DIRO
IFT 2425

INTRODUCTION AUX ALGORITHMES NUMÉRIQUES

ADDENDUM

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

CHIFFRES SIGNIFICATIFS (COMPLEMENT)

Exercice

$$X^{\star} = \underline{4}085.6$$

Intervalle de confiance, erreur absolue & relative ?

Convention

$$X^{\star} = 0.000278\underline{0}$$

7 **cse dans** $X^{\star}$ (*i.e., après la virgule*) ou 8 cse en tout

$$X^{\star} = 0.278\underline{0} \times 10^{-3}$$

4 **cse dans la mantisse** (notation flottante)

$$X^{\star} = 3.000278\underline{0}$$

8 **cse** (*en tout*)

Défaillance du missile US patriote

Le 25/02/1991, durant la guerre du golf, un missile patriote US à Dharan manque un scud Iraquien et frappe une caserne US tuant 28 soldats et blessant une centaine d'autres.

▶ La cause de ce problème fut une erreur d'estimation du temps écoulé depuis la mise en tension de l'ordinateur du missile (100 heures), causée par une simple erreur d'affectation.

Tps de l'horloge interne est mesuré en dizième de secondes puis multiplié par la valeur $1/10 = 1/2^4 + 1/2^5 + 1/2^8 + 1/2^9 + ... = (0.00110011001\ldots)_2$ (stocké dans un registre de 24 bits).

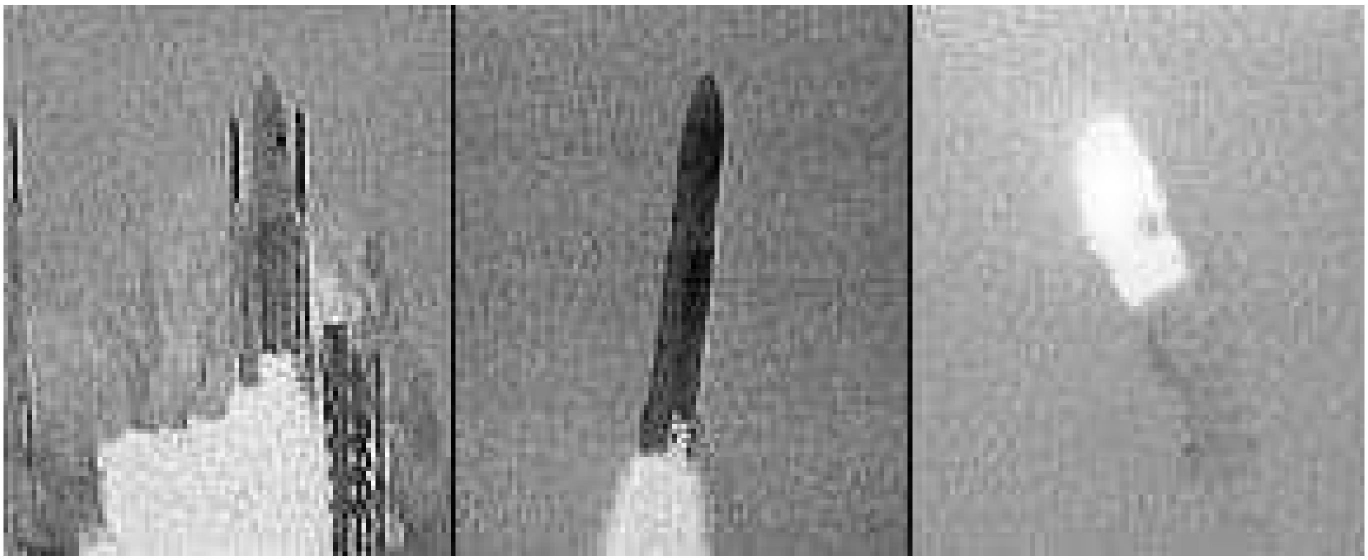
▶ introduit une erreur de $\epsilon = (0.-23 \times 0 - 11001100...)_2$ ou $(0.000000095)_{10}$. Soit une erreur totale $= \epsilon \times 100 \times 60 \times 60 \times 10 = 0.34$ secondes.

Cf. Page Web du Cours (Rubriques : Interesting Links)

ERREURS D'OVERFLOW (EXEMPLE)

L'explosion de la fusée Ariane 5 juste après son décollage le 04/06/1996 est la conséquence d'un simple overflow.

Explosion d'Ariane 5



▶ La cause de la défaillance venait d'une erreur logicielle dans le sytème de référence inertielle. Plus précisement un nombre flottant de 64 bits (> 32768) lié à la vitesse horizontale de la fusée fut convertit en 16 bits.

CONDITION DE CONVERGENCE DU POINT FIXE

Méthode de Newton / du point fixe ► $x_n = g(x_{n-1})$

L'erreur d'estimation à l'itération n est ► $\varepsilon = |x_n - r|$

$$\begin{aligned}(x_n - r) &= \frac{g(x_{n-1}) - g(r)}{(x_{n-1} - r)}\,(x_{n-1} - r) \\ &= g'(\xi)\,(x_{n-1} - r)\end{aligned}$$

avec $\xi \in J$ (J est un interval contenant $x_0, x_1, \ldots, x_n$)

Si g est continue sur $J = [\,a, b\,]$
$\exists\, \xi \in J$ tq $\dfrac{g(b) - g(a)}{(b - a)} = g'(\xi)$

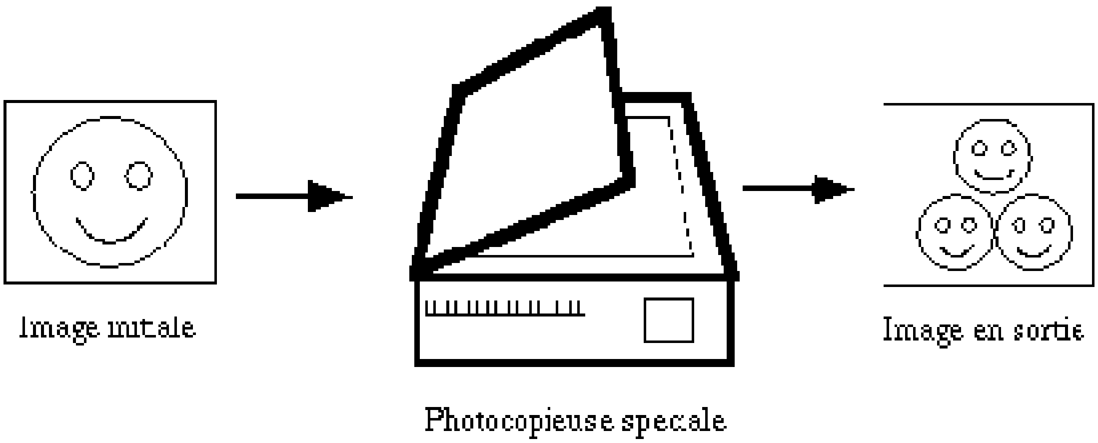
En posant $K = |g'(\xi)|$

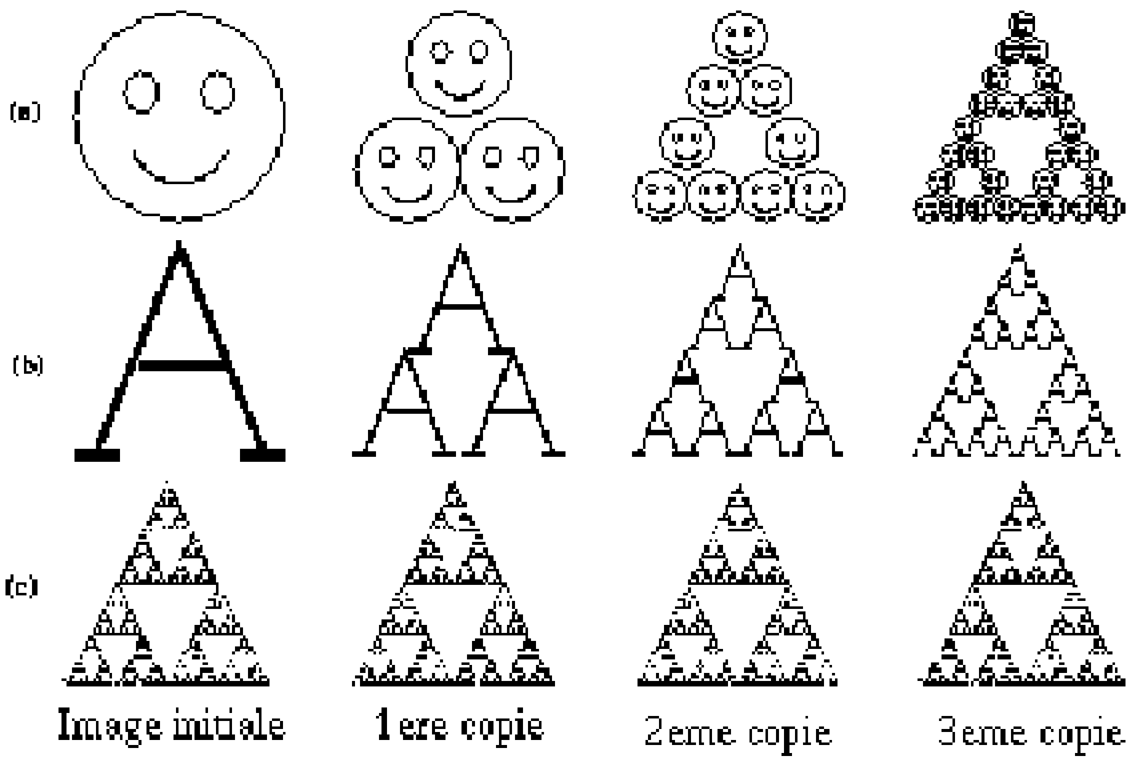
$$\begin{aligned}|x_n - r| &= K\,|x_{n-1} - r| \\ &= K^2\,|x_{n-2} - r| \\ &= \ldots \\ &= K^n\,|x_0 - r| \\ &\leq K^n\,(b - a)\end{aligned}$$

Convergence si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = r$, cad ssi $|g'(\xi)| < 1$ ($\forall\, \xi \in J$)
Convergence d'autant plus rapide que $K < 1$

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires
APPLICATION DES POINTS FIXES

Génération d'images fractales





Les trois premières copies générées par la photocopieuse pour différentes images d'entrée

▶ Toute les copies convergent vers la même image finale, que l'on appelle l'attracteur

COMPRESSION FRACTALE (2)

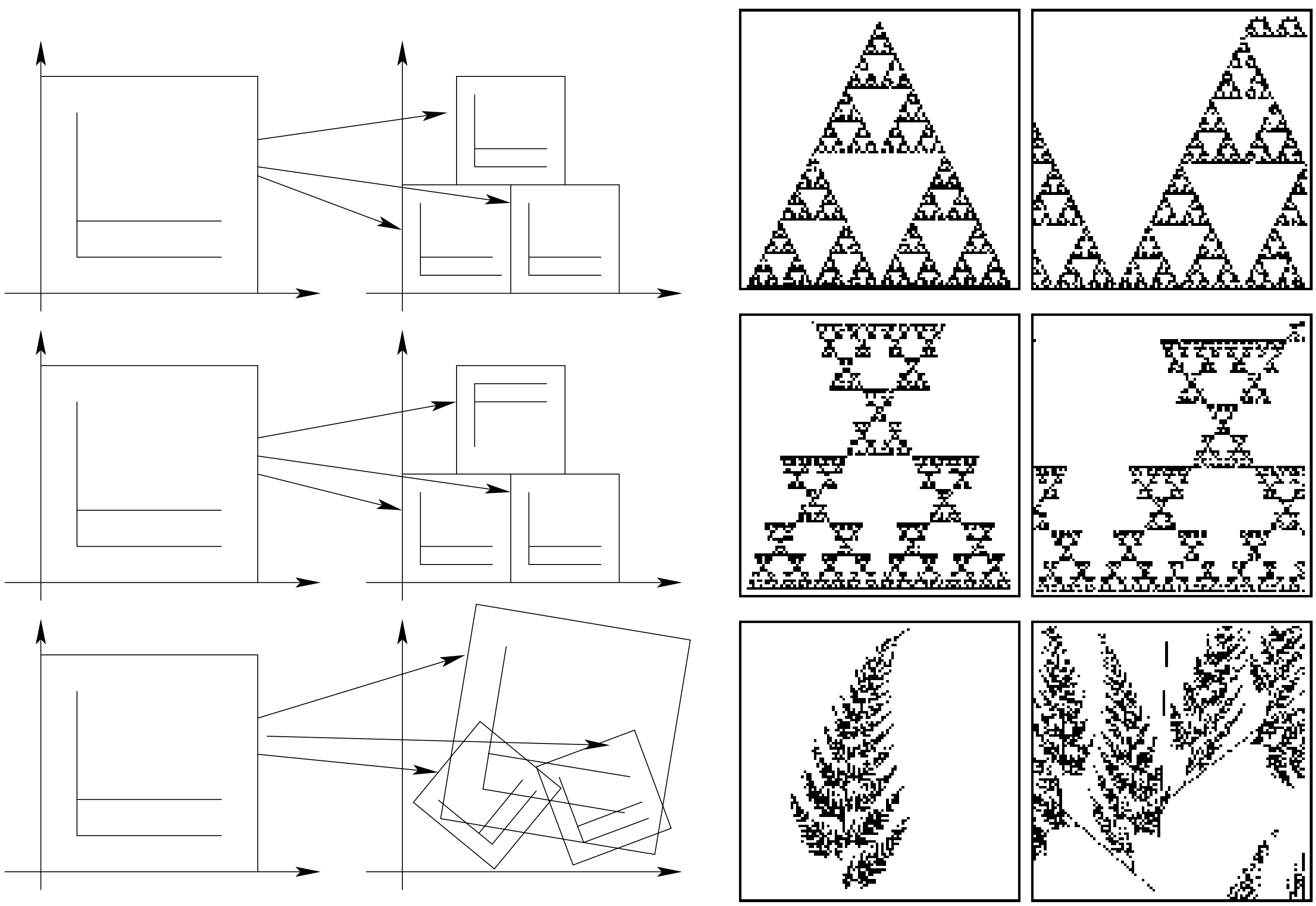
Résultat final ▶ dépend uniquement de la manière dont l'image d'entrée est transformée

▼

Résultat final peut être décrit par un ensemble de transformations affines du type

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

Condition Nécessaire : transformation contractante (i.e., 1 transformation donnée appliquée à 2 points de l'image initiale les rapproche l'un de l'autre dans la copie)



Des transformations, leurs attracteurs et un agrandissement de ceux-ci

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires
COMPRESSION FRACTALE (3)

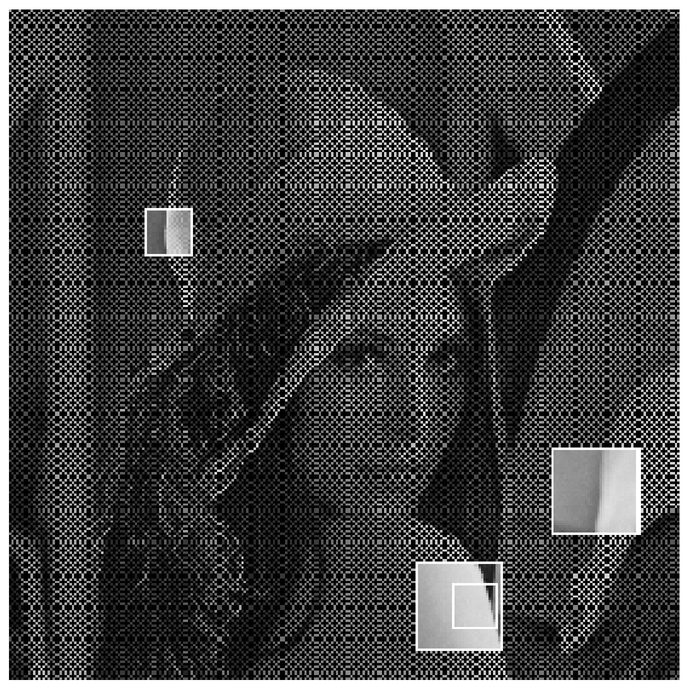
Chaque image est formée de copies transformées (et réduites) d'elle-même et donc doit avoir des détails à toute les échelles ▶ image fractale

Principe de la compression fractale

Consiste à stocker les paramètres de la transformation donnant l'image finale considérée comme étant un attracteur (M. Barnsley)

Compression fractale d'images réelles

L'image d'un visage n'est pas fractales ou pas exactement auto-similaire, par contre ...



Exemple de régions qui sont similaires à différentes échelles

▼

L'image est formée de copies convenablement transformée de parties d'elle-même

▼

Compression d'une image quelconque : stockage des déformations permettant de générer cette image

COMPRESSION FRACTALE (4)

Exemple

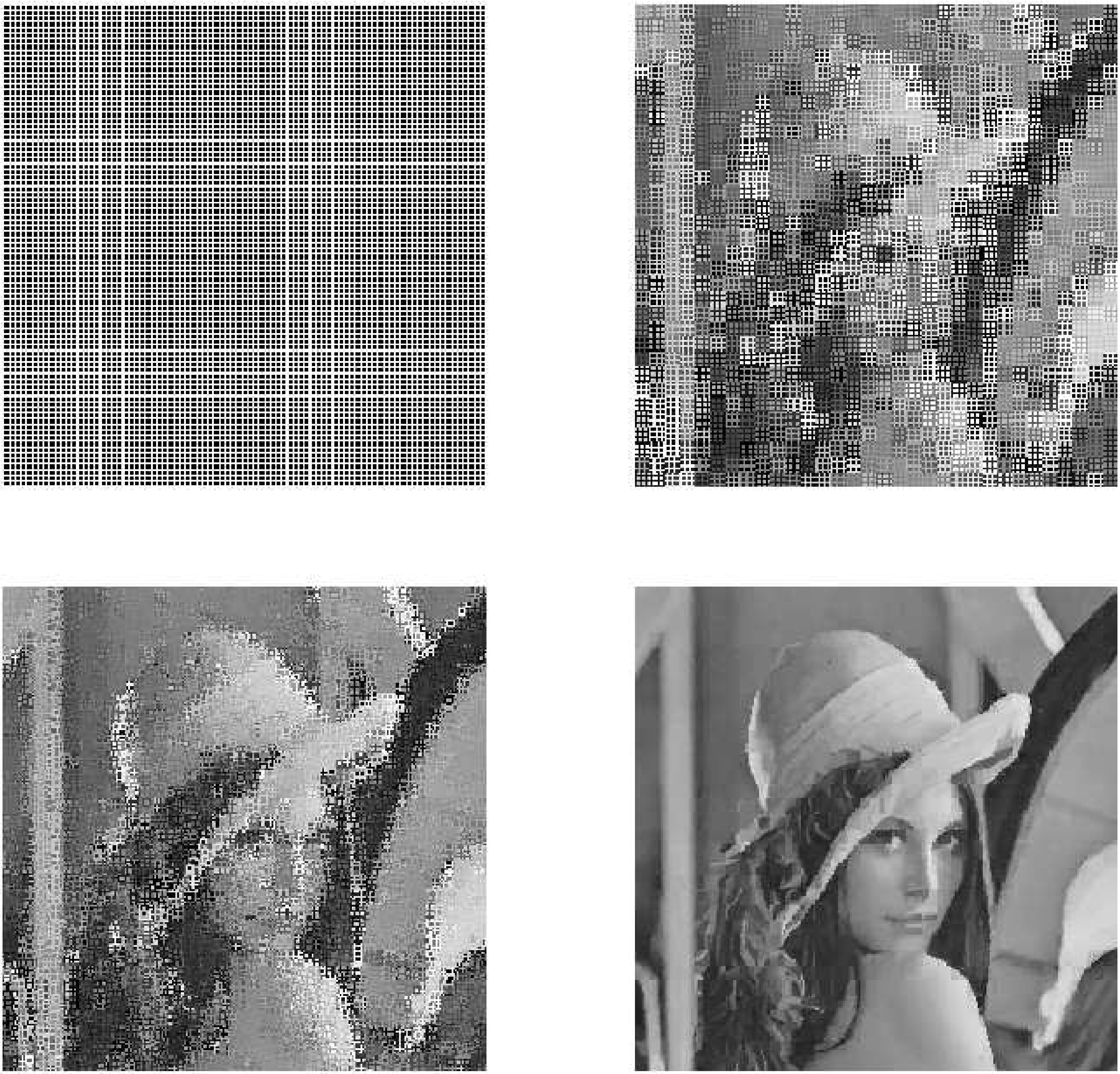


Image originale, première, seconde et dixième
itération de la décompression fractale

CRAMER

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \end{bmatrix}}$$

Super Calculateur 2004

Earth Simulator (ES)
Installé au Japon a l'Agence spatiale japonese NASDA (2004)

- 5120 CPUs (640 x 8) NEC 500 Mhz
- Puissance de calcul : 41 TeraFlops (8 GFlops par CPU)
- Mémoire de 2 Giga Octets par CPU
- 16 GigaOctet par noeuds

Utilisé pour la simulation de phénomène climatique, océanique, atmosphérique, tectonique, etc.

Super Calculateur 2014

National Super Computer Center in Guangzhou (China)

- 3 120 000 CPUs (Intel Xeon)
- Puissance de calcul : 40 000 TeraFlops

Utilisé à l'Université nationale de technologie de la défense de la République populaire de Chine

Chap. III : Résol. Syst. d'Éq. Linéaires
INVERSION DE MATRICE (RÉSUMÉ)

Inversion de la Matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1- Méthode de Cramer

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(cf. Chap. 3 page 5)

2- Élimination de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer A^{-1}, on doit résoudre le système augmenté suivant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par élimination de Gauss (sans pivotage)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On doit résoudre par substitutions arrière les trois systèmes suivants

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne par substitutions arrière

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/9 \\ -1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/9 \\ -1/9 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 2/9 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3- Gauss Jordan

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\blacktriangledown$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/9 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

4- Factorisation LU

Élimination de Gauss

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Factorisation directe

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1- Résolution pour

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{en posant} \quad y = Ux \quad \blacktriangleright \quad \begin{aligned} L\,Ux &= b \\ L\,y &= b \\ U\,x &= y \end{aligned}$$

2- On trouve U^{-1} et L^{-1} (respectivememt par substitution arrière et avant pour chaque vecteur b_i), puis

$$A^{-1} = (L\,U)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

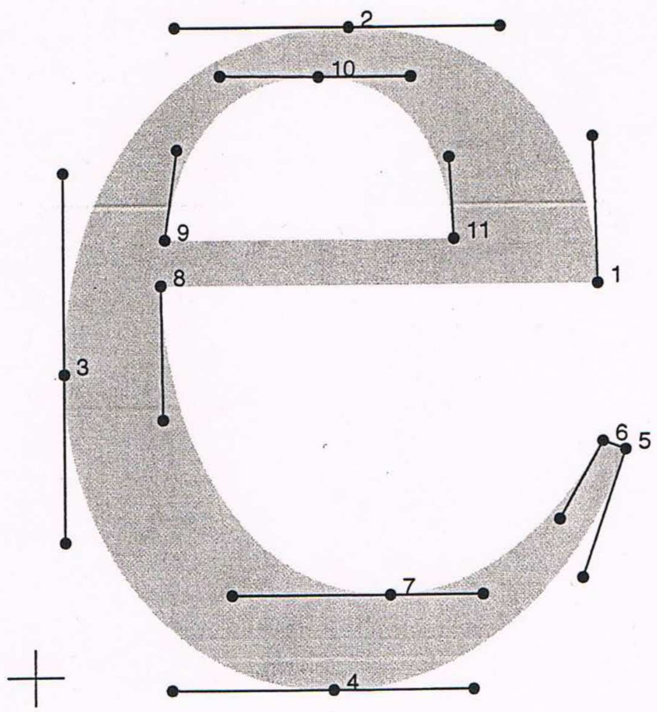
Exercices

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chap. IV : Interpolation Poly. & Colloc.

APPLICATION DES BÉZIERS (1)

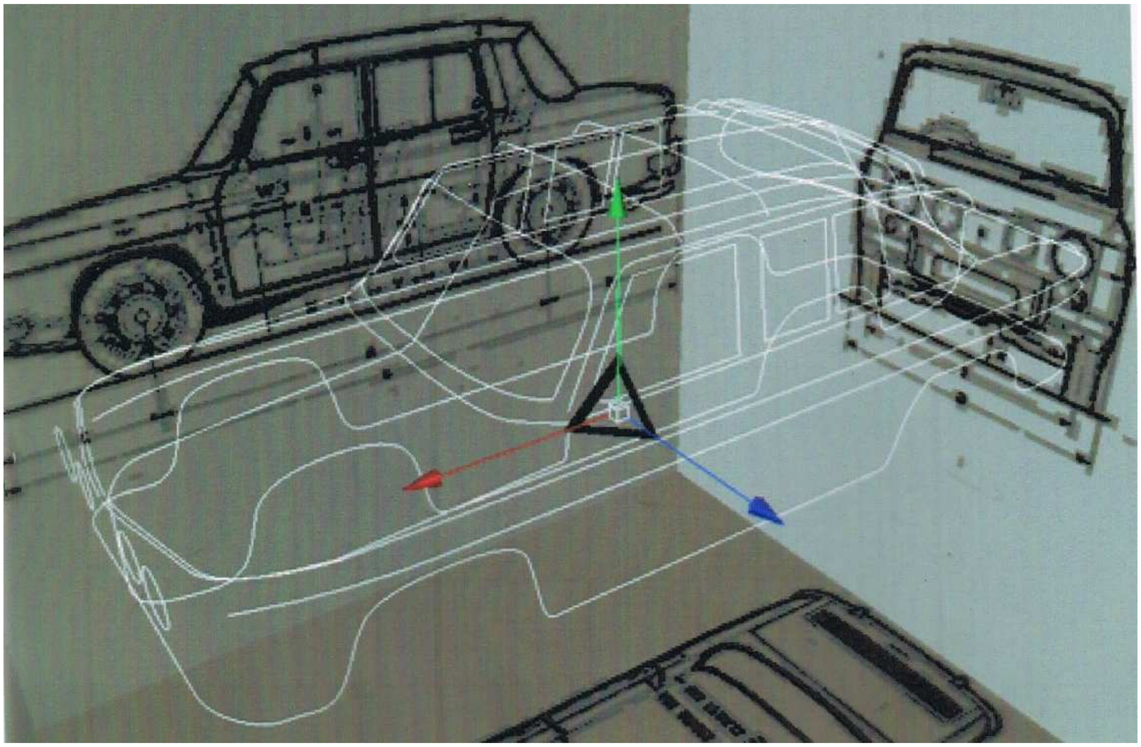


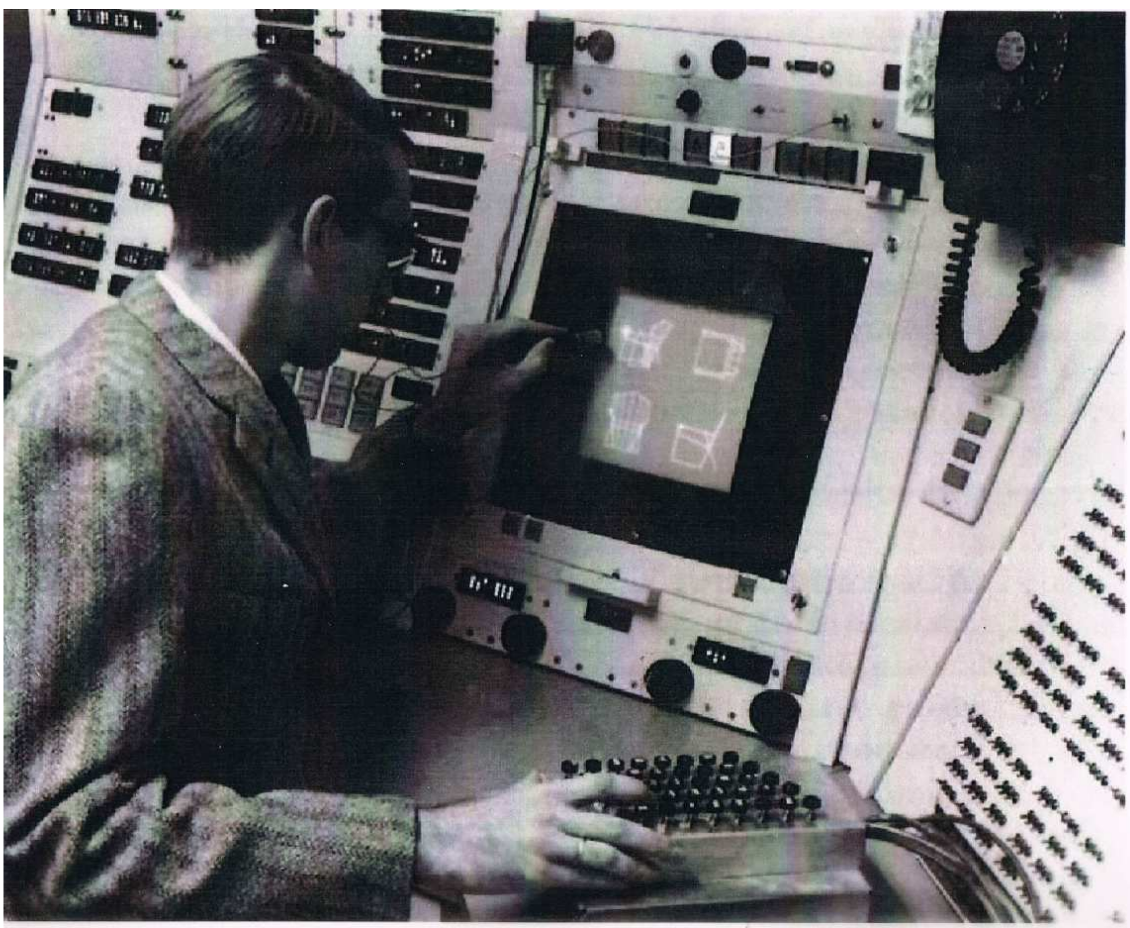

```
\e{
402 276 moveto                          % départ point 1
399 380 334 458 226 458 curveto         % courbe de 1 à 2
102 458 22 356 22 214 curveto           % courbe de 2 à 3
22 95 97 -10 212 -10 curveto            % courbe de 3 à 4
312 -10 390 68 421 158 curveto          % courbe de 4 à 5
405 164 lineto                          % droite de 5 à 6
374 109 319 57 253 57 curveto           % courbe de 6 à 7
140 57 92 181 91 276 curveto            % courbe de 7 à 8
closepath                               % fermer contour extérieur
94 308 moveto                           % départ au point 9
103 372 134 424 204 423 curveto         % courbe de 9 à 10
270 423 297 366 300 308 curveto         % courbe de 10 à 11
closepath} def                          % fermer contour intérieur
```

FIGURE 15 – *Un caractère est défini par quelques points de contrôle et tangentes. En haut, le schéma d'un « e » ; en bas, le programme PostScript le décrivant.*

FIG. 2: Extrait de *Caractères numériques : introduction*, de Jacques André

APPLICATION DES BÉZIERS (2)



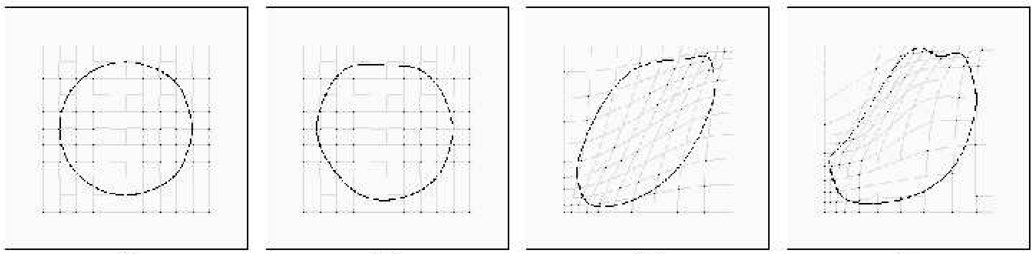


APPLICATION DES B-SPLINES CUBIQUES

C. DESCRIPTION OF AFFINE TRANSFORMATIONS

Finally, we introduce a set of admissible linear transformations on γ involving translation, scaling, rotation, and stretching of the template.

Let γ_θ be a deformed version of γ_0 according to the aforementioned transformations with parameter vector θ. γ_θ is described by 5 parameters (affine transformations) + 4 pairs of global non affine deformation parameters + $(n-2)$ $(\delta_{x_i}, \delta_{y_i})$.

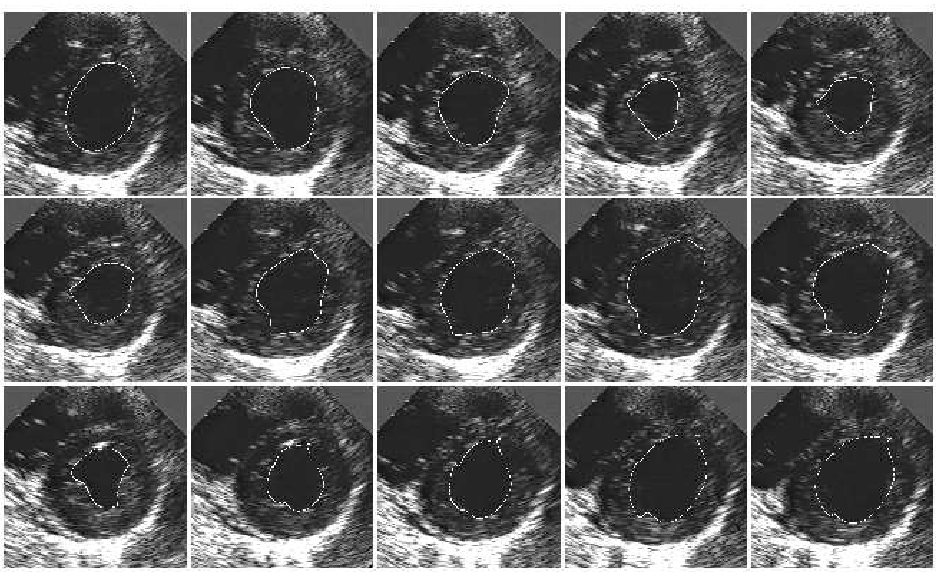


(a) (b) (c) (d)

Local and global non-affine deformations : (a) Initial template. (b) γ_0 with local random perturbations. Global non-affine deformations on this locally deformed template with : (c) $M = N = 1$ and $\xi^x_{mn} = \xi^y_{mn} = 2$ $\forall m, n \in \{0,1\}^2$. (d) $M = N = 2$ and $\xi^x_{mn} = \xi^y_{mn} = 2$ $\forall m, n \in \{0,1,2\}^2$.

[3]

TRACKING STEP



Tracking of the endocardial contour in a medical echographic sequence at different time frames during the cardiac cycle. From top left to bottom right : frame 1, 4, 6, 9, 12, 13, 18, 20, 27, 30, 35, 40, 41, 44, 46.

[14]

Chap. V : Dérivation Numérique
EXERCICE

Qu'approxime la formule de différence suivante ? :

$$\frac{1}{h}\Big[f(x_0+2h)-2\,f(x_o)+f(x_0-h)\Big]$$

Chap. V : Dérivation Numérique

EXERCICE

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	(f_0)	(f_1)	(f_2)	(f_3)	(f_4)

Formule centrées :

$$f_1'' = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{(\pi/4)^2} \approx -0.67149 + O(h^2)$$

$$f_2'' = \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{(\pi/4)^2} \approx -0.95 + O(h^2)$$

$$f_3'' = \frac{f_2 - 2f_3 + f_4}{(\pi/4)^2} \approx -0.67149 + O(h^2)$$

Formule non centrées :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(\pi/4)^2} \approx -0.67149 + O(h^2)$$

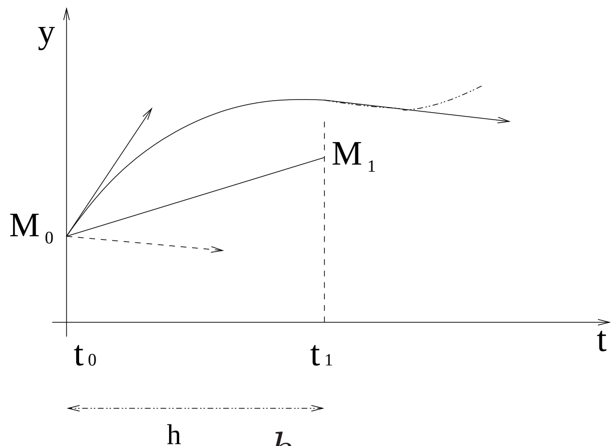
$$f_4'' = \frac{-\left\{f_2 - 2f_1 + f_0\right\}}{(\pi/4)^2} \approx 0.67149 + O(h^2)$$

Compromis Precision/Rapidité

	Euler Modifié (RK2)	RK 4	RK 5	RK 6
Ordre Glob.	$O(h^2)$	$O(h^4)$		
Pas	h=0.1			
Précision	0.01			
Cout calc. /iter.				
Nb. d'Iter.				
Cout calc. Glob.				

EULER MODIFIÉ ET MID-POINT

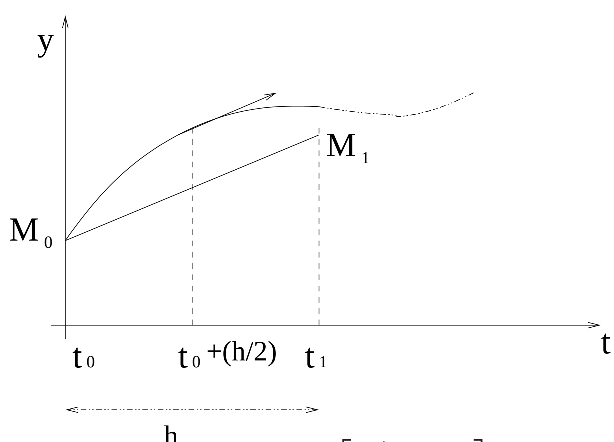
MÉTHODE D'EULER MODIFIÉ



$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[y'_j + y'_{j+1}\right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, y_j) + f(t_j, \tilde{y}_{j+1})\right]. \end{aligned}$$

MÉTHODE DU POINT MILIEU



$$y_{j+1} = y_j + h\left[y'_{j+0.5}\right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1/2} &= y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + h\, f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2}). \end{aligned}$$

Chap. VII : Valeurs & Vecteurs Propres

APPLICATION DES VALEURS PROPRES

Modes de déformations des vertèbres

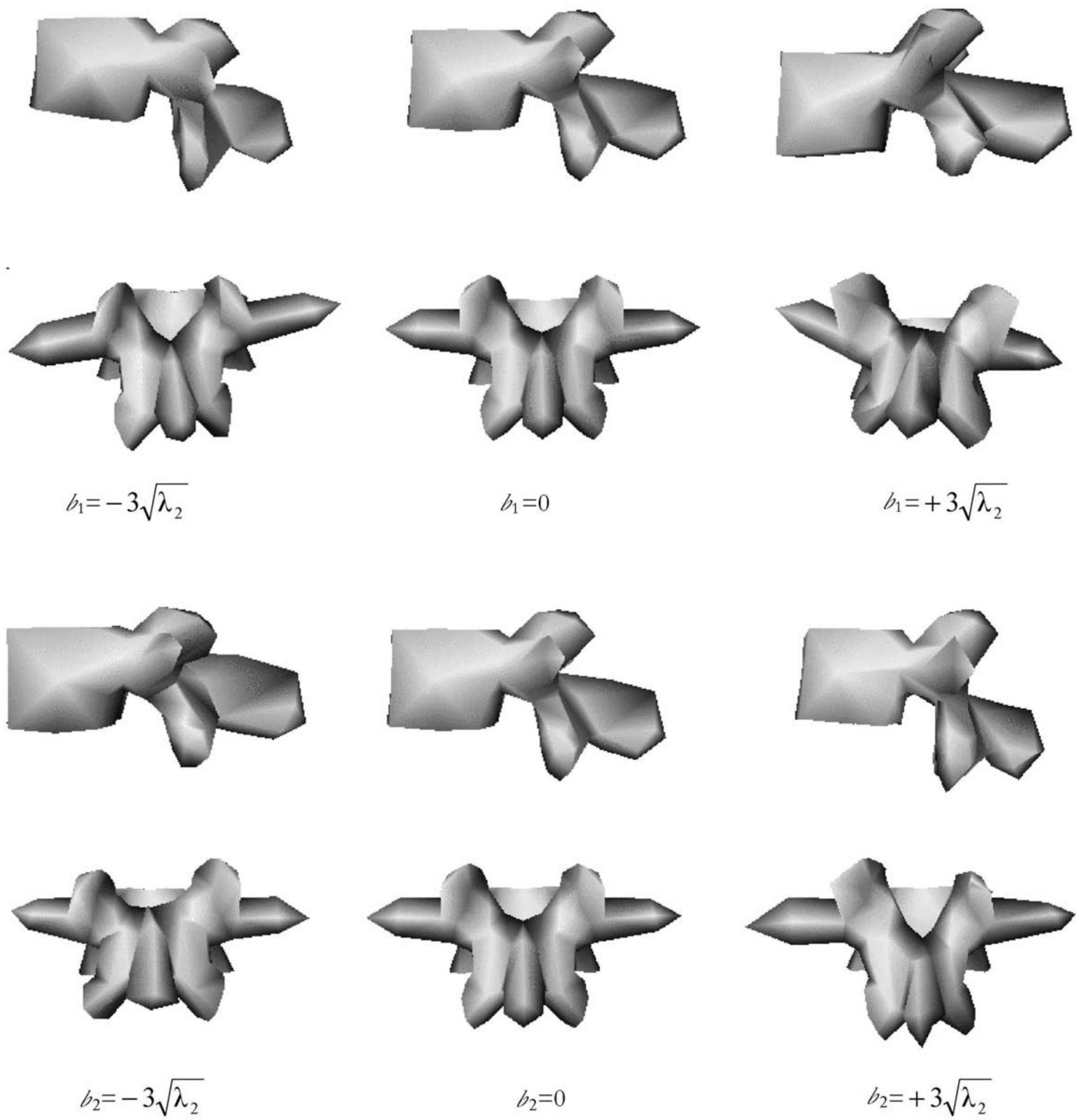


Fig. 1. Visualization of mean shape (middle row) from the sagittal (top row) and coronal views (bottom row), and two deformed shapes obtained by applying ± 3 standard deviations of the first and second deformation modes to the mean shape for the L3 vertebra.