# Ift 2421

# Chapitre 7

## Introduction

## aux valeurs propres
## et
## aux vecteurs propres



**Définition :**

Si A est une matrice de nxn, alors un vecteur non nul x est dit vecteur propre de A si

$$Ax = \lambda x$$

$\lambda$ est appelé **valeur propre** de A,
et x **vecteur propre** de A correspondant à $\lambda$.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Si $\lambda>1$ Dilatation.

Si $0<\lambda<1$ Contraction.

Si $\lambda<0$ Changement de direction.

## Calcul analytique des valeurs propres et des vecteurs propres

$$Ax = \lambda x$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\lambda I - A)x = 0$$

Nous avons une solution non nulle ssi

$\det(A - \lambda I) = 0$ Équation caractéristique de A.

Les valeurs satisfaisant cette équation sont les **valeurs propres** de A.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de A est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$



Exemple : trouver les valeurs propres de:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

et trouver les vecteurs propres de:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 10-\mathrm{l} & 0 & 0 \\ 1 & -3-\mathrm{l} & -7 \\ 0 & 2 & 6-\mathrm{l} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont: $\lambda_1=10$, $\lambda_2=4$ et $\lambda_3=-1$

$\lambda_1=10$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 0x_1 = 0 \\ x_1 - 13x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{33} \\ x_3 = \frac{1}{33} \end{cases}$$

$\lambda_2=4$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 6x_1 = 0 \\ x_1 - 7x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$\lambda_3=-1$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 11x_1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

## La localisation des valeurs propres : Théorème de Gerschgorin

$$Ax = \lambda x$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad \text{pour i = 1 à n.}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$$

Si nous choisissons $x_i$ tel que $|x_i| = \max_j |x_j|$

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right|$$

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Posons

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

C'est à dire la sommation des valeurs absolues des éléments de la ligne i sauf $a_{ii}$.



## La localisation des valeurs propres

Les disques de Guerschgorin sont définis par :

$$D_i = \left\{ \lambda \;\middle|\; |\lambda - a_{ii}| \leq r_i \right\}, \qquad \text{i = 1 à n.}$$

Théorème :

**Les valeurs propres de la matrice A sont éléments de l'union des disques $D_i$.**

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

Note :

1. On vérifie toutes les possibilités pour i = 1 à n qui pourraient vérifier $|x_i| = \max_j |x_j|$ pour chaque valeur (vecteur) propres.
2. Puisque les valeurs propres peuvent être complexes, nous obtenons des disques dans le plan complexe.
3. Si la matrice A est symétrique, les valeurs propres sont réelles et les disques deviennent de simples intervalles.
4. $a_{ii}$ : centre du disque. $r_i$ : rayon du disque.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \left\{ \lambda \mid |\lambda - a_{11}| \le r_1 \right\}, \qquad r_1 = \sum_{j=2}^{3} |a_{ij}|.$$

$$|\lambda - 4| \le 2$$

$\lambda$ peut être complexe : $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$

$$|(\lambda_R - 4) + i(\lambda_I - 0)| \le 2$$

$$\sqrt{(\lambda_R - 4)^2 + (\lambda_I)^2} \le 2$$

$$(\lambda_R - 4)^2 + (\lambda_I - 0)^2 \le 4$$

$D_1$ : centre = (4,0), rayon = 2

$D_2$ : centre = (1,0), rayon = 2

$D_1$ : centre = (-6,0), rayon = 2



## La localisation des valeurs propres

Corollaires :

1. Les valeurs propres de la matrice A sont aussi éléments de l'union des disques $D_i^T$ construit à partir de sa transposée $A^T$ :

$$S^T = \bigcup_{i=1}^{n} D_i^T$$

Note : En effet, A et $A^T$ ont les mêmes valeurs propres.

2. Les valeurs propres de la matrice A appartiennent donc à l'intersection de S et $S^T$ :

$$\lambda \in (S \cap S^T)$$

3. Une borne supérieure pour la plus grande valeur propre est donc :

$$|\lambda| \le \min\left\{ \max_{i=1\ldots n}\left[ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right], \max_{j=1\ldots n}\left[ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right] \right\}$$

Exemple (suite) : pouvons nous améliorer le résultat ?

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$D_1^T$ : centre = (4,0), rayon = 3

$D_2^T$ : centre = (1,0), rayon = 1

$D_3^T$ : centre = (-6,0), rayon = 2

$$\lambda \in \left(S \cap S^T\right)$$

$$\lambda_1 = -5.7685$$
$$\lambda_2 = \ \ 3.4694$$
$$\lambda_3 = \ \ 1.2992$$

Note : corollaire 3 :

$$|\lambda| \le \min\left\{\max[6,3,8], \max[7,2,8]\right\}$$



## Démonstration du corollaire 3

$Ax = \lambda x$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad \text{pour i = 1 à n.}$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$$

Il y a un i tel que : $|x_i| = \max_j |x_j|$

$$|\lambda| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \left|\frac{x_j}{x_i}\right|$$

$$|\lambda| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Nous ne connaissons pas le i en question, nous choisissons le max des sommations des éléments des lignes.

$$|\lambda| \le \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Si nous considérons $A^T$, la transposée de A :

$$|\lambda| \le \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|\lambda| \le \min\left\{\max_{i=1\ldots n}\left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right], \max_{j=1\ldots n}\left[\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right]\right\}$$

## Méthode des puissances

Supposons que nous cherchions la plus grande valeur propre de la matrice A (n x n) et que cette matrice possède n vecteurs **linéairement indépendants** $x_1, x_2, ..., x_n$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ qui sont dans l'ordre.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| > 0$$

La valeur propre $\lambda_1$ est dite **dominante**.

Tout vecteur x de $R^n$ peut donc s'écrire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

puisque les vecteurs propres de A forment une base de $R^n$.

En multipliant ce vecteur par A, nous obtenons :

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i Ax_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x_i$$

Si nous répétons cette opération k fois :

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda_i)^k x_i$$

$$= \lambda_1^k \left[ c_1 x_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \ldots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right]$$



Or nous avons $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1 \quad pour\ i \neq 1$

Donc le terme $\lambda_1^k c_1 x_1$ devient dominant dès que k est assez grand. Donc pour k assez grand , nous avons :

$$x^{(k)} \cong \lambda_1^k c_1 x_1$$

$$x^{(k+1)} \cong \lambda_1^{k+1} c_1 x_1 = \lambda_1 \left( \lambda_1^k c_1 x_1 \right) \cong \lambda_1 x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} \cong \lambda_1 x^{(k)}$$

en choisissant 2 composantes i, nous obtenons :

$$\lambda_1 \cong \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}$$

- Nous obtenons donc la plus grande valeur propre et son vecteur propre en même temps.
- Dépassement de la capacité de l'ordinateur ?

Pour éviter de dépasser les capacités de l'ordinateur, nous avons intérêt à normaliser les vecteur itérés $x^k$ à chaque étape ; nous pouvons par exemple ramener à 1 la plus grande composante (en valeur absolue) de $x^k$, en appliquant l'algorithme :

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} \qquad y^1 = \frac{1}{m_1}x^{(1)}$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} \qquad y^2 = \frac{1}{m_2}x^{(2)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)} \qquad y^k = \frac{1}{m_k}x^{(k)}$$

où $m_k$ est la composante de $x^k$ de module maximum.

Dans ces conditions, nous avons finalement, pour k assez grand :

$$y^k \cong y^{k+11} = \frac{1}{m_{k+1}}x^{(k+1)} = \frac{1}{m_{k+1}}Ay^k$$

donc

$$m_{k+1}y^k \cong Ay^k$$

Remarque :

$$\lim_{k\to\infty} m_k = \lambda_1 \qquad \lim_{k\to\infty} y^k = \vec{v}_1$$



Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 0.07 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.07 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.65 \\ 0.26 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 0.065 \\ 0.026 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.065 \\ 0.026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.623 \\ 0.286 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 \\ 0.0623 \\ 0.0286 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.0623 \\ 0.0286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.6129 \\ 0.2962 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 10 \\ 0.06129 \\ 0.02962 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 10 \qquad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/33 \\ 1/33 \end{bmatrix}$$

Remarques :

1. Nous avons :

$$Ax = \lambda x$$

$$A^{-1}A\ x = A^{-1}\ \lambda\ x = \lambda\ A^{-1}\ x$$

$$x = \lambda\ A^{-1}\ x$$

$$A^{-1}\ x = \frac{1}{\lambda} x$$

Pour obtenir la plus petite valeur propre, nous pouvons donc utiliser la méthode des puissances sur $a^{-1}$.

2. Si $|\lambda_1| \approx |\lambda_2|$ $(\ldots |\lambda_{n-1}| \approx |\lambda_n|)$, alors la convergence sera très lente car $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} << 1$ doit être vrai pour avoir une convergence rapide.

3. Le choix du vecteur initial influence beaucoup la rapidité de la convergence. Si le vecteur initial est près du vecteur propre $\vec{x}_1$ alors les coefficients $c_i$, $i \neq 1$, seront petit par rapport à $c_1$.

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k x_2 + \ldots + c_n\lambda_n^k x_n$$



Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & -1.5 & -1.75 \\ -0.05 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -3.1 \\ 1.2 \end{bmatrix} = -3.1\begin{bmatrix} -0.0323 \\ 1 \\ -0.3871 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}y^1 = \begin{bmatrix} -0.0032 \\ -0.8274 \\ 0.2113 \end{bmatrix} = -0.8274\begin{bmatrix} 0.0039 \\ 1 \\ -0.2554 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}y^2 = \begin{bmatrix} 0.004 \\ -1.0525 \\ 0.3083 \end{bmatrix} = -1.0525\begin{bmatrix} -0.0004 \\ 1 \\ -0.2929 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}y^3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.9875 \\ 0.2803 \end{bmatrix} = -0.9875\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.2839 \end{bmatrix}$$

Valeurs exactes :

$$\lambda_3 = -1 \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.2857 \end{bmatrix}$$

## Comment obtenir la deuxième valeurs propres ?

## Méthode de déflation

a. Calculer de $\lambda_1$ et $\vec{x}_1$ par la méthode des puissances.

b. Construire $A^1$ :

$$A^1 = A - \lambda_1 \frac{\left(\vec{x}_1 \vec{x}_1^{\,T}\right)}{\vec{x}_1^{\,T} \vec{x}_1}$$

c. Appliquer à nouveau la méthode des puissances sur $A^1$

$$\lambda_2 \text{ et } \vec{x}_2$$

Remarque :

$A^1$ possède les mêmes $\lambda_i$ que A sauf $\lambda_1 = 0$

En effet :

$$\left( A - \lambda_1 \frac{\left(\vec{x}_1 \vec{x}_1^{\,T}\right)}{\vec{x}_1^{\,T} \vec{x}_1} \right) \vec{x}_1 = A\vec{x}_1 - \lambda_1 \frac{\left(\vec{x}_1 \vec{x}_1^{\,T}\right)}{\vec{x}_1^{\,T} \vec{x}_1} \vec{x}_1 = 0\vec{x}_1$$

$$\left( A - \lambda_1 \frac{\left(\vec{x}_1 \vec{x}_1^{\,T}\right)}{\vec{x}_1^{\,T} \vec{x}_1} \right)_{i \neq 1} \vec{x}_i = A\vec{x}_i - \lambda_1 \frac{\left(\vec{x}_1 \vec{x}_1^{\,T}\right)}{\vec{x}_1^{\,T} \vec{x}_1} \vec{x}_i = A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$



Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \frac{10}{\frac{1094}{1084}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2/33 \\ 1/33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/33 & 1/33 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.0457 & -0.6033 & -0.3016 \\ 0.3967 & -3.3066 & -7.0183 \\ -0.3016 & 1.9817 & 5.9909 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8593 \\ -9.6581 \\ 7.6709 \end{bmatrix} = -9.6581 \begin{bmatrix} 0.0890 \\ 1 \\ -0.7942 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} y^1 = \begin{bmatrix} -0.3596 \\ 2.5730 \\ -2.8033 \end{bmatrix} = -2.8033 \begin{bmatrix} 0.1283 \\ -0.9178 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{-1} y^k = \begin{bmatrix} 0.3010 \\ -3.9727 \\ 4.0001 \end{bmatrix} = 4.0001 \begin{bmatrix} 0.0752 \\ -0.9931 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4.0001 \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.0752 \\ -0.9931 \\ 1 \end{bmatrix}$$