Ift 2421

Chapitre 6

Résolution des équations différentielles:

Conditions initiales

Résolution numérique des équations différentielles

Rappels:

2 grandes classes:

1. Les équations différentielles ordinaires:
une seule variable.

2. Les équations aux dérivées partielles:
plusieurs variables.
(équation de la chaleur, des ondes, ...)

Ordre d'une équation différentielle : dérivée la plus élevée.

Équation différentielle linéaire :

émission radioactive : $\frac{dR(t)}{dt} = -\lambda R(t)$

Équation différentielle non linéaire :

Variation de population : $\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)^{1.7}$

Convection : $\frac{du(t)}{dt} = -k(u(t) - T)^{\frac{5}{4}}$

nécessite des conditions initiales.

Résolution numérique des équations différentielles

Exemple du pendule :

Équation différentielle non linéaire
du second ordre.

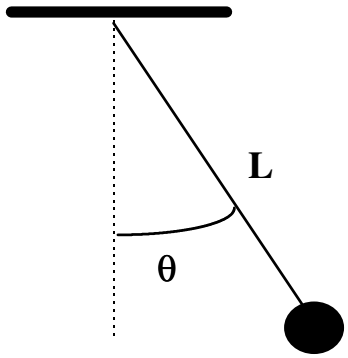
Impossible de trouver une solution analytique.

Pour de petit mouvements :
$Sin(\theta) \approx \theta$

Équation du pendule:
t: temps
θ: Position angulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} Sin(\theta) = 0$$

Conditions initiales usuelles:
$$\theta(t_0) = \theta_0$$
$$\theta'(t_0) = \theta_0'$$



Méthode des séries de Taylor

Ordre 1:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

Développement de Taylor au voisinage de $t_j = t_0 + j\,h$

$$y_{j+1} = y_j + h\,y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + \frac{h^3}{6} y'''(t_j) + O(h^4)$$

Devient:
$$y_{j+1} = y_j + h\,f(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j) + \frac{h^3}{6} f''(t_j, y_j) + O(h^4)$$

Remarques:

1. L'ordre local est en h^4.
2. Pas d'estimée de l'erreur.
3. Les dérivées de la fonction f(t,y(t)) se font:

$$\frac{df}{dt} = f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f$$

4. Si l'ordre local est en h^n , **l'ordre global** sera en h^{n-1}.

Exemple:

Appliquer la méthode de Taylor avec un pas h = 0.1
et un ordre local en h^3 pour:

$$y'(t) = f(t, y(t)) = -t\ y^2(t)$$
$$y(t_0) = y_0 = 1$$

Solution analytique: $y(t) = \frac{2}{2+t^2}$

Le pas est h = 0.1, nous allons calculer les valeurs de y(t)pour
t = 0, t = 0.1, t = 0.2, ..., etc.

Si nous utilisons un ordre local en h^3, nous avons:

$$y_{j+1} = y_j + h\,y'(t_j) + \frac{h^2}{2}y''(t_j) + O(h^3)$$

Exprimons $y''(t)$

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = -\ y^2(t) + (-t)\ 2\ y(t)\ y'(t)$$

or $y'(t) = f(t, y(t)) = -t\ y^2(t)$

donc $y''(t) = -\ y^2(t) + (-t)\ 2\ y(t)\ (-t\ y^2(t))$

$$y''(t) = -\ y^2(t) + 2\ t^2\ y^3(t)$$

La formule de Taylor d'ordre local h^3 devient alors:

$$y_{j+1} = y_j + h(-t_j\ y^2(t_j)) + \frac{h^2}{2}(-y^2(t_j) + 2\ t_j^2\ y^3(t_j)) + O(h^3)$$

pour $t_1 = t_0 + h$

$$y_1 = y_0 - h\ t_0\ y^2(t_0) + \frac{0.1^2}{2}(-y^2(t_0) + 2\ t_o^2\ y^3(t_0))$$

$$y_1 = 1 - 0.005 = 0.995$$

Valeur exacte: $y(0.1) = \frac{2}{2+0.1^2} = \frac{2}{2.01} \approx 0.99502487...$

pour $t_2 = t_0 + 2h$

$$y_2 = y_1 - h\ t_1\ y^2(t_1) + \frac{h^2}{2}(-y^2(t_1) + 2\ t_1^2\ y^3(t_1))$$

$$y_2 = 0.995 - 0.1\ (0.1(0.995)^2) + \frac{0.1^2}{2}(-(0.995)^2 + 2\ \ 0.1^2\ (0.995)^3)$$

$$y_2 = 0.9802486...$$

Valeur exacte: $y(0.2) = \frac{2}{2+0.2^2} = \frac{2}{2.04} \approx 0.980392156...$

pour $t_3 = t_0 + 3h$ Etc.

Ordre global h^2.

Méthode d'Euler (ordinaire)

Ordre 1:

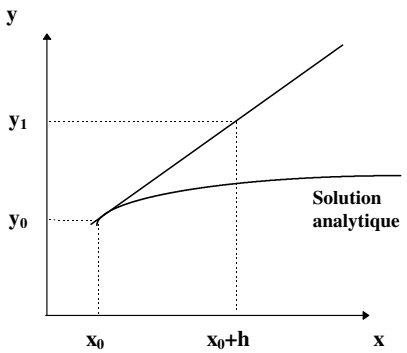
$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

Méthode d'Euler = Méthode de Taylor
d'ordre local en h^2.
Ordre global en h.

$$y_{j+1} = y_j + h\, y'(t_j) + O(h^2)$$

$$y_{j+1} = y_j + h\, f(t_j, y(t_j)) + O(h^2)$$

Interprétation géométrique:



Erreur globale vs Erreur locale

Y_n = Valeur calculée en x_n.

y_n = Valeur exacte en x_n.

$e_n = y_n - Y_n$ = erreur en Y_n; $\quad Y_n = y_n + e_n$

Avec la méthode d'Euler, nous avons:

$$Y_{n+1} = Y_n + h\, f(t_n, Y_n)$$

En utilisant les séries de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \qquad \text{avec } x_n \le \xi_n \le x_n + h$$

$$e_{n+1} = y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n - Y_n + h\left[f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)\right] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$e_{n+1} = e_n + h\left[\frac{f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)}{(y_n - Y_n)}\right](y_n - Y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$e_{n+1} = e_n + h\, f_y(x_n, \eta_n) e_n + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{avec } \eta_n \textit{ entre } y_n \textit{ et } Y_n$$

$$e_{n+1} \le (1 + hK) e_n + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Erreur globale vs Erreur locale (suite)

$$e_0 = 0$$

$$e_1 \le (1+hK)e_0 + \frac{h^2}{2}y''(\xi_0) = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0)$$

$$e_2 \le (1+hK)\left[\frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0)\right] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_1) = \frac{1}{2}h^2\left[(1+hK)y''(\xi_0) + y''(\xi_1)\right]$$

$$e_3 \le \frac{1}{2}h^2\left[(1+hK)^2 y''(\xi_0) + (1+hK)y''(\xi_1) + y''(\xi_2)\right]$$

...

$$e_n \le \frac{1}{2}h^2\left[(1+hK)^{n-1} y''(\xi_0) + (1+hK)^{n-2} y''(\xi_1) + \ldots + 1\ y''(\xi_{n-1})\right]$$

$$e_n \le \frac{1}{2}h^2 M\left[(1+hK)^{n-1} + (1+hK)^{n-2} + \ldots + 1\right]$$

Sachant que :

$$1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1} = \frac{s^n - 1}{s-1}$$

Nous obtenons :

$$e_n \le \frac{1}{2}h^2 M\frac{(1+hK)^n - 1}{(1+hK)-1} \quad \Leftrightarrow \quad e_n \le \frac{hM}{2K}(1+hK)^n - \frac{hM}{2K}$$

$$e^{hK} = 1 + hK + \frac{(hK)^2}{2} + \frac{(hK)^3}{3} + \ldots \qquad \text{Maclaurin}$$

$$1 + hK < e^{hK} \qquad (K > 0)$$

$$e_n \le \frac{hM}{2K}(e^{hK})^n - \frac{hM}{2K} = \frac{hM}{2K}\left(e^{nhK} - 1\right) = \frac{hM}{2K}\left(e^{(x_n - x_0)K} - 1\right) = O(h)$$

Méthode d'Euler modifiée

Taylor d'ordre local en h^3 :

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2}f'(t_j, y_j) + O(h^3)$$

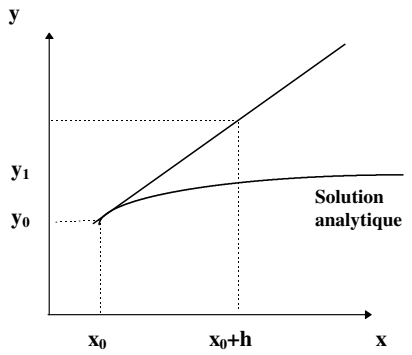
Différence avant pour évaluer f' :

$$f'(t_j, y_j) = \frac{f(t_{j+1}, y_{j+1}) - f(t_j, y_j)}{h} + O(h)$$

Formule d'Euler modifiée :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})\right] + O(h^3)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[y'_j + y'_{j+1}\right] + O(h^3)$$



Méthode d'Euler ordinaire
Algorithme

y_0 donné

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j))$$

Une seule étape de calcul

Ordre global en h.

Méthode d'Euler modifiée
Algorithme

y_0 donné

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j))$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}) \right].$$

Deux étapes de calcul:

1. la **prédiction**.
2. La **correction**.

Ordre global en h^2.

Méthode d'Euler ordinaire
Pour résoudre:

$$y'(t) = -t\ y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

t_i	y_i	erreur
0.1	1.0000	$-5.0\ 10^{-3}$
0.2	0.9900	$-9.6\ 10^{-3}$
0.3	0.9704	$-1.3\ 10^{-2}$
0.4	0.94215	$-1.6\ 10^{-2}$

Méthode d'Euler modifié
Pour résoudre:

$$y'(t) = -t\ y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

t_i	y_i prédit	y_i corrigé	erreur
0.1	1.000000	0.995000	$2.5\ 10^{-5}$
0.2	0.985100	0.980346	$4.6\ 10^{-5}$
0.3	0.961124	0.956878	$6.0\ 10^{-5}$
0.4	0.929410	0.925868	$6.0\ 10^{-5}$
0.5	0.891579	0.888851	$3.8\ 10^{-5}$
0.6	0.847458	0.847458	$5.2\ 10^{-8}$

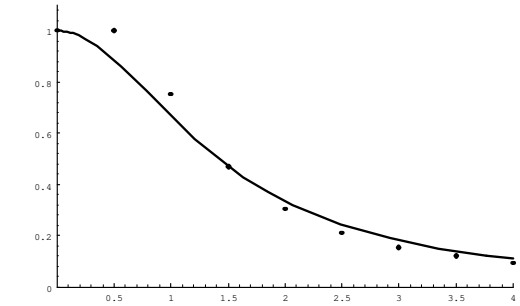
Note: L'étape de correction peut être répétée 2 à 3 fois, au delà, il est préférable de réduite h.

Méthode d'Euler ordinaire

$$y'(t) = -t\ y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

h =0.5

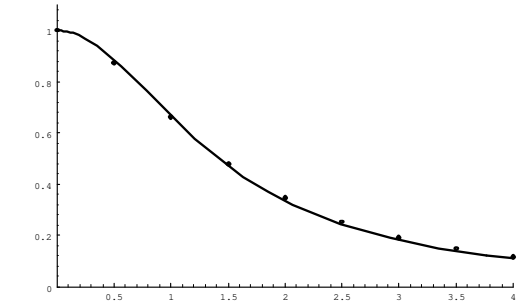
t_i	y_i
0	1
0.5	1
1.	0.75
1.5	0.46875
2.	0.303955
2.5	0.211566
3.	0.155616
3.5	0.119291
4.	0.0943882



Méthode d'Euler Modifié

h =0.5

t_i	y_i
0	1
0.5	0.875
1.	0.662472
1.5	0.479149
2.	0.345942
2.5	0.254107
3.	0.191201
3.5	0.147512
4.	0.116497



Méthode de Runge Kutta
Développement à l'ordre 2

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + a k_1 + b k_2$$

Trouver les valeurs de : a, b, α et β.

Développement de Taylor :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + O(h^3)$$

or

$$f'(x_n, y_n) = (f_x + f_y y')_n$$
$$= (f_x + f_y f)_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)_n + O(h^3) \qquad (1)$$

Algorithme de Runge Kutta d'ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + ah f(x_n, y_n) + bh f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))$$

Développons au premier ordre :

$$f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n)) \cong f_n + (f_x)_n \alpha h + (f_y)_n \beta h f_n$$

$$y_{n+1} = y_n + (a+b) h f_n + h^2 \left\{ (f_x)_n \alpha b + (f_y)_n \beta b f_n \right\} \qquad (2)$$

Méthode de Runge Kutta : développement à l'ordre 2

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + a k_1 + b k_2$$

Trouver les valeurs de : a, b, α et β.

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f)_n + O(h^3) \qquad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + (a+b) h f_n + h^2 \left\{ (f_x)_n \alpha b + (f_y)_n \beta b f_n \right\} \qquad (2)$$

En forçant (1) = (2), nous avons :

$$a + b = 1$$
$$a\ b = \frac{1}{2}$$
$$b\ b = \frac{1}{2}$$

Ordre local en h^3
Ordre global en h^2.

Choix Courants :

$a = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2}$ *et* $\alpha = \beta = 1$ $\rightarrow$ Type I : Euler modifié

$a = 0 \rightarrow b = 1$ *et* $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ Type II

$a = \frac{2}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3}$ *et* $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Type III

Méthode de Runge Kutta d'ordre global 2

Le plus courant :

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h f(x_n + \frac{3}{2}h, y_n + \frac{3}{2} k_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + O(h^3)$$

Méthode de Runge Kutta d'ordre global 4

Le plus courant :

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} k_1)$$
$$k_3 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} k_2)$$
$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5)$$

Les méthodes de Runge Kutta sont très efficaces car :

1. Elles suivent de près la solution analytique.

2. Avec une valeur du pas relativement élevé.

3. Moins coûteux que les autres méthodes pour un $O(h^n)$ donné.

Pas encore d'approximation de l'erreur commise.

Nécessité de choisir le pas en fonction de l'erreur maximale recherchée.

Solution : calculer avec un pas égal à h, h/2, ...
Jusqu'à la stabilité de la solution.
Coût élevé !

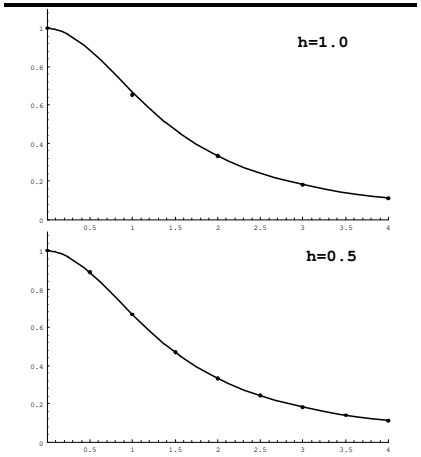
Les méthodes qui ajustent le pas sont dites méthodes **à pas adaptatif.**

Méthode de Runge Kutta d'ordre global h^4 :

$$y'(t) = -t\ y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

h =0.1

t_i	y_i	y_i Réel
0	1	1
0.1	0.9950249	0.9950249
0.2	0.9803922	0.9803922
0.3	0.9569377	0.9569378
0.4	0.9259258	0.9259259



Algorithme de Runge Kutta Merson d'ordre global 4 avec estimé de l'erreur.

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1) \qquad k_3 = h f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2)$$

$$k_4 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3) \qquad k_5 = h f(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^5)$$

$$E \approx \left[\frac{1}{15}k_1 - \frac{3}{10}k_3 + \frac{4}{15}k_4 - \frac{1}{30}k_5\right]$$

Algorithme de Runge Kutta Fehlberg d'ordre global 5 avec estimé de l'erreur.

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1) \qquad k_3 = h f(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = h f(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = h f(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^6)$$

$$E \approx \left[\frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right]$$

Exemple : Algorithme de Runge Kutta Fehlberg d'ordre global 5 avec estimé de l'erreur.

$$y'(t) = -t\ y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

h =0.1

t_j	y_j	Erreur
0	1	0.0
0.1	0.95025	$7.47241\ 10^{-8}$
0.2	0.980392	$1.97673\ 10^{-7}$
0.3	0.956938	$2.75904\ 10^{-7}$
0.4	0.925926	$2.98256\ 10^{-7}$
0.5	0.888889	$2.69385\ 10^{-7}$
0.6	0.847457	$2.01399\ 10^{-7}$

$y_6 = \underline{0.847457}$

Méthode efficace et populaire avec contrôle de l'erreur.

Méthodes à pas unique

utilisent seulement le pas précédent :

y_n et y'_n

Exemples :
Méthodes de Taylor et de Runge Kutta.

Méthodes à pas multiples
(multistep methods)

utilisent plusieurs pas précédents :

y_n et y'_n
et aussi y_{n-1} et y'_{n-1}

(y_{n-2} et y'_{n-2} possible)

Méthodes ouvertes

n'utilisent que les valeurs précédentes

y_n , y_{n-1} , y_{n-2} ...

Méthodes fermées

(de type prédiction correction)

utilisent autant les valeurs précédentes

y_n , y_{n-1} , y_{n-2} ...

que les valeurs suivantes
y_{n+1} , y_{n+2} ...

Exemple : méthode d'Euler modifiée.

Méthode d'Adams

Équations différentielles sous la forme

$$dy = f(x,y)\,dx$$

à intégrer sur $[x_n, x_{n+1}]$:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

remplacer la fonction f(x,y(x))
par un polynôme de collocation : x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ...

Polynôme quadratique de Newton Grégory descendant :

$$P_2(s) = f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}h^3 f'''(\xi)$$

Calcul des intégrales :

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2}\right] + O(h^4)$$

$$= y_n + \frac{h}{12}\left[23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}\right] + O(h^4)$$

Note :
Le résultat sera **d'ordre local n+2** pour un polynôme de degré **n**.
Attention : Degré trop élevé ⇒ erreurs d'arrondis.

Méthodes d'Adams

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} \right] + O(h^4)$$

$$= y_n + \frac{h}{12}\left[23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}\right] + O(h^4)$$

Remarques :

1. Pour démarrer, les valeurs de y_0', y_1' et y_2' (donc f_0, f_1, et f_2) sont nécessaires. Amorçage : méthode de Runge Kutta.

2. Pas question d'adapter le pas directement.

3. Problème : extrapolation avec le polynôme de collocation ; moins précis qu'interpolation.

Adams (ordre local en h^3)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3 f_n - f_{n-1}\right] + O(h^3)$$

Adams (ordre local en h^5)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right] + O(h^5)$$

Méthodes d'Adams Moulton

(prédiction correction)

2 étapes :

1. une étape de **prédiction** où nous extrapolons
$\Rightarrow$ approximation de y_{n+1}

2. une étape de **correction** où nous interpolons pour trouver y_{n+1} en se servant de f_{n+1} tel que prédit par la première étape.

Méthode d'Adams Moulton (d'ordre local en h^4)

y_0, y_1, y_2 donnés

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}\right] + O(h^4)$$

Calcul de $\tilde{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[5\tilde{f}_{n+1} + 8 f_n - f_{n-1}\right] + O(h^4)$$

Méthodes d'Adams Moulton

Remarques :

1. Le correcteur : même ordre que prédicteur, mais précision plus grande.

2. La valeur exacte entre le prédicteur et le correcteur.

3. Deux évaluations de la fonction f à chaque étape (comparée à 4 pour Runge Kutta du même ordre).

4. Pour amorcer : Runge Kutta du même ordre.

Méthodes d'Adams Moulton

(d'ordre local e h^5)

y_0, y_1, y_2, y_3 donnés

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right] + \frac{251}{720} h^5 y^{v}(\xi)$$

Calcul de $\tilde{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9 \tilde{f}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right] - \frac{19}{720} h^5 y^{v}(\xi)$$

Méthode d'Adams Moulton
Mesure de la précision

$$y_{exact} \approx y_{corrige} - \frac{19}{270}(y_{corrige} - y_{predit})$$

N décimales exactes lorsque :

$$\left| y_{corrige} - y_{predit} \right| 10^N \le 14.2$$

L'erreur globale est stable donc pas de divergence.

Comparaison des méthode pour résoudre :

$$y'(t) = -t\ y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

Méthode	$t_1 = 0.1$	$t_2 = 0.2$
Solution analytique	0.995025	0.980392
Euler $O(h^2)$	1.000000	0.990000
Taylor $O(h^3)$	0.995000	0.980248
Taylor $O(h^4)$	0.995000	0.980346
Euler Modifié $O(h^3)$	0.995000	0.980346
RK type II $O(h^3)$	0.995000	0.980297
RK type III $O(h^3)$	0.995000	0.980394
RK $O(h^5)$	0.995025	0.980392
Adams Moulton	0.995025	0.980392

$$y_{exact} = y_{predit} + \frac{251}{720} h^5 y^{v}(\xi)$$

$$y_{exact} = y_{corrige} - \frac{19}{720} h^5 y^{v}(\xi)$$

$$0 = y_{predit} - y_{corrige} + \frac{270}{720} h^5 y^{v}(\xi)$$

$$h^5 y^{v}(\xi) = \frac{720}{270}\left(y_{corrige} - y_{predit}\right)$$

Donc

$$y_{exact} = y_{corrige} - \frac{19}{720}\frac{720}{270}\left(y_{corrige} - y_{predit}\right)$$

$$y_{exact} = y_{corrige} - \frac{19}{270}\left(y_{corrige} - y_{predit}\right)$$

Résoudre un système d'équations différentielles du premier ordre:

Exemple: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy + t \\ \frac{dy}{dt} = ty + x \end{cases}$ Conditions initiales: x(0) = 1 et y(0) = -1

Méthode de Taylor avec ordre local en h^4:

$$x_{j+1} = x_j + h\,x'(t_j) + \frac{h^2}{2}x''(t_j) + \frac{h^3}{6}x'''(t_j) + O(h^4)$$

$$y_{j+1} = y_j + h\,y'(t_j) + \frac{h^2}{2}y''(t_j) + \frac{h^3}{6}y'''(t_j) + O(h^4)$$

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = xy' + x'y + 1 \\ y'' = y + ty' + x' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''' = x'y' + xy'' + x''y + x'y' \\ y''' = y' + y' + ty'' + x'' \end{cases}$$

Euler modifié

$$\begin{cases} \tilde{x}_{j+1} = x_j + h\,f(t_j, x(t_j)) \\ \tilde{y}_{j+1} = y_j + h\,f(t_j, y(t_j)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, x_j) + f(t_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})\right] \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})\right] \end{cases}$$

Exemple: $\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases}$ Conditions initiales: x(0) = 1 et y(0) = -1

h = 0.1

Prédiction:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_0 + h\,f(t_0, x(t_0)) = 1 + 0.1[(1)(-1) + 0] = 0.9 \\ \tilde{y}_1 = y_0 + h\,f(t_0, y(t_0)) = -1 + 0.1[(0)(-1) + 1] = -0.9 \end{cases}$$

Correction:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, x_0) + f(t_1, \tilde{x}_1)\right] = 1 + \frac{0.1}{2}(-1 + [0.9(-0.9) + 0.1]) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, \tilde{y}_1)\right] = -1 + \frac{0.1}{2}(1 + [0.1(-0.9) + 0.9145]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.9145 \\ y_1 = -0.9088 \end{cases}$$

Équation différentielles d'ordre supérieur

Ordre n :

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

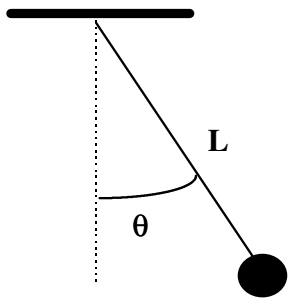
Conditions initiales :

$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$ donnés pour k = 0, 1, ..., n-1.

Remarque :
Il est rarement possible de trouver une solution analytique.

Équation du pendule:
(pour de petits mouvements)
t: temps
θ: Position angulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$



Conditions initiales usuelles:

$$\theta(t_0) = \theta_0$$
$$\theta'(t_0) = \theta_0'$$
$$\theta'(t) = \theta_0 Cos(\frac{g}{L}t) + \frac{L}{g}\theta_0' Sin(\frac{g}{L}t)$$

Transformation d'une équation différentielle d'ordre 2 en un système d'ordre 1 :

Ordre 2 :

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Conditions initiales :

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_0'$$

En posant : $x(t) = y'(t)$

Système équivalent :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, y(t), x(t)) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales : $y(t_0) = y_0$ et $x(t_0) = y_0'$

Remarque:

Il est **toujours possible** de transformer
une équation différentielle d'ordre n
en un **système** d'équations différentielles d'ordre 1.

Équation différentielle d'ordre n:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

Conditions initiales :

$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$ donnés pour k = 0, 1, ..., n-1.

En posant: $x_k(t) = y^{(k)}(t)$ pour k = 0, 1, ..., n-1.

Nous obtenons un système de n équations d'ordre 1:

$$\begin{cases} x_0'(t) = x_1(t) \\ x_1'(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}'(t) = x_{n-1}(t) \\ x_{n-1}'(t) = f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)) \\ \qquad = y^{(n)}(t) \end{cases}$$

Avec conditions initiales:

$x_k(t_0) = y^{(k)}(t_0)$ pour k = 0, 1, ..., n-1.

Exemple: Résoudre

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Conditions initiales:
x(0) = 0.5 et x'(0) = 0

Mise sous la forme de système:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = (1 - x^2)y - x \end{cases}$$

Conditions initiales:
x(0) = 0.5
et y(0) = x'(0) = 0

Euler avec h = 0.1

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + h\, f(t_j, x(t_j), x'(t_j)) \\ y_{j+1} = y_j + h\, f(t_j, y(t_j), y'(t_j)) \end{cases}$$

Ici j = 0:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h\, y_0 \\ y_1 = y_0 + h\left[(1 - x_0^2)y_0 - x_0\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5 + (0.1)(0) \\ y_1 = 0 + (0.1)\left[(1 - 0.25)0 - 0.5\right] \end{cases}$$

Calculer x"(0) et x"(0.1)

$$x''(0) = (1 - x_0^2)y_0 - x_0$$
$$x''(0.1) = (1 - x_1^2)y_1 - x_1$$

Méthodes d'Adams Moulton d'ordre global 4
Pour les systèmes d'ordre 2.

- x_0, x_1, x_2, x_3 donnés
  et y_0, y_1, y_2, y_3 donnés

- Calcul des prédicteurs :

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right] + O(h^5)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}\right] + O(h^5)$$

- Nouveaux estimés de la fonction :

$$\tilde{f}_{n+1} = f\left(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}\right)$$
$$\tilde{g}_{n+1} = g\left(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}\right)$$

- Calcul des correcteurs :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left[9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right] + O(h^5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9\tilde{g}_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}\right] + O(h^5)$$

Correcteur : même ordre que le prédicteur.
Valeur exacte entre le prédicteur et le correcteur.

Exemple :

Soit le système :

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases} \quad \text{avec pour conditions initiales :} \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{matrix}$$

	t	x	x'	t	y	y'
Valeurs	0.0	1.0	-1.0	0.0	-1.0	1.0
de	0.025	0.9759	-0.9271	0.025	-0.9756	0.9515
départ	0.050	0.9536	-0.8582	0.050	-0.9524	0.9060
	0.075	0.9330	-0.7929	0.075	-0.9303	0.8632
Prédiction	0.10			0.10		
Correction						

- Calcul des prédicteurs :

$$\tilde{x}(0.1) = x_{0.075} + \frac{0.025}{24}\left[55f_{0.075} - 59f_{0.05} + 37f_{0.025} - 9f_0\right]$$
$$= 0.9330 + \frac{0.025}{24}\left[55(-0.7929) - 59(-0.8582) + 37(-0.9271) - 9(-1)\right]$$
$$= 0.91396$$

$$\tilde{y}(0.1) = -0.9303 + \frac{0.025}{24}\left[55(0.8632) - 59(0.9060) + 37(0.9515) - 9(1.0)\right]$$
$$= -0.9092296875$$

- Nouveaux estimés de la fonction :

$$\tilde{f}_{n+1} = f\left(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}\right) = 0.91396(-0.9092296) + 0.1 = -0.7309995$$
$$\tilde{g}_{n+1} = g\left(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}\right) = 0.1(-0.9092296) + 0.91396 = 0.823037$$

- Calcul des correcteurs :

$$x(0.1) = 0.9330 + \frac{0.025}{24}\left[9(-0.7309995) + 19(-0.7929) - 5(-0.8582) + (-0.9271)\right] = 0.9139581$$
$$y(0.1) = -0.9303 + \frac{0.025}{24}\left[9(0.823037) + 19(0.8632) - 5(0.906) + 0.9515\right] = -0.9092274$$

$$x(0.1) = \underline{0.9139581}$$
$$y(0.1) = -\underline{0.9092274}$$

Comparaison des méthodes pour les équations différentielles

	Euler Modifié	Runge Kutta d'ordre 4	Adams Moulton
Type de méthode	Pas unique	Pas unique	Pas multiple
Erreur locale	$O(h^3)$	$O(h^5)$	$O(h^5)$
Erreur globale	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
nb d'évaluation de fonction	2	4	2
Stabilité	bonne	bonne	bonne
Facilité pour changer le pas	oui	oui	non
Recommandée	NON	OUI	OUI

Ift 2421

Chapitre 6

Résolution des équations différentielles:

Conditions limites

Problèmes aux limites

Équation différentielle d'ordre 2

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Avec les 2 conditions limites :

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y(t_1) = y_1$$

Type différent de celles données
avec des conditions initiales.

Les méthodes vues précédemment ne s'appliquent pas
car nous ne connaissons pas $y'(t_0)$

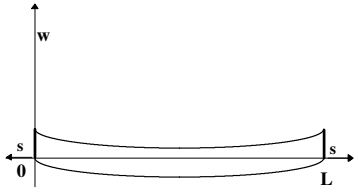
Exemple :
Déformation d'une poutre :

w(x) : déformation en
fonction de l'abscisse x.

q : charge uniforme.
E : Coefficient d'élasticité.
L : longueur de la poutre.
S : tension aux limites.
I : moment central d'inertie.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - L)$$

Avec les conditions limites
$w(0) = w(L) = 0$



Problèmes linéaires aux limites

Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2
ou d'un autre ordre tant qu'elle est linéaire.

$$y''(t) = H(t) + G(t)y(t) + F(t)y'(t) \qquad (1)$$

Nous avons :

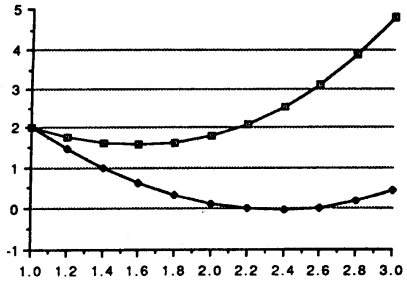
Théorème :
Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions de (1)
alors
$y_3(t) = \alpha y_1(t) + (1-\alpha)y_2(t)$
est aussi solution de (1).

Le théorème pour des
équations différentielles
linéaires seulement.

Cas homogène :

Où H = 0, nous acceptons
toute combinaison linéaire :

Pour tout α et β,
$y_3(t) = \alpha\, y_1(t) + \beta\, y_2(t)$
est aussi solution de (1).



Méthode de tir

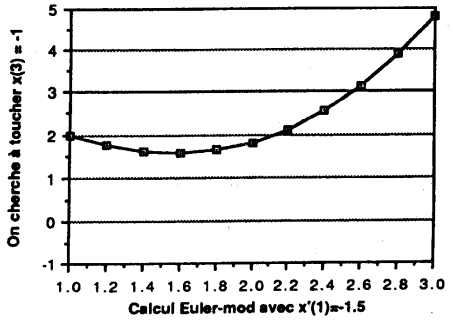
Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :
x(1) = 2 et x(3) = -1

On essaie un premier tir en remplaçant
par les conditions initiales :
$x_1(1) = 2$
$x'_1(1) = -1.5$

Premier tir:



Raté : nous trouvons $x_1(3) = 4.811$

Méthode de tir

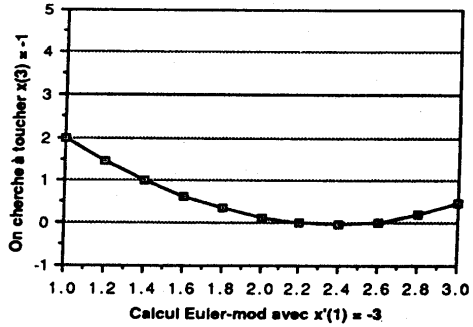
Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :
x(1) = 2 et x(3) = -1

On essaie un deuxième tir en remplaçant
par les conditions initiales :
$x_2(1) = 2$
$x'_2(1) = -3$

Deuxième tir:



Encore raté : nous trouvons $x_2(3) = 0.453$

Combinaison des tirs

Mais nous avons :

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t)$$

qui sera aussi une solution.
de
$$x''(t) = t + (1 - 0.2\ t)x(t)$$

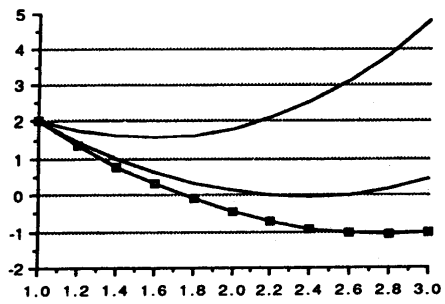
Il faut donc déterminer α pour avoir $x_3(3) = -1$.

$$x_3(3) = \alpha x_1(3) + (1-\alpha)x_2(3)$$
$$-1 = \alpha(4.811) + (1-\alpha)(0.453)$$

$$\alpha = -0.3334$$

Solution en tout point :

$$x_3(t) = -0.3334\ x_1(t) + 1.3334\ x_2(t)$$



Combinaison des tirs

Notes :

1. Problèmes linéaires du second ordre convergent en 2 tirs.

2. Ordre plus élevé : la méthode fonctionne aussi.

3. Ordre global et précision de la méthode employée pour les conditions initiales.

4. Peu généralisables en 2D et 3D, peu utilisée en pratique.

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\ t)x(t)$$

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1.0	2.000	2.000	2.000
1.2	1.751	1.449	1.348
1.4	1.605	0.991	0.786
1.6	1.561	0.619	0.305
1.8	1.625	0.328	-0.105
2.0	1.803	0.118	-0.444
2.2	2.105	-0.007	-0.711
2.4	2.542	-0.045	-0.908
2.6	3.128	0.013	-1.026
2.8	3.880	0.175	-1.061
3.0	4.811	0.453	**-1.000**

Pour les équations non linéaires :

- Convergence de la méthode de tir comme une méthode de point fixe.
  X(3)=f(x'(1))

- peu de chance que l'interpolation linéaire procure la solution exacte.

- Sert à estimer la prochaine pente.

Problème non linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)x'(t)$$

avec CL : x(1)=2 et x(3)=-1

Valeur assumée pour x'(1)	valeur Calculée pour x(3)
-1.5	-0.016
-3.0	-2.085
-2.213*	-1.271
-2.0	-0.972
-1.8	-0.642
-2.017*	-0.998
-2.01	-0.987
-2.02	-1.002
-2.018*	-1.000

*valeur obtenue par interpolation linéaire.

Méthodes des différences finies

2 étapes :

1. Étape de discrétisation :
   - Diviser l'intervalle en sous intervalle de longueur h.
   - Dérivées approchées par des formules de différence.

2. Résolution du système discrétisé :

   - Systèmes linéaires pour des équations différentielles linéaires et systèmes non linéaires pour des équations différentielles non linéaires.
   - Propriétés mathématiques des matrices obtenues par discrétisation (matrices tridiagonales, ou symétriques, ou définies positives).

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :
x(1) = 2 et x(3) = -1

Différences centrées :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Substituer ces formules dans l'équation différentielle et choisir un pas.

Méthodes des différences finies
Étape de discrétisation

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = t_i + (1 - 0.2t_i)x_i$$

Pour i = 2, ..., n-1

avec $t_i = t_1 + (i-1)h$ et $x_i = x(t_i)$

Nous avons: t_1=1 et x_1=2 t_n=3 et x_n=-1

Précision de l'approximation:

- Valeur du pas h
- Type de différences utilisées.

$$x_{i-1} - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_i)\right]x_i + x_{i+1} = h^2 t_i$$

Remarque:

Ici: $O(h^2)$

Appliquer la technique d'extrapolation de Richardson.

Calculer une solution $x_i^{(1)}$ avec un pas h.

Calculer une solution $x_{2i+1}^{(2)}$ avec un pas 2h.

Ensuite grâce à l'extrapolation de Richardson, calculer une nouvelle solution.

$$x_{2i+1}^{(extrapolation)} = x_{2i+1}^{(2)} + \frac{1}{3}\left(x_{2i+1}^{(2)} - x_{2i+1}^{(1)}\right)$$

Méthodes des différences finies

Pour i = 2, ..., n-1

$$x_{i-1} - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_i)\right]x_i + x_{i+1} = h^2 t_i$$

Nous avons: t_1=1 et x_1=2, t_n=3 et x_n=-1

Considérons h = 0.5 :

$$x_1 - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_2)\right]x_2 + x_3 = h^2 t_2$$
$$x_2 - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_3)\right]x_3 + x_4 = h^2 t_3$$
$$x_3 - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_4)\right]x_4 + x_5 = h^2 t_4$$

$$\begin{bmatrix} -2.175 & 1 & 0 \\ 1 & -2.150 & 1 \\ 0 & 1 & -2.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.625 \\ 0.500 \\ 1.625 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 0.552$$
$$x_3 = -0.424$$
$$x_4 = -0.964$$
$$x_5 = -1$$

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites : x(1) = 2 et x(3) = -1

Pour h=0.2 :

$$\begin{bmatrix} -2.0304 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.0288 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.0272 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.0256 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0240 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0224 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0208 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0192 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0176 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1.952 \\ 0.056 \\ 0.064 \\ 0.072 \\ 0.080 \\ 0.088 \\ 0.096 \\ 0.104 \\ 1.112 \end{bmatrix}$$

Note: le système est tridiagonal.

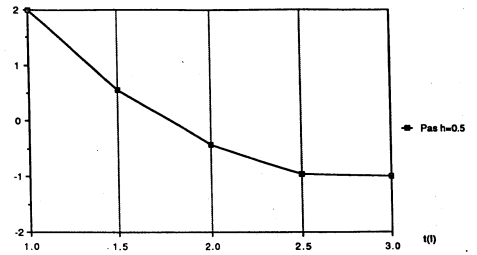
Résultats:

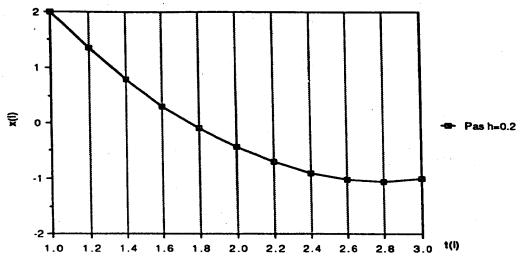
t	Méthode des différences finies	Méthode de tir
1.0	2.000	2.000
1.2	1.351	1.348
1.4	0.792	0.787
1.6	0.311	0.305
1.8	-0.097	-0.104
2.0	-0.436	-0.443
2.2	-0.705	-0.712
2.4	-0.903	-0.908
2.6	-1.022	-1.026
2.8	-1.058	-1.060
3.0	-1.000	-1.000

Méthodes des différences finies

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :
x(1) = 2 et x(3) = -1





Conditions limites sur les dérivées.
Méthode de tir.

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\ t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :
$x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Essais sur la valeur de x(1):

On essaie 2 tirs en remplaçant par les conditions initiales:

Premier tir: $x_1(1) = 2$ et $x_1'(1) = 0$

Deuxième tir: $x_2(1) = 8$ et $x_2'(1) = 0$

Combiner les 2 solutions avec $x_1'(3)$ et $x_2'(3)$

$x_1'(3)$ et $x_2'(3)$ sont estimées avec la formules des différences divisées.

Conditions limites sur les dérivées.
Méthode des différences finies.

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\ t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :
$x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Se discrétise en :

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = t_i + (1 - 0.2t_i)x_i$$

$$x_{i-1} - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_i)\right]x_i + x_{i+1} = h^2 t_i$$

Mais maintenant, cela est valable pour i = 1, ..., n.

Nous rajoutons 2 points : (t_0, x_0) et (t_{n+1}, x_{n+1})
tels que:

$$x_2 - x_0 = 2h\ x'(t_1)$$

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 2h\ x'(t_n)$$

Remarque:
Nous connaissons les dérivées aux limites
$x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Exemple:

$$x''(t) = t + (1 - 0.2\,t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites : $x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Considérons h = 0.5 :

$$x_1 - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_2)\right]x_2 + x_3 = h^2 t_2$$
$$x_2 - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_3)\right]x_3 + x_4 = h^2 t_3$$
$$x_3 - \left[2 + h^2(1 - 0.2t_4)\right]x_4 + x_5 = h^2 t_4$$

$$x_2 - x_0 = 2h\ x'(t_1)$$
$$x_6 - x_4 = 2h\ x'(t_5)$$

$$\begin{bmatrix} -2.2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.175 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.125 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.375 \\ 0.500 \\ 0.625 \\ 1.750 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -3.4795 \\ x_2 &= -3.70245 \\ x_3 &= -4.19833 \\ x_4 &= -4.82395 \\ x_5 &= -5.42757 \end{aligned}}$$