

$$b' = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.571 \\ 1.333 \end{bmatrix},\ B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & .124 & -.125 \\ -.143 & 0 & -.286 \\ .222 & .111 & 0 \end{bmatrix}$$

La Méthode que nous venons de décrire est la méthode de Jacobi, ou méthode des déplacements simultanés.

Algorithme de la méthode de Jacobi

Pour résoudre un système linéaire de N équations, réarranger les lignes pour que chaque élément de la diagonale soit le plus grand des éléments de sa colonne.
Soit A x = b ce réarrangement.

En partant d'une solution initiale $x^{(1)}$, chaque élément du vecteur $x^{(n+1)}$ est donné par :

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Une condition suffisante de convergence est

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

Si cette condition est vérifiée, alors $x^{(n)}$ va converger vers la solution quelque soit le vecteur initial $x^{(0)}$.

2.Gauss-Seidel :

$$A\,x = (L + D + U)\,x = b$$

$$(L + D)\,x = -U\,x + b$$

Nous avons le processus itératif :

$$x^{(n+1)} = -D^{-1} L\, x^{(n+1)} - D^{-1} U\, x^{(n)} + D^{-1} b$$

Estimations successives de la solution :
(méthode de Gauss-Seidel)

	1ière	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème
x_1	0	1.000	1.041	0.997	1.001	1.000
x_2	0	0.714	1.014	0.996	1.000	1.000
x_3	0	1.032	0.990	1.002	1.000	1.000

Exemple :

$$x_1^{(n+1)} = 1.000 - 0.125\,x_2^{(n)} + 0.125\,x_3^{(n)}$$
$$x_2^{(n+1)} = 0.571 + 0.143\,x_1^{(n+1)} + 0.286\,x_3^{(n)}$$
$$x_3^{(n+1)} = 1.333 - 0.222\,x_1^{(n+1)} - 0.111\,x_2^{(n+1)}$$

en commençant avec $x_1 = (0,0,0)^T$.

Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel

Pour résoudre un système linéaire de N équations, réarranger les lignes pour que chaque élément de la diagonale soit le plus grand des éléments de sa colonne.
Soit A x = b ce réarrangement.

En partant d'une solution initiale $x^{(1)}$, chaque élément du vecteur $x^{(n+1)}$ est donné par :

$$x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Une condition suffisante de convergence est

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

Si cette condition est vérifiée, alors $x^{(n)}$ va converger vers la solution quelque soit le vecteur initial $x^{(0)}$.

2.Relaxation :

$$x_i^{(n+1)} = x_i^k + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i}^{N} a_{ij} x_j^{(n)}) \qquad n = 1,2,\ldots$$

La convergence ne se produit habituellement que pour 0<w<2.

Note :

Si w < 1, on parle de sousrelaxation.
Si w = 1, c'est la méthode de Gauss Seidel.
Si w > 1, on parle de surrelaxation.

Exemple :
Étude de la convergence pour différentes valeurs de w avec le système :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution est $x = (-1, -1, -1, -1)^T$.
$x^{(1)} = (0,0,0,0)^T$.

w	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
nb	25	18	13	11	14	18	24	35	55	100

nb le nombre d'itérations pour avoir une erreur inférieure à 10^{-5}

Ift 2421

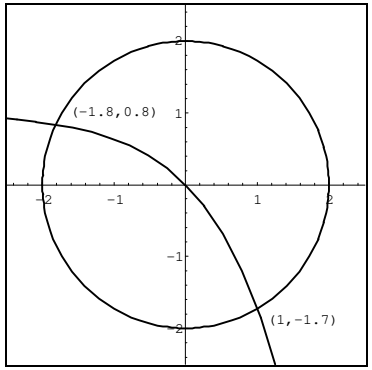
Chapitre 3

Résolution des systèmes d'équations non linéaires

Exemple de système non linéaire

$x^2 + y^2 = 4$

$e^x + y = 1$



Méthodes de résolution:

1. Point fixe (à plusieurs variables)

$x^{(n+1)} = G (x^{(n)})$
avec G: $R^n \rightarrow R^n$

2. Newton (à plusieurs variables)
a. $x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F'(x^{(n)})]^{-1} F (x^{(n)})$
avec F: $R^n \rightarrow R^n$

b. Différence finie pour approcher la différentielle (type sécante).

Méthode du point fixe à plusieurs variables

Exemple :

1. Prendre un réarrangement du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{4 - y^2} \\ 1 - e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(x,y) \\ G_2(x,y) \end{bmatrix}$$

2.Convergence si :

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial x}\right| < 1 \quad et \quad \left|\frac{\partial G_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial y}\right| < 1$$

3.Algorithme : $x^{(0)}$ donné et itérations

Avec $x^{(0)} = (-2, 1)^T$, nous avons :

$x^{(1)} = (-1.73205, 0.86447)^T$,
$x^{(2)} = (-1.80343, 0.82308)^T$,
$x^{(3)} = (-1.82278, 0.83527)^T$,
$x^{(4)} = (-1.81723, 0.83843)^T$,
$x^{(5)} = (-1.81578, 0.83753)^T$,
$x^{(6)} = (-1.81619, 0.83729)^T$,

Méthode de Newton à plusieurs variables

a.

1.F(x) = 0

Prendre un réarrangement du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ e^x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ e^x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

2.Calcul de

$$F' = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ -e^x & -1 \end{bmatrix}$$

3. Algorithme : $x^{(0)}$ donné et itérations

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[F'(x^{(n)})\right]^{-1} F(x^{(n)})$$

Note : L'opération $\left[F'(x^{(n)})\right]^{-1} F(x^{(n)})$ consiste à résoudre un système linéaire 2x2 à chaque itération. (coûteux)

Avec $x^{(0)} = (-2, 1)^T$, nous avons :

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.1353 \end{bmatrix} \; et \; F'(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -0.1353 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[F'(x^{(0)})\right]^{-1} F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.1708 \\ 0.1584 \end{bmatrix} \; et \; x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.8292 \\ 0.8416 \end{bmatrix}$$

b. Méthode de différences finies pour évaluer la différentielle

1. Il faut choisir un petit paramètre delta de perturbation.

2. Les dérivées partielles sont approchées par

$$\frac{\partial G_i}{\partial x} \approx \frac{1}{\delta_x}\left[G_i(x + \delta_x, y) - G_i(x, y)\right]$$

et

$$\frac{\partial G_i}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta_y}\left[G_i(x, y + \delta_y) - G_i(x, y)\right]$$

3. Les itérés se font comme dans la méthode de Newton à plusieurs variables.

C'est la méthode qui a été programmée dans analyse numérique

Note :

Parfois, la matrice inverse des dérivées partielles n'est pas évaluée à chaque itération ; mais plutôt à toutes les n itérations.