DIRO
IFT 2425

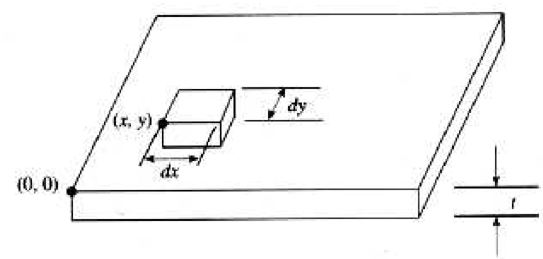
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉS PARTIELLES

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

INTRODUCTION

I. Exemple : Température dans une plaque



Soit u représentant la température dans l'élément de taille $dx \times dy$ à l'état stable (tps $\rightarrow \infty$)

• Flot de chaleur circulant dans l'élément en x

$$-(\text{Conductivité})(\text{Aire})(\text{Gradient}) = -k\,A\,\frac{\partial u}{\partial x} = -k\,(t\;dy)\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

• Flot de chaleur circulant dans l'élément en y

$$-k\,A\,\frac{\partial u}{\partial y} = -k\,(t\;dx)\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

Propriétés physiques

Flot chaleur entrant dans l'élément =
Flot de chaleur sortant + Flot de chaleur perdu... (1)

Flot de chaleur entrant (resp. sortant) dans l'élément
=
Flot de chaleur entrant (resp. sortant) dans la direction des x
+ Flot de chaleur entrant (resp. sortant) dans la direction des y

- Flot de chaleur sortant de l'élément + perdu

$$-k\,(t\,dy)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right]-k\,(t\,dx)\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right]+Q(dx\,dy)$$

Finalement (Équation (1))

$$k\,t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(dx\ dy)=Q(dx\ dy)$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{Q}{k\,t}$$

Si l'objet à considérer est en trois dimension, un développement similaire conduit à

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{Q}{kt}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \frac{Q}{k\,t}\\ \nabla^2 u &= \frac{Q}{k\,t}\end{aligned}$$

II. Méthodes de Résolution

- 1. Équations aux différences

On approxime les dérivés secondes par la formule des différences centrées (cf. chap. 5 page 8) avec ici $h=\Delta x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u\,L-2\,u\,0+u\,R}{(\Delta x)^2}$$

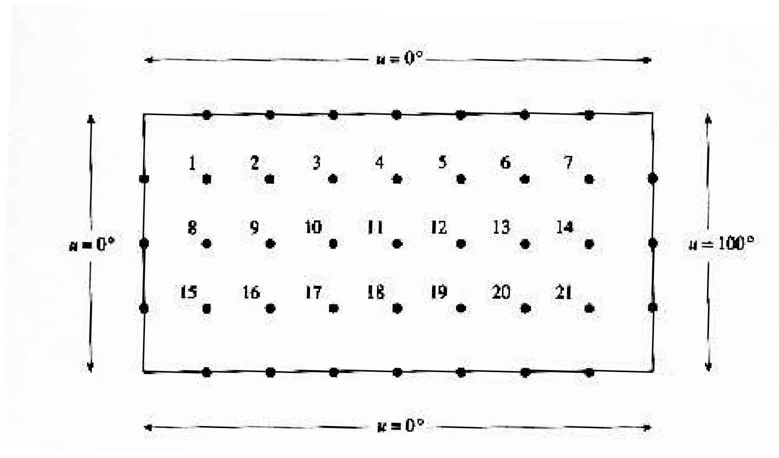
où $u\,L$ et $u\,R$ sont les températures à gauche et à droite du noeud dont la température est $u\,0$. De même

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u\,A-2\,u\,0+u\,B}{(\Delta y)^2}$$

où $u\,A$ et $u\,B$ sont les températures en haut et en bas du noeud dont la température est $u\,0$. En prenant $\Delta x=\Delta y=h$

$$\nabla^2 u=\frac{uL+uR+uA+uB-4u0}{h^2}$$

Soit une plaque rectangulaire (20 cm & 10 cm). Les bords supérieurs, gauches, bas sont maintenus à 0^o et le bord droit est maintenu à 100^o. Soit des noeuds espacés de $h = \Delta x = \Delta y = 2.5cm$. Soit u_i, la température au noeud i.



Si $Q = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

Avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(uL - 2u0 + uR)}{0.25^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{(uA - 2u0 + uB)}{0.25^2}\end{aligned}$$

$$\frac{(uL + uR + uA + uB - 4u0)}{0.125} = 0$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u0 = 0$$

On obtient 21 équations pour la résolution de ce problème en exprimant le fait que le laplacien pour chaque noeud est nulle ($\nabla^2 u = 0,\ \forall u$)

Exemples

Pour le noeud 1	$-4u_1 + u_2 + u_8 = 0$
Pour le noeud 7	$u_6 - 4u_7 + u_{14} = -100$
Pour le noeud 9	$u_2 + u_8 - 4u_9 + u_{10} + u_{16} = 0$
Pour le noeud 14	$u_7 + u_{13} - 4u_{14} + u_{21} = -100$
Pour le noeud 18	$u_{11} + u_{17} - 4u_{18} + u_{19} = 0$

Soit 21 Équations avec 21 inconnus. Le système est solvable par élimination Gaussienne (par exemple), et on trouve

Colonne	Ligne 1	Ligne 2	Ligne 3
1	0.3530	0.4988	0.3530
2	0.9132	1.2894	0.9132
3	2.0103	2.8323	2.0103
4	4.2957	7.0193	4.2931
5	9.1531	12.6537	9.1531
6	19.6631	27.2893	19.6631
7	43.2101	53.1774	43.2101

Inconvénients

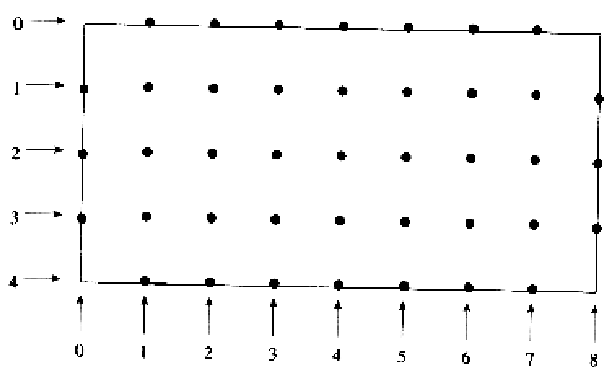
- ▶ Coût calculatoire élevé lorsque h est faible
- ▶ Coût de stockage mémoire élevé lorsque h est faible

• 2. Méthode itératives

$$u_0 = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{array}\right\}$$

Ou

$$u_{i,j} = \frac{(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})}{4}$$



$$u_{i,j}^{[n+1]} = \frac{(u_{i,j-1}^{[n]} + u_{i,j+1}^{[n]} + u_{i-1,j}^{[n]} + u_{i+1,j}^{[n]})}{4}$$

Initialisation

- Valeurs $u_{i,j}$ intérieurs initialisées à zéro
- Valeurs $u_{i,j}$ intérieurs initialisés par la moyenne des valeurs frontières

Accélération de la Convergence

- ▶ Méthode de sur-relaxation successive

$$u_{i,j}^{[n+1]} = u_{i,j}^{[n]} + w\frac{(u_{i,j-1}^{[n]} + u_{i,j+1}^{[n]} + u_{i-1,j}^{[n]} + u_{i+1,j}^{[n]} - 4u_{i,j}^{[n]})}{4}$$

avec $i = 1, \ldots, 3 \quad j = 1, \ldots, 7$

Le terme w est le facteur de sur-relaxation

w	Nb. d'itér.
1.0	26
1.1	22
1.2	18
1.3	15
1.4	18
1.5	21

Remarque : La valeur optimum de w n'est pas toujours estimable, mais pour une région rectangulaire, comme la plaque considérée

w_{optimal} = plus petite racine de l'équation

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right] w^2 - 16w + 16$$

• 3. Méthode implicite de direction alternée (I.D.A)

La méthode 1. (Équations aux différences) demande la résolution d'une matrice creuse (i.e., bcp de 0) dont les valeurs non nuls sont concentrées sur une bande diagonale de la matrice

▼

Lorsque la matrice est tri-diagonale, les méthodes de résolution de ce type de matrice sont directes et efficaces

▶ La méthode I.D.A permet de se ramener à un problème de résolution de matrice tri-diagonale

Exemple

$$\nabla^2 u = \frac{u\,L - 2\,u\,0 + u\,R}{(\Delta x)^2} + \frac{u\,A - 2\,u\,0 + u\,B}{(\Delta y)^2} = 0$$

Lorsque $\Delta x = \Delta y = 1$

$$\begin{aligned} (u\,L - 2\,u\,0 + u\,R)^{[k+1]} &= -(u\,A - 2\,u\,0 + u\,B)^{[k]} \\ (u\,A - 2\,u\,0 + u\,B)^{[k+2]} &= -(u\,L - 2\,u\,0 + u\,R)^{[k+1]} \end{aligned}$$

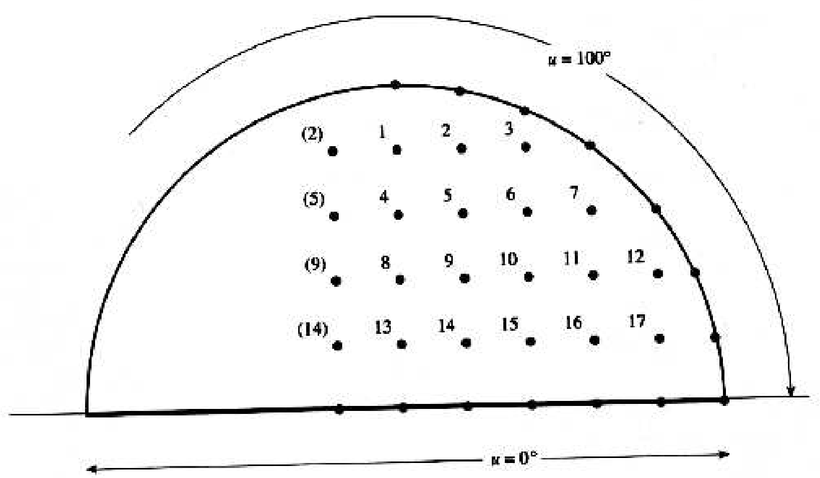
En re-arrangeant, on obtient le système tri-diagonal

$$\begin{aligned} -u\,L^{[k+1]} + 2u\,0^{[k+1]} - u\,R^{[k+1]} &= \left[u\,A - 2u\,0 + u\,B\right]^{[k]} \\ -u\,A^{[k+2]} + 2u\,0^{[k+2]} - u\,B^{[k+2]} &= \left[u\,L - 2u\,0 + u\,R\right]^{[k+1]} \end{aligned}$$

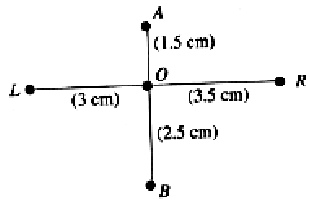
III. Régions irrégulières et grilles non rectangulaires

Si la grille n'est pas rectangulaire et que les $u_{i,j}$ ne peuvent pas être régulièrement espacés, il existe trois méthodes possibles

• 1. Placement des noeuds sur la frontière



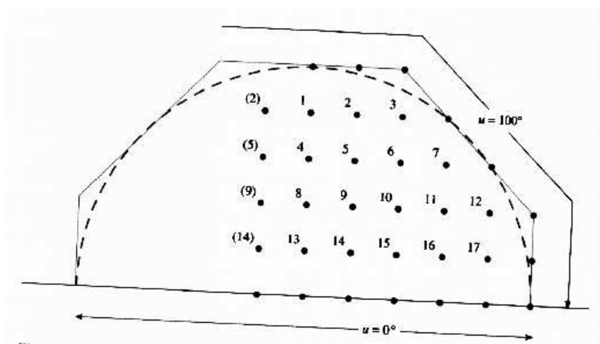
Estimations des dérivés premières et secondes



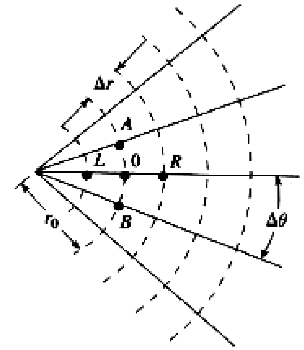
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,0} = \frac{(u0 - uL)}{hL} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{0,R} = \frac{(uR - u0)}{hR}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{0,R} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,0}\right]}{\frac{(hL+hR)}{2}} \\ &= \frac{2}{(hL + hR)}\left[\frac{uL}{hL} - \frac{(hL + hR)}{(hL \times hR) \times u0} + \frac{uR}{hR}\right]\end{aligned}$$

• 2. Distorsion de la frontière



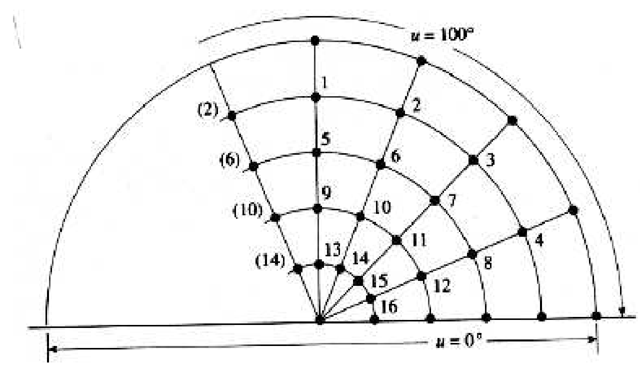
• 3. Utilisation des coordonnées polaires



$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

On trouve,

$$\begin{aligned}\nabla^2 u = \frac{(uL - 2u0 + uR)}{(\Delta r)^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \times \left[\frac{(uR - uL)}{(2\Delta r)}\right] \\ + \frac{1}{r^2} \times \left[\frac{(uA - 2u0 + uB)}{(\Delta\theta)^2}\right]\end{aligned}$$



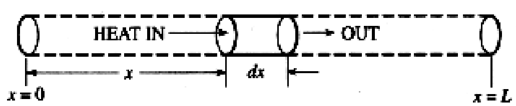
IV. Équations Différentiels Paraboliques/Hyperboliques

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- Si $\Delta < 0$ L'équation différentielle est elliptique
- Si $\Delta = 0$ L'équation différentielle est parabolique
- Si $\Delta > 0$ L'équation différentielle est hyperbolique

Équation de la Chaleur



$$k\nabla^2 u = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

Équation de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{Tg}{w}\right)\nabla^2 u$$

V. Méthode de Résolutions

• 1. Méthode Explicite

► consiste à remplacer les dérivés premières et secondes par leur approximation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{[j+1]} - u_i^{[j]}}{\Delta t} \qquad (\text{pts } x_i \text{ et tps } t_j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{[j]} - 2u_i^{[j]} + u_{i-1}^{[j]}}{(\Delta x)^2}$$

En utilisant ces approximations

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

▼

$$u_i^{[j+1]} = r \times (u_{i+1}^{[j]} + u_{i-1}^{[j]}) + (1 - 2r) \times u_i^{[j]}$$

avec $\quad r = \dfrac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$

Remarque

$\frac{\partial u}{\partial t}$ est d'ordre $o(\Delta t)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est d'ordre $o(\Delta x)^2$
► source d'erreur d'estimation

• 2. Méthode de Crank-Nicholson

▶ On utilise les mêmes ordres d'approximation pour estimer $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

▼

$$\frac{u_i^{[j+1]} - u_i^{[j]}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{k}{c\rho}\left[\frac{u_{i+1}^{[j]} - 2u_i^{[j]} + u_{i-1}^{[j]}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{[j+1]} - 2u_i^{[j+1]} + u_{i-1}^{[j+1]}}{(\Delta x)^2}\right]$$

Ce qui donne, après ré-arrangement

$$\begin{aligned} -ru_{i+1}^{[j+1]} + (2+r)u_i^{[j+1]} - ru_{i-1}^{[j+1]} &= ru_{i+1}^{[j]} + (2-r)u_i^{[j]} + ru_{i-1}^{[j]} \\ \text{avec} \qquad r &= \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Remarque

Ne peut être résolu itérativement ▶ Nécessite la résolution d'un système tri-diagonal

Équation de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{Tg}{w}\right)\nabla^2 u = \left(\frac{Tg}{w}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

▶ En remplaçant les dérivés par leur approximation numérique, on trouve

$$\frac{u_{i+1}^{[j]} - 2u_i^{[j]} + u_{i-1}^{[j]}}{(\Delta x)^2} = \frac{w}{Tg}\,\frac{u_i^{[j+1]} - 2u_i^{[j]} + u_i^{[j-1]}}{(\Delta t)^2}$$

où l'indice désigne les valeurs de x et l'exposant les valeurs de t. En ré-arrangeant, on trouve

$$u_i^{[j+1]} = \frac{Tg\,(\Delta t)^2}{w\,(\Delta x)^2}(u_{[i+1]}^{[j]} + u_{i-1}^{[j]}) - u_i^{[j-1]} + 2\left(1 - \frac{Tg\,(\Delta t)^2}{w\,(\Delta x)^2}\right)u_i^{[j]}$$

Si on rend $Tg\,(\Delta t)^2/w(\Delta x)^2$ égal à 1, le problème se simplifie considérablement

$$u_i^{[j+1]} = u_{i+1}^{[j]} + u_{i-1}^{[j]} - u_i^{[j-1]} \qquad \Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{(Tg/w)}} \tag{1}$$

Remarque

L'équation peut se résoudre itérativement si on trouve une astuce pour estimer $u_i^{[-1]}$, valeurs de u_i, une itération avant le départ !

► L'oscillation de la corde vibrante est périodique. En utilisant l'approximation des différences centrées

$$\frac{u_i^{[1]} - u_i^{[-1]}}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{en } x_i \text{ et } t = 0$$

$(\partial u/\partial t) = 0$ est connu (condition initiale).
Soit $g(x) = (\partial u/\partial t)$ à $t = 0$, on peut écrire

$$u_i^{[-1]} = u_i^{[1]} - 2g(x)\,\Delta t$$

Et en substituant dans l'équation (1), on trouve pour $t = 1$

$$u_i^{[1]} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^{[0]} + u_{i-1}^{[0]}) + g(x)\Delta t$$