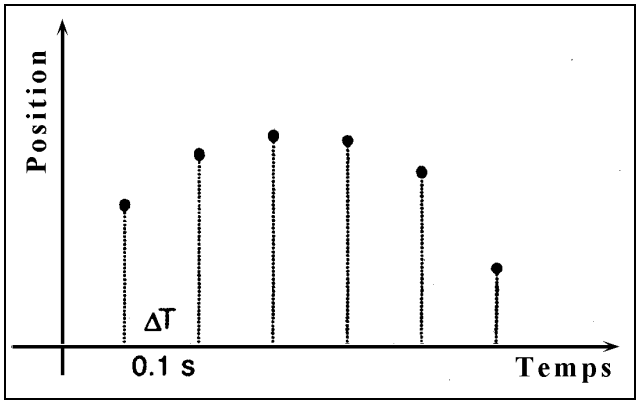
Ift 2421

Chapitre 5

Dérivation numérique

Introduction



Dérivation et intégration numériques

Déterminer avec précision :

1. La vitesse à chaque instant
2. L'accélération de la fusée
3. La consommation de carburant

Évaluer les dérivées premières et secondes ainsi que l'intégrale de cette fonction.

Principe général
de dérivation et d'intégration numériques

Si

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

alors

$$f'(x) = P_n'(x) + E_n'(x)$$

$$f''(x) = P_n''(x) + E_n''(x)$$

etc...

et aussi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx$$

Bonne estimation de la fonction

⇒Bonnes estimations de ses dérivées
et de son intégrale.

Dérivation du polynôme de Newton Grégory

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0 + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

Dériver le polynôme :

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_n(x)}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{dP_n(x)}{ds}\frac{1}{h} \qquad car \;\; x = x_0 + sh$$

$$= \frac{1}{h}\frac{d}{ds}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0\right\} = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{ds}\left\{\binom{s}{k}\Delta^k f_0\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\begin{array}{c} \Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_0 + \\ \frac{1}{6}\left[(s-1)(s-2) + s(s-2) + s(s-1)\right]\Delta^3 f_0 + \ldots \end{array}\right]$$

Dérivée de l'erreur :

$$\frac{dE_n(x_0)}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}\binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(x) + \binom{s}{n+1} h^{n+1}\frac{d}{dx} f^{(n+1)}(x)$$

Note : le terme $f^{(n+1)}(\xi)$ dépend de x.

Dérivation du polynôme de Newton Grégory

Pour s = 0, 1, ... , n
les formules se simplifient.

Pour (s = 0) :

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\begin{array}{c}\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\Delta^2 f_0 + \\ \frac{1}{6}\left[(s-1)(s-2)+s(s-2)+s(s-1)\right]\Delta^3 f_0 + \ldots\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\begin{array}{c}\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \ldots \\ -\frac{(-1)^n}{n}\Delta^n f_0\end{array}\right]$$

et le terme d'erreur est :

$$\frac{dE_n(x_0)}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{ds}\binom{s}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\mathsf{x}) + \binom{s}{n+1}h^{n+1}\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\mathsf{x})$$

$E_n'(x_0) = \frac{(-1)^n}{n+1}h^n f^{(n+1)}(\xi)$ terme qui est en O(h^n)

Exemple :

Table de $f(x) = e^x$ à 3 décimales :

x	f(x)	Δf	Δ^2f	Δ^3f	Δ^4f
1.3	3.669				
		0.813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		0.328		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

Ici h = 0.2
Approximations de la dérivée en x = 1.7

$$P_1'(1.7) = \frac{1}{0.2}1.212 = 6.606$$

$$P_2'(1.7) = \frac{1}{0.2}(1.212 - \frac{1}{2}0.268) = 5.390$$

Erreur sur P_1' :

$$E_1'(x) = -\frac{1}{2}(0.2)^1 f''(\xi)$$

$$-\underset{x=1.7}{0.669} \le E_1'(1.7) \le -\underset{x=1.9}{0.547}$$

Erreur sur P_2' :

$$E_2'(x) = \frac{1}{3}(0.2)^2 f'''(\xi)$$

$$\underset{x=1.7}{0.073} \le E_2'(1.7) \le \underset{x=2.1}{0.109}$$

Dérivation du polynôme de Newton Grégory

Pour s = 0, 1, ... , n
les formules se simplifient.

Cas particulier (s = 1, polynôme de degré 2) :

$$P_2'(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$$

et le terme d'erreur est :

$E_n'(x_1) = \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi)$ terme qui est en O(h^2)

Simplification :

$$f'(x_1) \approx P_2'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

Après translation d'indice :

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$ Formule centrée

Formules de calcul des dérivées

Dérivée première :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$ (différences centrées)

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4)$$ (différences centrées)

Dérivée seconde :

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$ (différences centrées)

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$ (différences centrées)

Dérivées d'ordre supérieur : $f^n(x_0) = \frac{\Delta^n f_0}{h^n} + O(h)$

Instabilité de la différentiation numérique (propagation des erreurs)

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

h $\rightarrow$ 0 alors erreur $\rightarrow$ 0 et f'exacte.

Erreurs sur les valeurs de la fonction

$$f_{-1} = f_{-1}^* \pm e_{-1}$$
$$f_1 = f_1^* \pm e_1$$

alors

$$f'(x_0) = \frac{f_1^* - f_{-1}^*}{2h} \pm \frac{e_1 + e_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

Si le pas h est trop réduit $\Rightarrow$
Beaucoup d'erreur d'arrondi

$\therefore$ La dérivation est un processus instable
(soustraction entre termes voisins)

<u>Calculs en double précision ?</u>

Utile si e est une erreur machine (arrondi ou troncature).
Inutile si e est une erreur sur les données.

Utilisation des séries de Taylor

(pour reconstruire les formules de dérivation)

au voisinage de x = x_0, nous avons :

$$x_1 = x_0 + h \qquad f(x_1) = f_1 = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \ldots$$

$$x_{-1} = x_0 - h \qquad f(x_{-1}) = f_{-1} = f_0 - h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' - \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \ldots$$

Reconstruire la formule f_0' :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

Soustraire les deux séries :

$$f_1 - f_{-1} = 2h f_0' + \frac{h^3}{3} f_0''' + \frac{h^5}{60} f_0^{v} + \ldots$$

Diviser par 2h et isoler f_0' :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \frac{h^2}{6} f_0''' + \frac{h^4}{120} f_0^{v} + \ldots$$

Note : Série représentant l'erreur = puissances paires de h seulement.
L'extrapolation de Richardson gagnera 2 ordres.

Utilisation des séries de Taylor
(pour reconstruire les formules de dérivation)

au voisinage de $x = x_0$.

$$x_1 = x_0 + h \qquad f(x_1) = f_1 = f_0 + h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \ldots$$

$$x_{-1} = x_0 - h \qquad f(x_{-1}) = f_{-1} = f_0 - h f_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' - \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{iv} + \ldots$$

Reconstruire les formules pour f_0', f_0'', ...

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Avec d'autres expansions :

$$f(x_2) = f_2 = f_0 + 2h f_0' + 2h^2 f_0'' + \frac{4h^3}{3} f_0''' + \frac{2h^4}{3} f_0^{iv} + \ldots$$

$$f(x_{-2}) = f_{-2} = f_0 - 2h f_0' + 2h^2 f_0'' - \frac{4h^3}{3} f_0''' + \frac{2h^4}{3} f_0^{iv} + \ldots$$

Reconstruire des formules plus complexes :

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

Ordre d'une approximation

f(x) est d'ordre n au voisinage de 0 si

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \leq M$$

Où M est une constante.

La notation employée est
$f(x) = O(x^n)$

Remarque : On devrait plutôt dire f(x) appartient à $O(x^n)$.

Exemple :
$f(x) = Sin(x)$

on a :

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{Sin(x)}{x} \right| = 1$$

donc $Sin(x) = O(x)$.

Il faut noter que :

$$O(1) \supseteq O(x) \supseteq O(x^2) \supseteq \ldots$$
$$\supseteq O(x^n) \supseteq O(x^{n+1}) \supseteq \ldots$$

Remarque :

- On a toujours

$$O(h^n) = c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \ldots$$

- Un terme d'erreur $O(h^n)$ signifie approximativement que :
Si on divise h par 2,
on divise le terme d'erreur par 2^n.
en effet on a :

$$c_n \left(\frac{h}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} c_n h^n$$

Extrapolation de Richardson

- Pas = h

$$f(x) = f_1(x) + O(h^n)$$
$$= f_1(x) + Kh^n + O(h^{n+1})$$

- Pas = 2 h

$$f(x) = f_2(x) + O((2h)^n)$$
$$= f_2(x) + 2^n Kh^n + O((2h)^{n+1})$$

Alors

$$f(x) = f_1(x) + \frac{1}{2^n - 1}\left(f_1(x) - f_2(x)\right) + O(h^{n+1})$$

Précision amélioré d'un ordre

Méthode valable pour :

- Interpolation
- Dérivation numérique
- Intégration numérique

Extrapolation de Richardson

Démonstration

$$(1) \rightarrow f(x) - f_h(x) = c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \ldots$$
$$(2) \rightarrow f(x) - f_{2h}(x) = c_n (2h)^n + c_{n+1} (2h)^{n+1} + \ldots$$
$$= c_n 2^n h^n +$$

2^n * (1) - (2) $\Rightarrow$

$$2^n f(x) - 2^n f_h(x) - f(x) + f_{2h}(x) = O(h^{n+1})$$

$$(2^n - 1) f(x) - (2^n - 1) f_h(x) - f_h(x) + f_{2h}(x) = O(h^{n+1})$$

$$(2^n - 1)\left\{f(x) - f_h(x)\right\} = f_h(x) - f_{2h}(x) + O(h^{n+1})$$

$$f(x) - f_h(x) = \frac{1}{2^n - 1}\left\{f_h(x) - f_{2h}(x)\right\} + O(h^{n+1})$$

$$\boxed{f(x) = f_h(x) + \frac{1}{2^n - 1}\left\{f_h(x) - f_{2h}(x)\right\} + O(h^{n+1})}$$

Exemple :

Dérivée première en x = 2.5 de

x	f(x)
2.3	0.34718
2.4	0.31729
2.5	0.28587
2.6	0.25337
2.7	0.22008

Différences centrées :

- h = 0.1

$f'(2.5) = (f_1-f_{-1})/2h + O(h^2)$
$= (0.25337-0.31729)/0.2 + O(h^2)$
$= -0.3196 + O(h^2)$

- 2h = 0.2

$f'(2.5) = (f_2-f_{-2})/2h + O(4h^2)$
$= (0.22008-0.34718)/0.4 + O(4h^2)$
$= -0.3178 + O(4h^2)$

Note :

L'extrapolation de Richardson peut être appliquée plusieurs fois.

f_h

f_{2h}

f_{4h}

Technique d'extrapolation

$f'(2.5) = -0.3196 + \{ -0.3196 -(-0.3178)\}/3 + O(h^4)$
$= -0.3203 + \mathbf{O(h^4)}$

Amélioration de 2 ordres.

Ift 2421

Chapitre 5

Intégration numérique

Intégration numérique

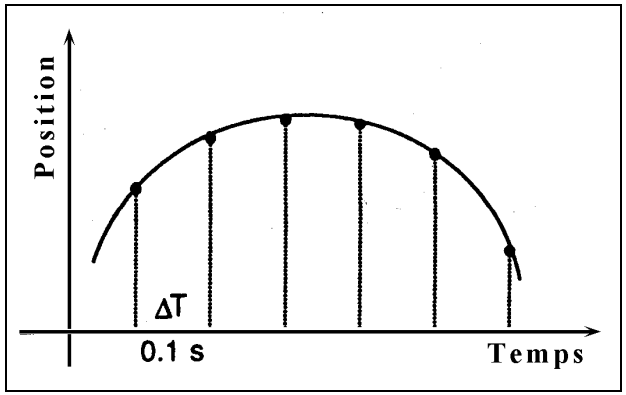
n+1 points de collocation

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

Approcher l'intégrale de la fonction

$$\int_a^b f(x)dx$$

Surface sous la courbe entre a et b



Intégration numérique (Quadrature de Newton Cotes)

Polynôme $P_n(x)$ de Newton Gregory

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array}$$

L'intégrale du polynôme et de l'erreur est :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx$$

Quadrature simple du trapèze

(formule de Newton Cotes pour n = 1)
Polynôme $P_n(x)$ de degré 1

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = h\int_0^1 P_1(s)ds$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = h\left[sf_0 + \frac{s^2}{2}\Delta f_0 \right]_{s=0}^{s=1}$$

$$= h\left[f_0 + \frac{f_1 - f_0}{2} \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right]$$

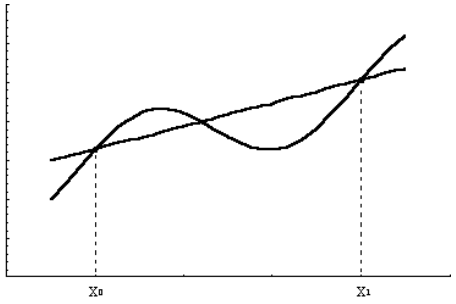
Formule d'erreur :

$$\int_{x_0}^{x_1} E_1(x)dx = h^3 f''(x_1)\int_0^1 \binom{s}{2} ds$$

$$= h^3 f''(x_1)\int_0^1 \frac{s(s-1)}{2} ds$$

$$= h^3 f''(x_1)\left(-\frac{1}{12}\right)$$

Surface sous le trapèze.



Méthode de Simpson 1/3

(quadrature simple)

Polynôme $P_n(x)$ de degré 2

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = h\int_0^2 P_2(s)ds$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2 \right]$$

Formule d'erreur :

Remarque :

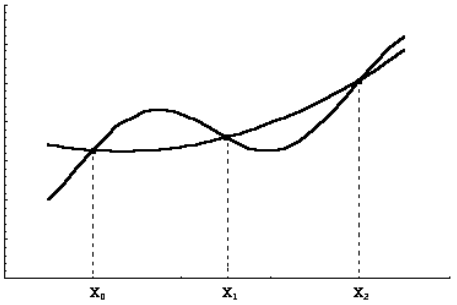
$$\int_0^2 \binom{s}{3} ds = 0$$

Nous gagnons alors un ordre pour l'ereur

$$\int_{x_0}^{x_2} E_2(x)dx = h^5 f^{iv}(\xi_1)\int_0^2 \binom{s}{4} ds$$

$$= h^5 f^{iv}(\xi_1)\left(-\frac{1}{90}\right)$$

Surface sous la parabole.



Méthode de Simpson 3/8
(quadrature simple)

Polynôme $P_n(x)$ de degré 3

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx = h\int_0^3 P_3(s)ds$$

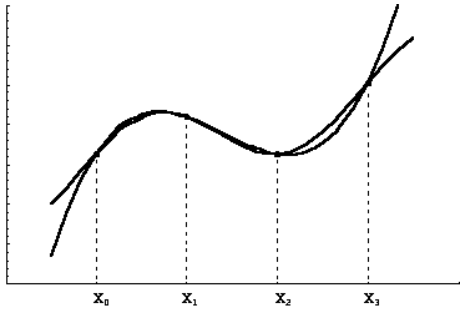
$$= \frac{3}{8}h\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right]$$

Formule d'erreur :

$$\int_{x_0}^{x_3} E_3(x)dx = h^5 f^{iv}(\xi_1)\int_0^3 \binom{s}{4} ds$$

$$= h^5 f^{iv}(\xi_1)\left(-\frac{3}{80}\right)$$

Pas de gain en pratique.



Exemple :

x	f(x) = x³
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216

Calculer
$\int_0^6 f(x)dx$

Règle du trapèze

(n = 1) h = 6

$$\int_0^6 f(x)dx \approx \frac{6}{2}(f_0 + f_6)$$

$$= \frac{6}{2}(0 + 216)$$

$$= 648$$

Simpson 1/3
(n = 2) h = 3

$$\int_0^6 f(x)dx \approx \frac{3}{3}(f_0 + 4f_3 + f_6)$$

$$= \frac{3}{3}(0 + 4*27 + 216)$$

$$= 324$$

Note :

$$\int_0^6 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^6$$

Simpson 3/8
(n = 3) h = 2

$$\int_0^6 f(x)dx \approx \frac{3*2}{8}(f_0 + 3f_2 + 3f_4 + f_6)$$

$$= \frac{3}{4}(0 + 3*8 + 3*64 + 216)$$

$$= 324$$

Remarque :
Assuré d'avoir la bonne réponse car $P_3(x)$

Quadratures Simples

Résumé :

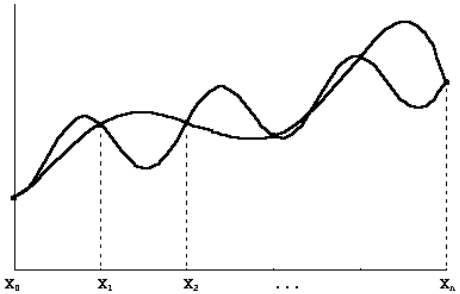
- **La règle du trapèze** (n=1)
  Terme d'erreur d'ordre 3

Intègre exactement un polynôme de degré un
puisque $f'(\xi_1) = 0$ dans ce cas.

- **Les règles de Simpson** (1/3 et 3/8)
  donnent un terme d'erreur d'ordre 5

Intègrent exactement un polynôme de degré 3
puisque $f^{iv}(\xi_1) = 0$ dans ce cas.

Problèmes :



Quadratures composites

2 étapes :

1. Construction d'une succession de polynômes
de Newton Grégory mis bout à bout.

2. Addition des surfaces sous chacun
des polynômes de la représentation

Construction par morceaux
chaque morceau = quadrature simple

Nous parlons alors de quadratures composites.

Quadrature composite du trapèze

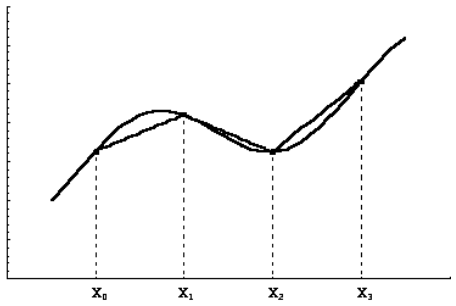
L'aire de chaque trapèze est :

$$T_i = \frac{h}{2}(f_i + f_{i-1}) \qquad pour \quad 1 \le i \le n$$

h est constant = les intervalles sont égaux.

La règle composite du trapèze est :

$$A(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f_i + f_{i-1})$$
$$= \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\}$$

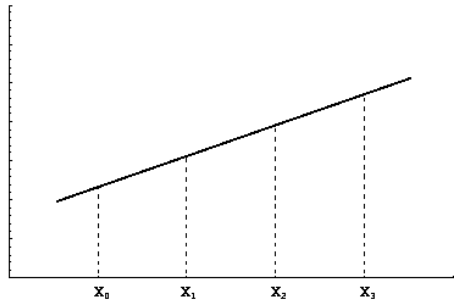


Erreur sur la quadrature composite du trapèze

L'erreur E(f) = I(f) - A(f) sur l'intégrale est :

$$E(f) = \frac{-h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \qquad avec \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$
$$= \frac{-h^2}{12}(x_n - x_0)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$
$$= \frac{-h^2}{12}(x_n - x_0) f''(\xi) \quad avec \quad x_0 \le \xi \le x_n$$

Remarque :
Si f(x) est un polynôme de degré 1 alors A(f) = I(f)
car f''(x) = 0.

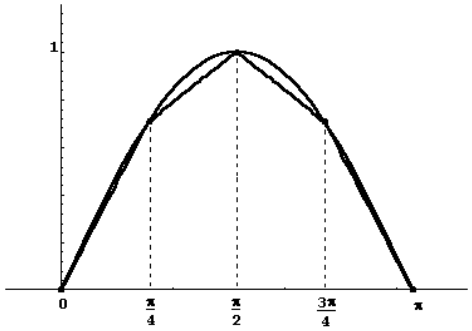


Exemple :

- Approximez $I = \int_0^{\pi} Sin(x)dx$ avec $h = \frac{\pi}{4}$

Valeur exacte : $I = \int_0^{\pi} Sin(x)dx = \left[-Cos(x)\right]_0^{\pi} = 2$

$$A_{h=\frac{\pi}{4}} = h(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{1}{2}f_4)$$



$$A_{h=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2}) \approx 1.896$$

$$E = \frac{-h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\xi) \qquad avec \quad 0 \le \xi \le \pi$$

$$|E| = \frac{\pi^3}{192}|Sin(\xi)| \le \frac{\pi^3}{192} \approx 0.16149 \qquad avec \quad 0 \le \xi \le \pi$$

$$E_{reelle} = I - A_{h=\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2}) \approx 2 - 1.896 \approx 0.1038$$

Exemple (suite) :

Remarque :

Nous pouvons utiliser la formule de l'erreur pour définir la largeur d'un intervalle :

Comment choisir h pour que l'erreur d'intégration obtenue sur $I = \int_0^{\pi} Sin(x)dx$ par la méthode composite des trapèzes soit plus petite que 0.0005 ?

$$E = \frac{-h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\xi) \qquad avec \quad 0 \le \xi \le \pi$$

$$|E| = \frac{\pi}{12}h^2|Sin(\xi)| \le \frac{\pi}{12}h^2 \le 0.0005$$

$$\Leftrightarrow$$

$$h^2 \le \frac{12}{\pi}0.0005$$

$$\Leftrightarrow$$

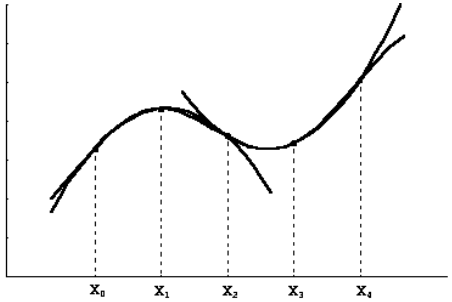
$$h \le 0.044$$

$$n > \frac{\pi}{0.044} \approx 71.8$$

Donc n ≥ 72 intervalles.

Quadrature composite de Simpson 1/3

Nombre pair d'intervalles = nombre impair de points
nb = 2m+1



Sur chaque paire de sous intervalles,
la courbe est remplacée par une parabole.

Pour chaque triplet de valeurs :

$$S_i = \frac{h}{3}(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}) \qquad 1 \le i \le m$$

La règle composite de Simpson 1/3
pour trouver l'intégrale I(f) est :

$$A(f) = \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} S_i = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i})$$

$$= \frac{h}{3}\{f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 4f_{n-1} + f_n\}$$

Erreur de troncature globale pour Simpson 1/3

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{n/2}$$

$$E = -\frac{h^5}{90}\left(\frac{f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \ldots + f^{iv}(\xi_{n/2})}{n/2}\right)n/2$$

$$E = -\frac{h^5}{180} n\, f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{n^4} f^{iv}(\xi)$$

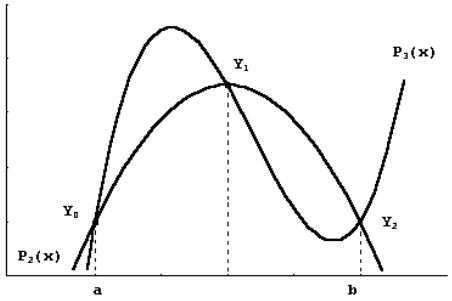
Remarque :

- Si f(x) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 alors A =I.
  E = 0 car $f^{iv}(\xi) = 0$

- $E = O(h^4)$
  Si nous doublons le nombre de sous intervalles alors l'erreur est coupée par un facteur de ≈ 16.

Remarque :

3 points



Le polynôme de degré 2, $P_2(x)$, est passant par ces 3 points est unique.

Mais, il y a une infinité de polynômes de degré 3, (cubiques $P_3(x)$) passant par 3 points donnés

$$\int_a^b P_2(x) = \int_a^b P_3(x) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

où $P_3(x)$ est une cubique quelconque

Preuve (exercice)

Quadrature composite de Simpson 3/8

Sur chaque triplet de sous intervalles,
la courbe est remplacée par une cubique.

Pour chaque 4uplet de valeurs :

$$S_i = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

La règle composite de Simpson 3/8
pour trouver l'intégrale I(f) est :

$$A(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{3}{8}h\left\{f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right\}$$

Erreur de troncature globale pour Simpson 3/8

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{n/3} \quad (n = 3k)$$

$$E = -\frac{3}{80}h^5\left(\frac{f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \ldots + f^{iv}(\xi_{n/3})}{n/3}\right)n/3$$

$$E = -\frac{h^5}{80}n\, f^{iv}(\xi) = -\frac{(b-a)}{80}h^4 f^{iv}(\xi) = -\frac{1}{80}\frac{(b-a)^5}{n^4}f^{iv}(\xi)$$

L'ordre de l'erreur est le même que pour Simpson 1/3 : $O(h^4)$

Intégration de Romberg

Méthode qui utilise :

La quadrature composite du trapèze
et la technique d'extrapolation de Richardson.

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + E$$

$$T_n = \frac{h}{2}\left\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right\}$$

$$T_n - I = \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\xi) \qquad a \le \xi \le b$$

$$a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + a_8h^8 + \ldots \quad (*)$$

* Formule d'Euler Maclaurin
où les coefficient a_j sont indépendants de h.

La méthode de Romberg consiste à appliquer le procédé d'extrapolation de Richardson à la formule d'Euler Maclaurin.

C'est une amélioration de la méthode composite du trapèze.

Intégration de Romberg

$$n = 2^m$$

Définition :

$T_{i,n}$ = Valeur de la quadrature composite
à l'étape i pour n sous domaines.

1. Première étape :
Calcul des quadratures composites :

$$T_{1,n} = \frac{h}{2}\left\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right\}$$

$$T_{1,\frac{n}{2}} = \frac{2h}{2}\left\{f_0 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-2} + f_n\right\}$$

$$T_{1,\frac{n}{4}} = \frac{4h}{2}\left\{f_0 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-4} + f_n\right\}$$

$$T_{1,\frac{n}{8}} = \frac{8h}{2}\left\{f_0 + 2f_8 + \ldots + 2f_{n-8} + f_n\right\}$$

etc...

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_{1,n} + O(h^2)$$
$$= T_{1,\frac{n}{2}} + O((2h)^2)$$
$$= T_{1,\frac{n}{4}} + O((4h)^2)$$
etc...

$T_{1,n}$		
	$T_{2,n/2}$	
$T_{1,n/2}$		$T_{3,n/4}$
	$T_{2,n/4}$	
$T_{1,n/4}$		
$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$

2. Deuxième étape :
1ère Extrapolation de Richardson

$$T_{2,\frac{n}{2}} = T_{1,n} + \frac{1}{2^2-1}\left(T_{1,n} - T_{1,\frac{n}{2}}\right)$$
$$T_{2,\frac{n}{4}} = T_{1,\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^2-1}\left(T_{1,\frac{n}{2}} - T_{1,\frac{n}{4}}\right)$$
$$T_{2,\frac{n}{8}} = T_{1,\frac{n}{4}} + \frac{1}{2^2-1}\left(T_{1,\frac{n}{4}} - T_{1,\frac{n}{8}}\right)$$

etc.

Nous avons alors:

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_{2,\frac{n}{2}} + O(h^4)$$
$$= T_{2,\frac{n}{4}} + O((2h)^2)$$
etc...

3. Troisième étape :
2ème Extrapolation de Richardson

$$T_{3,\frac{n}{4}} = T_{2,\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^4-1}\left(T_{2,\frac{n}{2}} - T_{2,\frac{n}{4}}\right)$$
$$T_{3,\frac{n}{8}} = T_{2,\frac{n}{4}} + \frac{1}{2^4-1}\left(T_{2,\frac{n}{4}} - T_{2,\frac{n}{8}}\right)$$

etc.

Nous avons alors:

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_{3,\frac{n}{4}} + O(h^6)$$
$$= T_{3,\frac{n}{8}} + O((2h)^6)$$
etc...

Nouvelles itérations possibles

Intégration de Romberg

Nous avons donc comme formule générale:

$$T_{k+1,\frac{n}{2}} = \frac{1}{4^k - 1}\left(4^k T_{k,n} - T_{k,n/2}\right)$$

Remarque:

Après la première étape d'extrapolation, la méthode de Romberg est donne la méthode de Simpson 1/3.

1 intervalle de longueur 2h $T_{1,1} = 2h\left(\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_2\right)$

2 intervalle de longueur h $T_{1,2} = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \frac{1}{2}f_2\right)$

$$\frac{4T_{1,2} - T_{1,1}}{3} = \frac{h}{3}\left(2f_0 + 4f_1 + 2f_2 - f_0 - f_2\right)$$
$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$

Exemple :

Calculer une valeur approchée de I par la méthode de Romberg.
entre 0.0 et 0.8

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	0.000	0.199	0.389	0.565	0.717

Attention :

1. Première étape :
Calcul des quadratures composites :

$$\text{n=4}\quad T_{1,4} = \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\}$$

$$T_{1,4} = \frac{0.2}{2}\{0 + 2*0.199 + 2*0.389 + 2*0.565 + 0.717\}$$

$$T_{1,4} = 0.3023$$

$$\text{n=2}\quad T_{1,2} = \frac{2h}{2}\{f_0 + 2f_2 + f_4\}$$

$$T_{1,2} = \frac{2h}{2}\{0 + 2*0.389 + 0.717\}$$

$$T_{1,2} = 0.299$$

$$\text{n=1}\quad T_{1,1} = \frac{4h}{2}\{0 + 0.717\}$$

$$T_{1,1} = 0.2868$$

Ordre de l'erreur $O(h^2)$

2. Deuxième étape :
1ère Extrapolation de Richardson

$$T_{2,2} = T_{1,4} + \frac{1}{2^2 - 1}\left(T_{1,4} - T_{1,2}\right)$$

$$T_{2,2} = 0.3023 + \frac{1}{2^2 - 1}(0.3023 - 0.299)$$

$$T_{2,2} = 0.3034$$

$$T_{2,1} = T_{1,2} + \frac{1}{2^2 - 1}\left(T_{1,2} - T_{1,1}\right)$$

$$T_{2,1} = 0.299 + \frac{1}{2^2 - 1}(0.299 - 0.2868)$$

$$T_{2,1} = 0.303066$$

Ordre de l'erreur $O(h^4)$

3. Troisième étape :
2ème Extrapolation de Richardson

$$T_{3,1} = T_{2,2} + \frac{1}{2^4 - 1}\left(T_{2,2} - T_{2,1}\right)$$

$$T_{3,1} = 0.3034 + \frac{1}{2^4 - 1}(0.3034 - 0.303066)$$

$$T_{3,1} = 0.3034222$$

Ordre de l'erreur $O(h^6)$

Méthode des Quadratures gaussiennes

Polynôme de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{48}(693x^6-945x^4+315x^2-5)$$

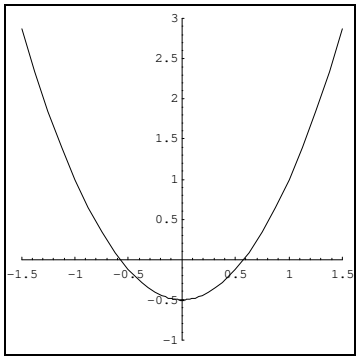
Racines des polynômes de Legrendre

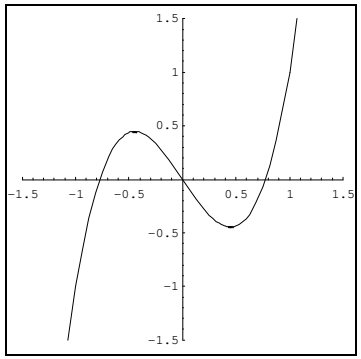
Théorème:
$P_n(x)$ possède n racines réelles, toutes situées entre -1 et 1.

Exemple:

$$n=1 \quad P_1(x) = x = 0 \iff x = 0$$

$$n=2 \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = 0$$
$$\iff 3x^2 = 1$$
$$\iff x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$





$$n=3 \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) = 0$$
$$\iff x(5x^2-3) = 0$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

Méthode des Quadratures gaussiennes

Théorème :

Si P est un polynôme de degré inférieur ou égale à 2n-1, alors

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{w}_i P(t_i)$$

où $\mathsf{w}_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} dt$

et

$t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ sont les zéros du $n^{ième}$ polynôme de Legendre.

Exemple : Quadrature gaussienne avec 2 termes.

Soit P(t) un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 3.

Posons : $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2)$ n=2

Trouvons t_1, t_2, ω_1, ω_2 pour que le membre de droite donne la valeur exacte de l'intégrale, quelque soit le polynôme de degré inférieur à 3 considéré.

Soit $P(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ a_0, a_1, a_2, a_3 quelconque.

$$\int_{-1}^{1}(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0)dt = \omega_1(a_3t_1^3 + a_2t_1^2 + a_1t_1 + a_0) + \omega_2(a_3t_2^3 + a_2t_2^2 + a_1t_2 + a_0)$$

$$a_3(0) + a_2(\frac{2}{3}) + a_1(0) + a_0(2) = a_3(\omega_1t_1^3 + \omega_2t_2^3) + a_2(\omega_1t_1^2 + \omega_2t_2^2) + a_1(\omega_1t_1 + \omega_2t_2) + a_0(\omega_1 + \omega_2)$$

$$(1) \quad \omega_1t_1^3 + \omega_2t_2^3 = 0$$

$$(2) \quad \omega_1t_1^2 + \omega_2t_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad \omega_1t_1 + \omega_2t_2 = 0$$

$$(4) \quad \omega_1 + \omega_2 = 2$$

$$(1) \quad \omega_1t_1^3 + \omega_2t_2^3 = 0$$

$$(3)*t_1^2 \quad \omega_1t_1^3 + \omega_2t_2t_1^2 = 0$$

$$(1) - (3)*t_1^2 \quad \omega_2t_2(t_2^2 - t_1^2) = 0$$

$$\omega_2 t_2 (t_2 - t_1)(t_2 + t_1) = 0$$

$$\omega_2 = 0 \text{ ou } t_2 = 0 \text{ ou } t_2 = t_1 \text{ ou } t_2 = -t_1$$

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = P(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + P(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Quel que soit le polynôme P(t) de degré ≤ 3.

Application :

Soit f(t) quelconque et (Maclaurin) :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + R_4$$

P(t) polynôme de degré 3.

$$f(t) = P(t) + R_4$$

$$f(t) \approx P(t)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \int_{-1}^{1} P(t)dt = P(t_1) + P(t_2)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx f(t_1) + f(t_2)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Quadrature gaussienne avec n termes

Soit P(t) un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 2n-1.

Posons : $\int_{-1}^{1} P(t)dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) + \ldots + \omega_n P(t_n)$

Trouvons t_1, t_2, ..., t_n, ω_1, ω_2, ..., ω_n pour que le membre de droite donne la valeur exacte de l'intégrale, quelque soit le polynôme de degré inférieur à 2n-1 considéré.

Application :

Soit f(t) quelconque :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}t^{2n-1} + R_{2n}$$

P(t) polynôme de degré 2n-1.

$$f(t) \approx P(t)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \int_{-1}^{1} P(t)dt = \omega_1 P(t_1) + \omega_2 P(t_2) + \ldots + \omega_n P(t_n)$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \ldots + \omega_n f(t_n)$$

Rappel :

- Dans la formule de Gauss à n termes, t_1, t_2, ..., t_n sont les racines du polynôme de Legendre Pn(t) de degré n.
- $\omega_i = \int_{-1}^{1} L_i(t)dt$

où $L_i(t)$ sont les polynômes de base qui correspondent aux abscisses t_1, t_2, ..., t_n dans la formule de Lagrange du polynôme de collocation.

Exemple : n = 2

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$L_1(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_1 - t_2)} = \frac{t - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{2}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}\ t - 1)$$

$$\omega_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\sqrt{3}\ t - 1)dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - t\right]_{-1}^{1}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\right]$$

$\omega_1 =$

Même chose pour ω_2

Nous allons donc construire une table contenant
Pour différentes valeurs de n,
les racines du polynôme de Legendre de degré n
et les valeurs des poids correspondants.

n	Racines	Coefficients
2	0.5773502692	1
	-0.5773502692	1
3	0.774596692	0.5555555556
	0	0.8888888889
	-0.774596692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Remarque:

La fonction f(x) doit être connue.

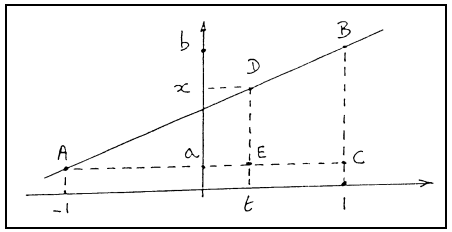
Application à un domaine d'intégration quelconque

$$I = \int_{x=a}^{x=b} g(x)dx$$

Effectuer un changement de variable :

x = x(t)

tel que lorsque t varie de -1 à 1
x varie de a à b.
$dx = x'(t)dt$



$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{x-a}{t-(-1)} = \frac{b-a}{1-(-1)}$$

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2}dt$$

$$I = \int_{x=a}^{x=b} g(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{t=-1}^{t=1} g(x(t))dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left\{\omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \ldots + \omega_n f(t_n)\right\}$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left\{\omega_1 g(x(t_1)) + \omega_2 g(x(t_2)) + \ldots + \omega_n g(x(t_n))\right\}$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\left\{\omega_1 g(x_1) + \omega_2 g(x_2) + \ldots + \omega_n g(x_n)\right\}$$

n choix de l'usager.

Exemple :

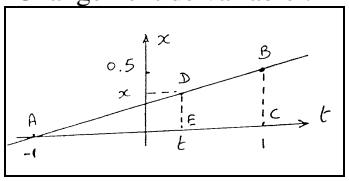
Calculer l'intégrale suivante par la méthode de Gauss à 3 termes :

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$$

- Changement de variable :

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{x-a}{t+1} = \frac{0.5}{2}$$



$$x = \frac{1}{4}(t+1)$$

$$dx = \frac{1}{4} dt$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4} \int_{t=-1}^{t=1} e^{-\frac{1}{16}(t+1)^2} dt$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{t=-1}^{t=1} e^{-\frac{1}{16}(t+1)^2} dt$$

$$I \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \omega_3 f(t_3) \right\} = 0.520500184$$

$$f(t_1) = e^{-\frac{1}{16}(t_1+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}(-0.77459667+1)^2} = 0.99682962$$

$$f(t_2) = e^{-\frac{1}{16}(t_2+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}} = 0.939413062$$

$$f(t_3) = e^{-\frac{1}{16}(t_3+1)^2} = e^{-\frac{1}{16}(1.77459667)^2} = 0.821334696$$

Méthode des Quadratures gaussiennes

La méthode de Gauss est très utile.

Nécessite moins de calculs:

Exemple formule de Gauss à 2 termes:

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = P(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + P(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

est exacte quelque soit P(t) de degré inférieur ou égal à 3.

Pour avoir le même résultat avec Newton Cotes, il faut utiliser Simpson 1/3 ou 3/8 (Polynôme P(x) de degré 3).

$$\int_a^b P_2(x) = \int_a^b P_3(x) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx = \frac{3}{8}h\left[P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3\right]$$

Il y a 3 ou 4 termes à évaluer !
Seulement 2 pour la méthode de Gauss.

Problème:

Si la fonction est inconnue ⇔ Nous avons une table.

Méthode des coefficients indéterminés

Si la fonction est inconnue ⇔ Nous avons une table.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

ω_i : **Poids** de la quadrature.
x_i : **Points** de la quadrature

Principe :

Si les points sont fixés,
déterminer les poids. (f(x) = P(x))

Remarques :

1. Se servir des bornes :
$x_0 = -1$ et $x_n = 1$

(simplification des calculs)

2. Imposer les polynômes de base
x^j pour j = 0 à n.
Calculer les poids.

Exemple:

Trouver a, b et c tel que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = a\ f(-1) + b\ f(0) + c\ f(1)$$

Imposer les polynômes de base
x^j pour j = 0 à 2.

$$f(x) = 1, \qquad f(x) = x, \qquad f(x) = x^2$$

$$f(x) = 1, \qquad \int_{-1}^{1} 1 dx = [x]_{-1}^{1} = 2 = a\ (1) + b\ (1) + c\ (1)$$

$$a + b + c = 2$$

$$f(x) = x, \qquad \int_{-1}^{1} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0 = a\ (-1) + b\ (0) + c\ (1)$$

$$-a + c = 0$$

$$f(x) = x^2, \qquad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = a\ (1) + b\ (0) + c\ (1)$$

$$a + c = \frac{2}{3}$$

Solution:

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{4}{3},\ c = \frac{1}{3}$$

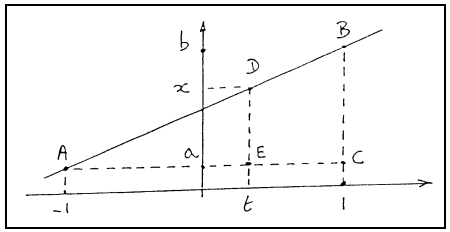
Remarque:

Si nous utilisons le résultat précédent pour calculer:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$$

Effectuer un changement de variable : x = x(t)

tel que lorsque t varie de -1 à 1
x varie de x_0 à x_0+2h.



$$\frac{x(t)-x_0}{t-(-1)} = \frac{x_0+2h-x_0}{1-(-1)} \qquad x = \frac{2h\ t+2x_0+2h}{2} = h\ t+x_0+h$$

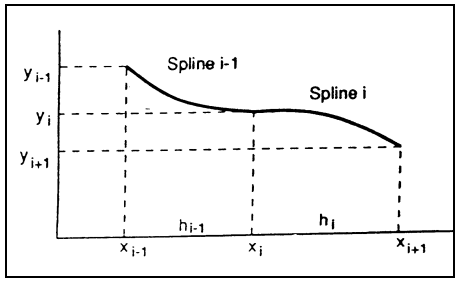
$$dx = h\ dt$$

$$I = \int_{x=x_0}^{x=x_0+2h} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{t=-1}^{t=1} f(x(t))dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt$$

$$\approx \frac{2h}{2}\left\{\frac{1}{3}g(t_1)+\frac{4}{3}g(t_2)+\frac{1}{3}g(t_3)\right\}$$

$$\approx \frac{1}{3}h\left\{f(x(t_1))+4f(x(t_2))+f(x(t_3))\right\}$$

Dérivation des splines cubiques



Dans l'intervalle de longueur h_i,
la spline est un polynôme

$$P_{3,i}(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

ses dérivées sont :

$$P'_{3,i}(x) = 3a_i(x-x_i)^2 + 2b_i(x-x_i) + c_i$$

$$P''_{3,i}(x) = 6a_i(x-x_i) + 2b_i$$

Aux abscisses de collocations :

$$P'_{3,i}(x) = c_i$$

$$P''_{3,i}(x) = 2b_i$$

Intégration des splines cubiques

L'intégration de la spline devient :

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{3,i}(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{4}(x-x_i)^4 + \frac{b_i}{3}(x-x_i)^3 + \frac{c_i}{2}(x-x_i)^2 + d_i x \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{4}(x_{i+1}-x_i)^4 + \frac{b_i}{3}(x_{i+1}-x_i)^3 + \frac{c_i}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 + d_i(x_{i+1}-x_i) \right]$$

Exprimée en fonction
des pas

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{4}h_i^4 + \frac{b_i}{3}h_i^3 + \frac{c_i}{2}h_i^2 + d_i h_i \right]$$

Pour un pas constant $h_i = h$, nous avons :

$$\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)dx = \frac{h^4}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{h^3}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i + h\sum_{i=1}^{n} d_i$$

Intégrale impropres et indéfinies

$$I_1 = \int_0^{\infty} x\, e^{-x} dx \qquad I_2 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \qquad I_3 = \int_0^t x\sqrt{x^2+1}\, dx$$

- $I_1 = ?$

$$I_1 = \int_0^1 x\, e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x\, e^{-x} dx$$

avec $$\int_1^{\infty} x\, e^{-x} dx = \int_1^0 \frac{1}{y}\, e^{-\frac{1}{y}} \left(-\frac{dy}{y^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{y^3}\, e^{-\frac{1}{y}} dy$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{y^3}\, e^{-\frac{1}{y}} \right) = 0$$

$$I_1 = \int_0^A x\, e^{-x} dx \quad \text{A}\to\infty$$

A	I_1
1	0.26424
10	0.99950
100	1.00001
1000	1.00001
10000	1.00001
∞	1.0000

- $I_2 = ?$

$$I_2 = \int_B^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{B}\to 0$$

- $I_3 = ?$

Intégrales multiples

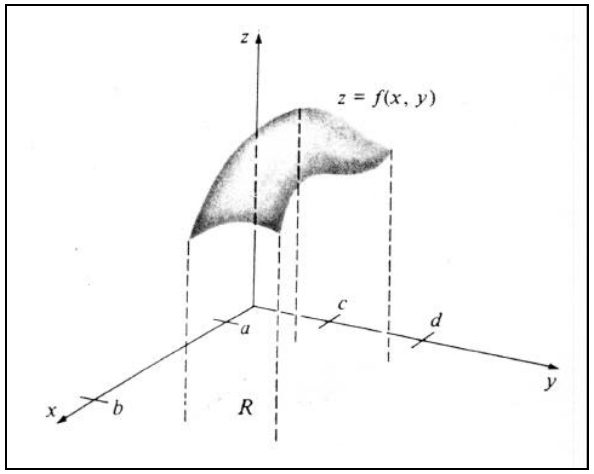
1. Les limites de l'intégration sont des constantes.

Ici nous avons :

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Pour calculer cette intégrale, nous considérons x contant lorsque nous intégrons par rapport à y et y contant lorsque nous intégrons par rapport à x.

Nous appliquons alors la méthode que nous voulons.



Exemple :

Intégrer la fonction donné par la table suivante dans la région A déterminée par x=1.5 , x=3.0 et y=0.2, y=0.6.

x\y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.5	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841

Nous allons intégrer avec la méthode des trapèzes dans la direction x et la méthode de Simpson 1/3 en y.

Commençons par y constant :

$$y = 0.2: \quad \int_{1.5}^{3.0} f(x,y)dx = \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.2)dx$$
$$= \frac{h}{2}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$
$$= \frac{0.5}{2}(0.990 + 2(1.568) + 2(2.520) + 4.090)$$
$$= 3.3140$$

$$y = 0.3: \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.3)dx = \frac{0.5}{2}(1.524 + 2(2.384) + 2(3.800) + 6.136)$$
$$= 5.0070$$

En faisant de même, nous obtenons :

$y = 0.4$: $\int_{1.5}^{3.0} f(x,0.4)dx = 6.6522$

$y = 0.5$: $\int_{1.5}^{3.0} f(x,0.5)dx = 8.2368$

$y = 0.6$: $\int_{1.5}^{3.0} f(x,0.6)dx = 9.7435$

Intégrons maintenant en y suivant la règle de Simpson 1/3.

$$\int_{0.2}^{0.6} f(x,y)dy = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + 4f_3 + 4f_4 + f_5)$$
$$= \frac{0.1}{3}(3.3140 + 4(5.0070) + 4(6.6522) + 4(8.2368) + 9.7435)$$
$$= 2.6446$$

Intégrales multiples avec limites variables

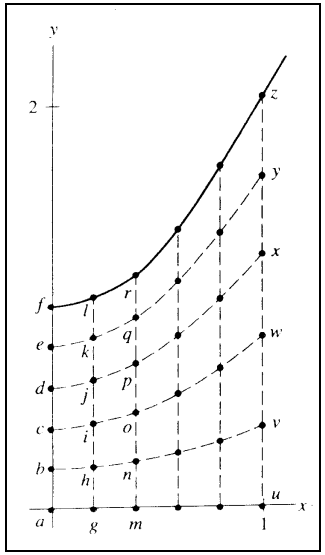
2. Les limites de l'intégration sont **variables**

Ici, nous avons par exemple :

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x,y)dydx$$

La surface sous laquelle nous cherchons le volume n'est pas un rectangle dans le plan défini par les axes x et y.

la région considérée est :



Si nous utilisons une quadrature composite du trapèze avec 5 sous intervalles dans chaque direction, nous obtenons :

$$S_1 = \frac{h_1}{2}(f_a + 2f_b + 2f_c + 2f_d + 2f_e + f_f)$$
$$S_2 = \frac{h_2}{2}(f_g + 2f_h + 2f_i + 2f_j + 2f_k + f_l)$$
$$S_3 = \frac{h_3}{2}(f_m + 2f_n + 2f_o + \ldots)$$
...
$$S_6 = \frac{h_6}{2}(f_u + 2f_v + 2f_w + 2f_x + 2f_y + f_z)$$

Nous avons la valeur de $\int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x,y)dydx$ par :

$$I = \frac{h_x}{2}(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 + 2S_5 + S_6)$$

Exemple :

Calculer $\int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x,y)dydx$ avec une quadrature composite du trapèze avec 5 sous intervalles dans chaque direction :
f(x,y) = x y

f(0,y) = 0 $\qquad x^2 + 1 = 1$

$$S_1 = \frac{1.0/5}{2}(0+0+0+0+0+0) = 0$$

f(0.2,y) = 0.2 y

$$S_2 = \frac{1.04/5}{2}(0 + 0.0832 + 0.1664 + 0.2496 + 0.3328 + 0.208)$$
$$= 0.1082$$

$$S_3 = \frac{1.16/5}{2}(0 + 1.1856 + 0.3712 + 0.5568 + 0.7428 + 0.464)$$
$$= 0.2692$$
$$S_4 = 0.5549$$
$$S_5 = 1.0758$$

$$S_6 = \frac{2.0/5}{2}(0 + 0.8 + 1.6 + 2.4 + 3.2 + 2.0) = 2.0$$

$$I = \frac{0.2}{2}(0 + 0.2164 + 0.5384 + 1.1098 + 2.1516 + 2.0) = 0.6016$$

Valeur analytique : I = 0.583333