



# **TRAITEMENT DU SIGNAL**

## **SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII**

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

# **SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII**

## **SOMMAIRE**

Conception des filtres RIF .....	2
Conception des filtres RII .....	9

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (1)

### Rappel

$H(z)$  est un polynôme de degré  $N$  en  $z^{-1}$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}$$

Filtre stable avec une réponse impulsionnelle finie et réelle constitué de la suite des  $N+1$  coefficients  $b_0, \dots, b_N$

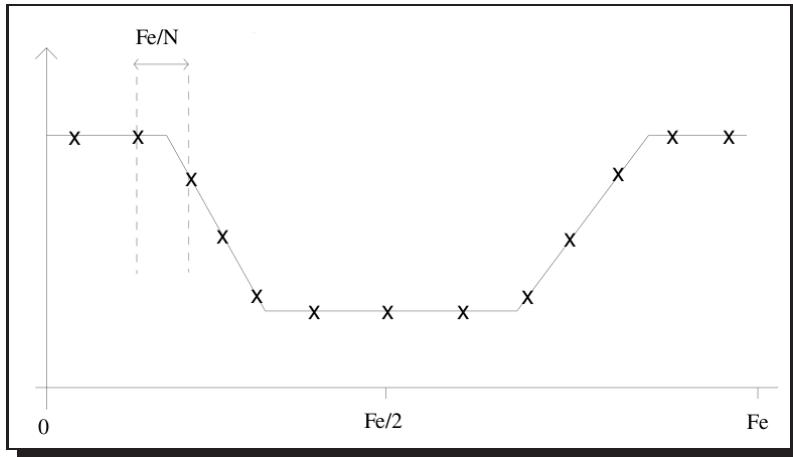


**La réponse fréquentielle est la TF des coefficients  $b_i$**

1

### Synthèse par Interpolation Fréquentielle

On se donne un gabarit fréquentiel que l'on échantillonne et on calcul la TFD inverse de ces échantillons



$$h(n) = h_n = \sum_{u=0}^{N-1} H\left(\frac{u F_e}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi j u F_e n T_e}{N}\right)$$

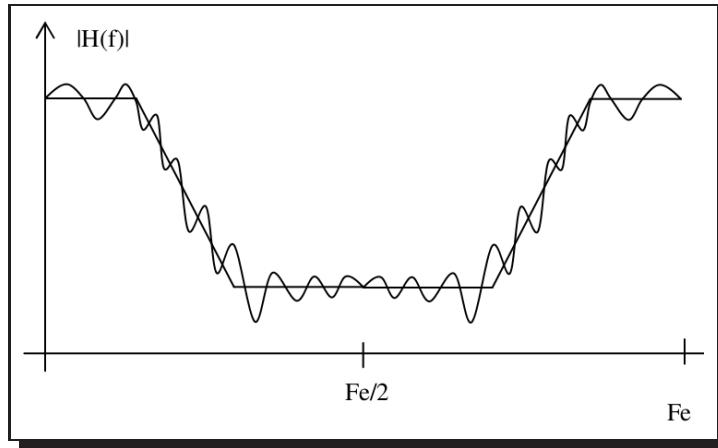
Les  $h_i$  ainsi obtenus vont bien donner la fonction de transfert idéale aux points  $H\left(\frac{n F_e}{N}\right)$  mais il donneront un spectre avec des ondulations entre ces valeurs

**Le fait de prendre  $N$  coefs  $b_i$  revient à tronquer  $h$  par  $\Pi_{N T_e}$**

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (2)

Le fait de prendre un nb finit  $N$  de coefs  $b_i$  revient à considérer le gabarit fréquentiel suivant



### Nota

La troncature simple est la troncature par fenêtre rectangulaire. On peut considérer d'autre types de troncatures, Hanning, Blackman, etc.

2

## Synthèse par Interpolation Temporelle

La TF inverse du gabarit fréquentiel idéal nous donne une expression analytique de la réponse impulsionnelle que l'on échantillonne et que l'on tronque

$$\begin{aligned} & \text{Diagram showing the magnitude of the ideal filter frequency response } H(e^{j\omega T_s}) \text{ versus frequency } f. \\ & \text{The plot shows a rectangular window centered at } f_B \text{ from } -f_B \text{ to } f_B. \\ & \text{The x-axis is labeled with } -f_s/2, -f_B, f_B, f_s/2. \\ & \text{The y-axis is labeled } H(e^{j\omega T_s}). \\ & \text{A vertical line is drawn at } f = 0 \text{ with a value of } 1. \\ & \text{Below the plot, the equation } \mathcal{F}^{-1} \Leftrightarrow 2 f_b \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot f_b \cdot t)}{\pi \cdot t} = h(t) \text{ is shown.} \end{aligned}$$



### Nota

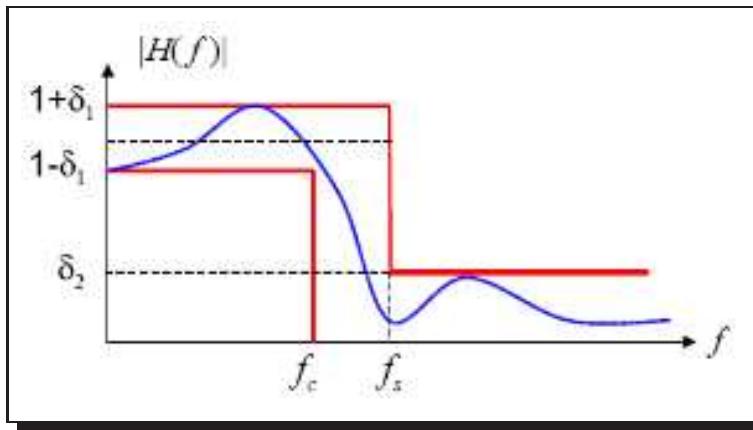
Même problèmes que pour la méthode précédente

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (3)

3

Synthèse par Méthode de la Fenêtre



### Gabarit fréquentiel réel

- Bande Passante (BP)
- Largeur Bande Transition ( $\Delta F = f_s - f_c$ )
- Bande Atténée (BA)
- Amplitude des oscillations en BP ( $\delta_1$ ) et BA ( $\delta_2$ )

+ Contrainte de Phase linéaire  $\Rightarrow$  symétrie des coefs

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

1

On détermine la longueur  $N$  nécessaire

$$N \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{f_e}{\Delta f} \cdot \log_{10} \left[ \frac{1}{10 \delta_1 \delta_2} \right]$$

2

Calcul de la TF inverse à partir du filtre idéal

$$\text{Si } N \text{ impair} \quad h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{2\pi j f n} df$$

$$\text{Si } N \text{ pair} \quad h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{-\pi j f} e^{2\pi j f n} df$$

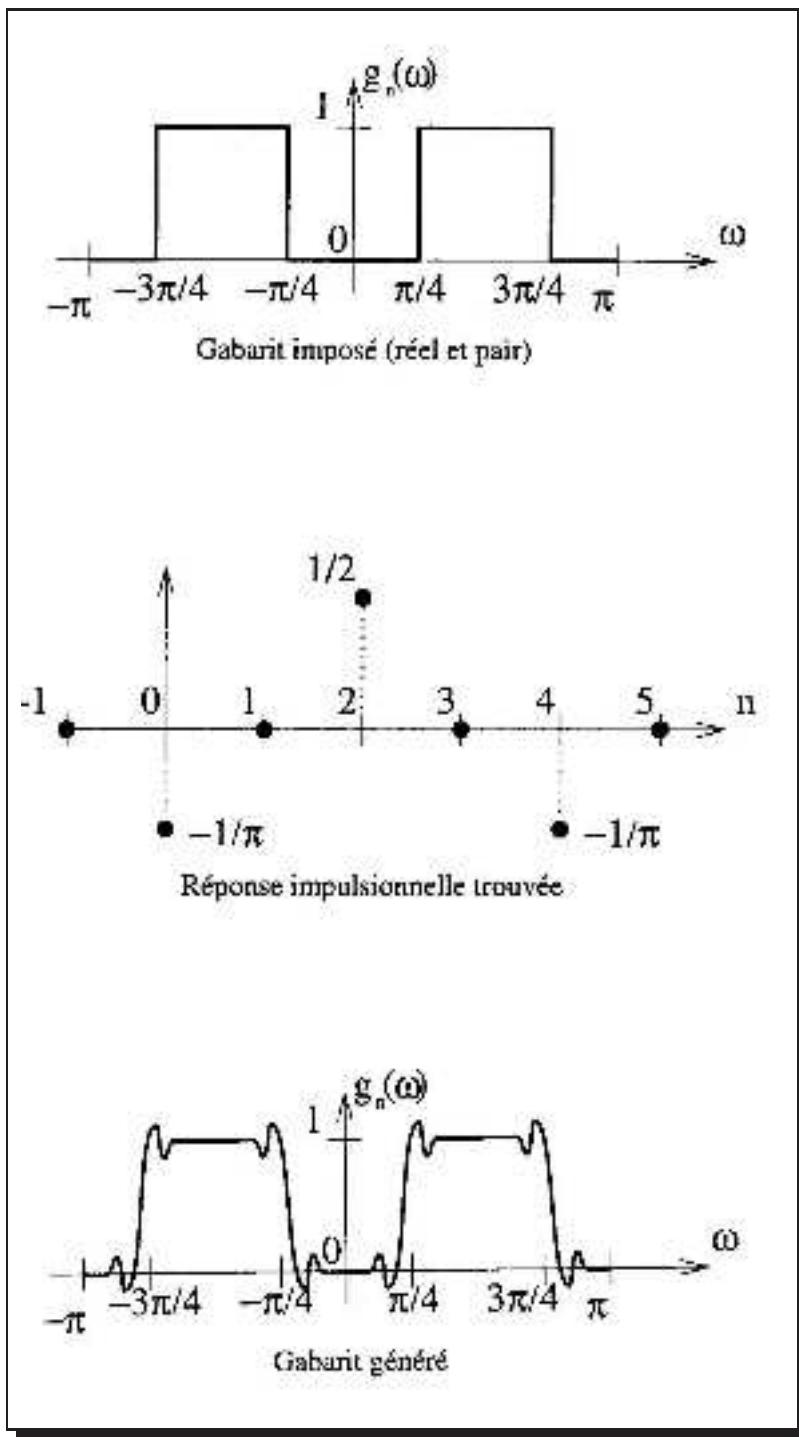
3

Troncature à  $N$  échant. (+ Apodisation)

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (4)

Exemple



Nota

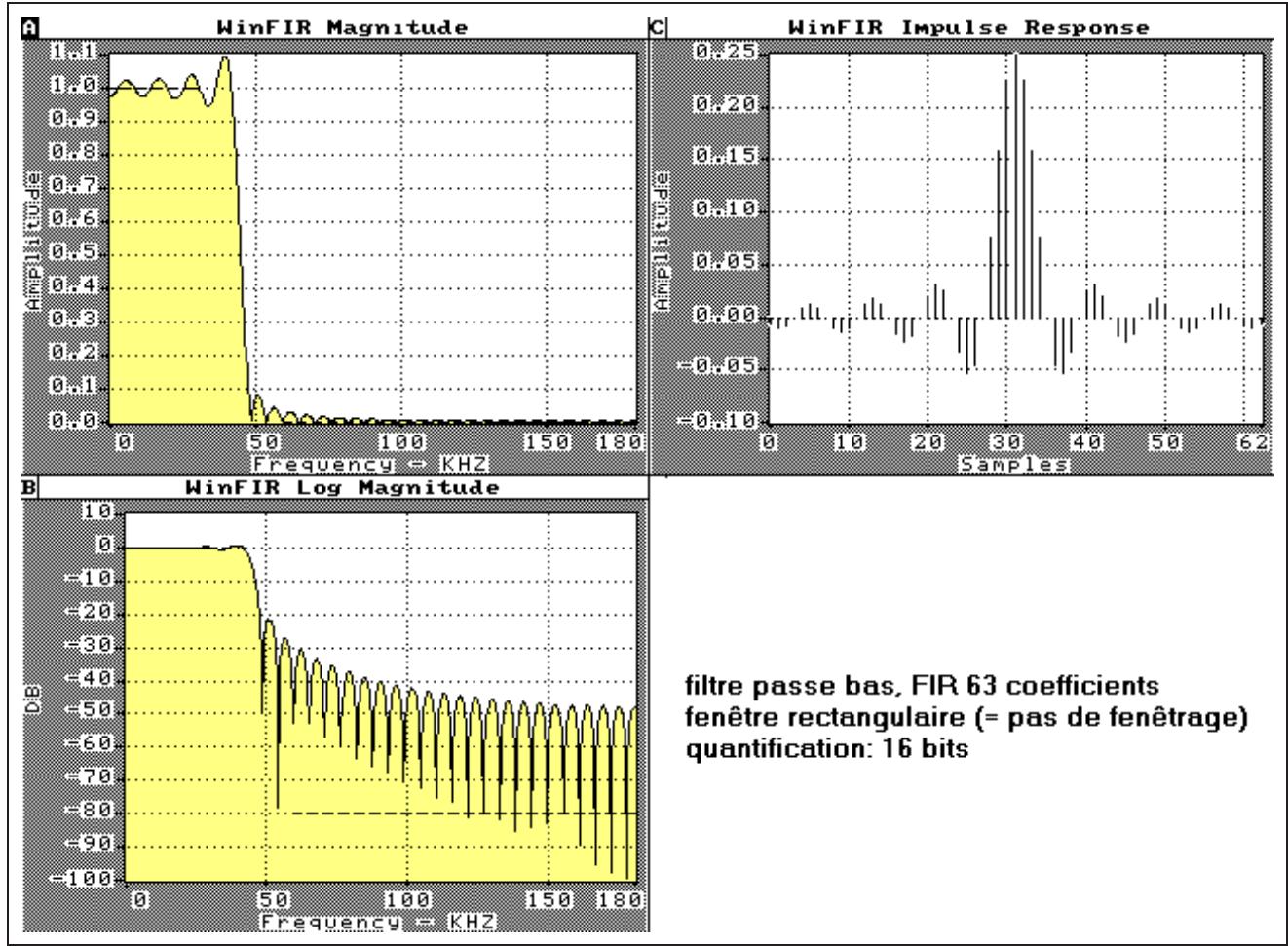
- Pour éviter un tronquage brutal (et phénomène de Gibbs) il convient d'appliquer une fenêtre d'apodisation
- on décalera la réponse impulsionnelle afin qu'elle devienne causal

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (5)

### Exemple

Avec Apodisation par fenêtre rectangulaire



### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 30 \text{ kHz}$
- $f_2 = f_s = 60 \text{ kHz}$
- Gain = -80 dB dans BA

### Nota

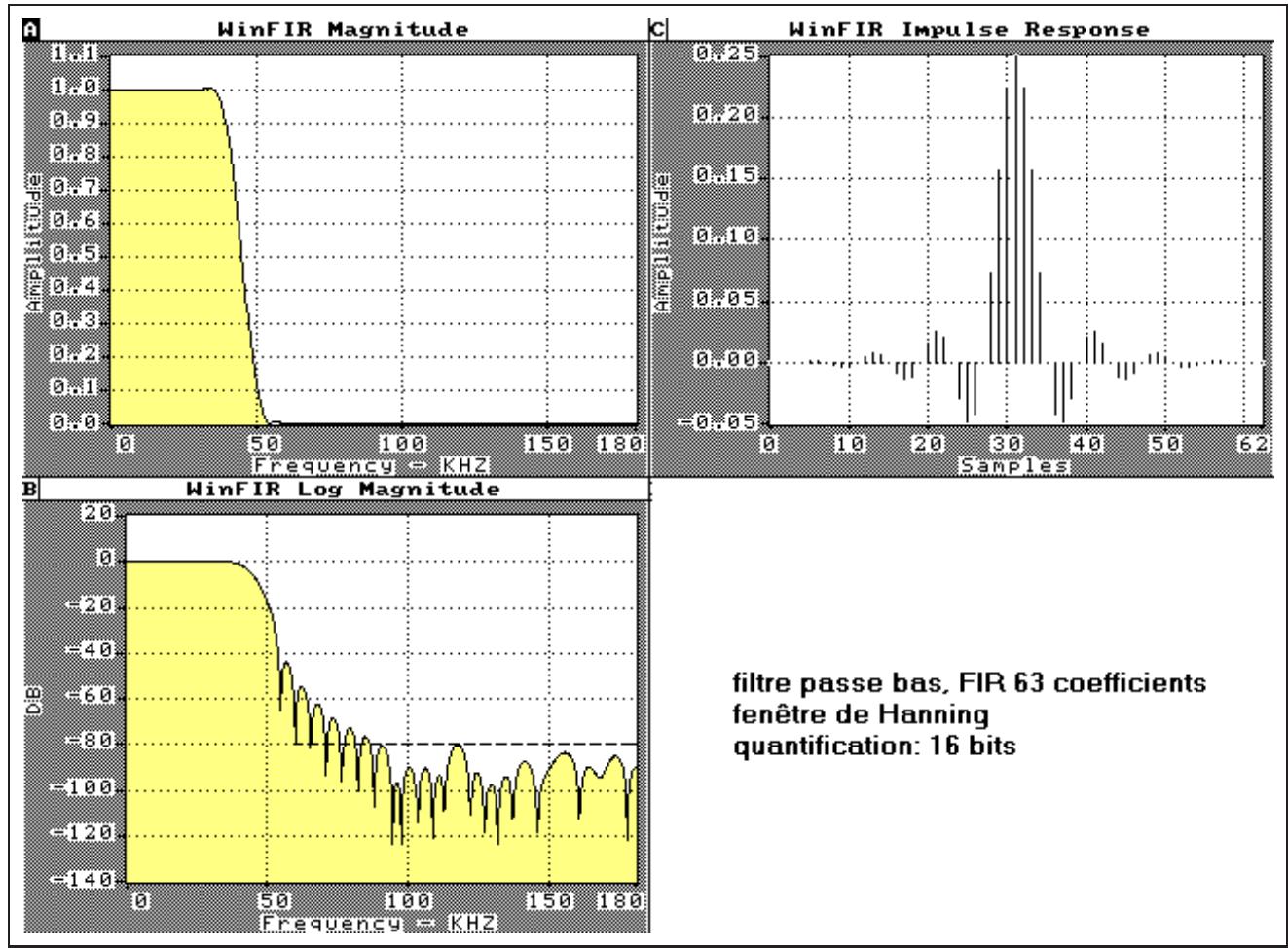
Ne peut être réalisé avec une fenêtre rectangulaire  
(Gain > 80 dB) dans BA

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (6)

Exemple

Avec Apodisation par fenêtre de Hanning



Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 30 \text{ kHz}$
- $f_2 = f_s = 60 \text{ kHz}$
- Gain = -80 dB dans BA

Nota

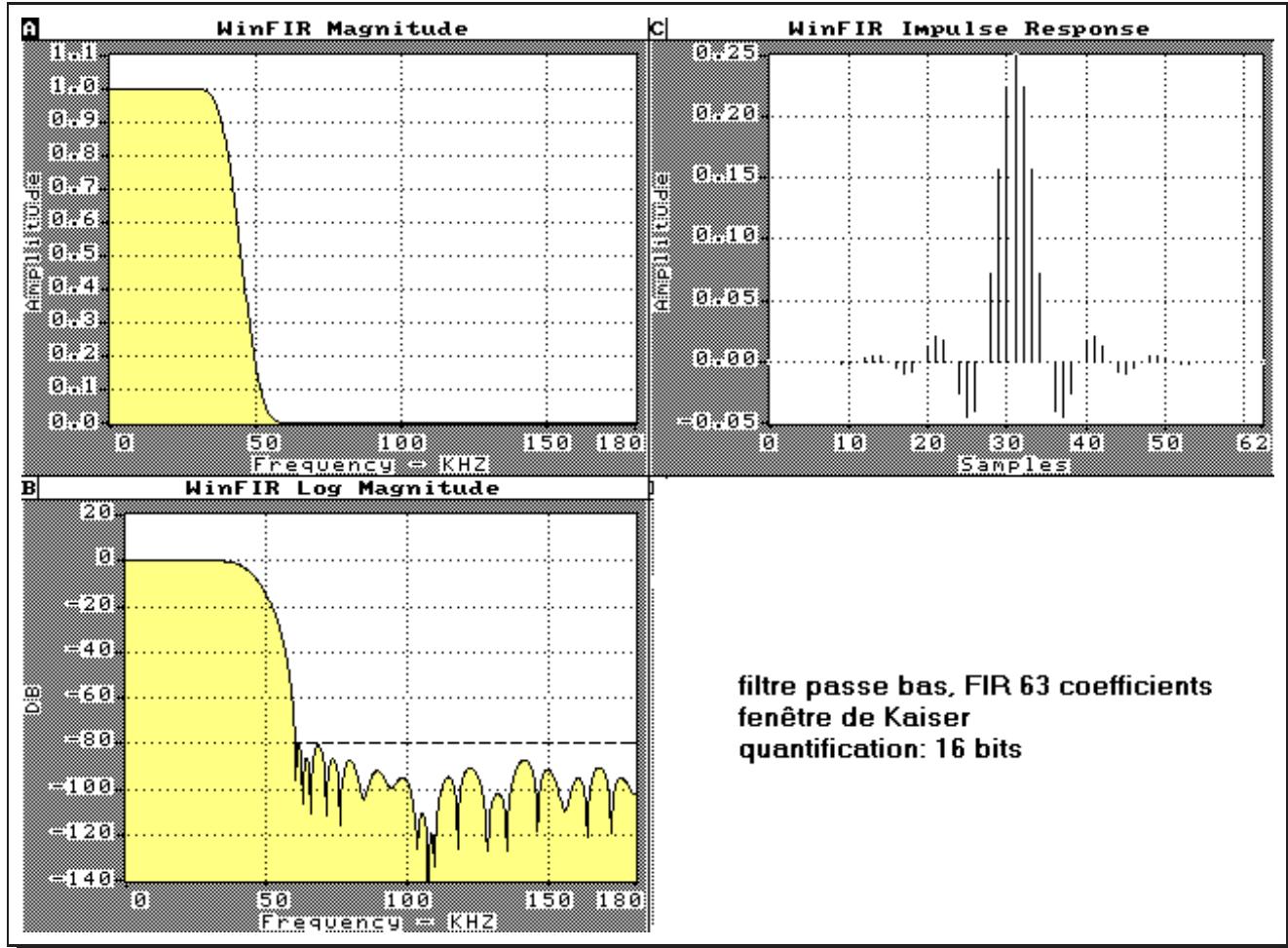
Le gain souhaité (-80 dB) dans la BA demanderait plus de 63 coefficients

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RIF (7)

### Exemple

#### Avec Apodisation par fenêtre de Kaiser



#### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 30 \text{ kHz}$
- $f_2 = f_s = 60 \text{ kHz}$
- Gain = -80 dB dans BA

### Nota

Le gain souhaité (-80 dB) est réalisé avec 63 coefs

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (1)

### Rappel

$H(z)$  est une fraction en  $z^{-1}$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

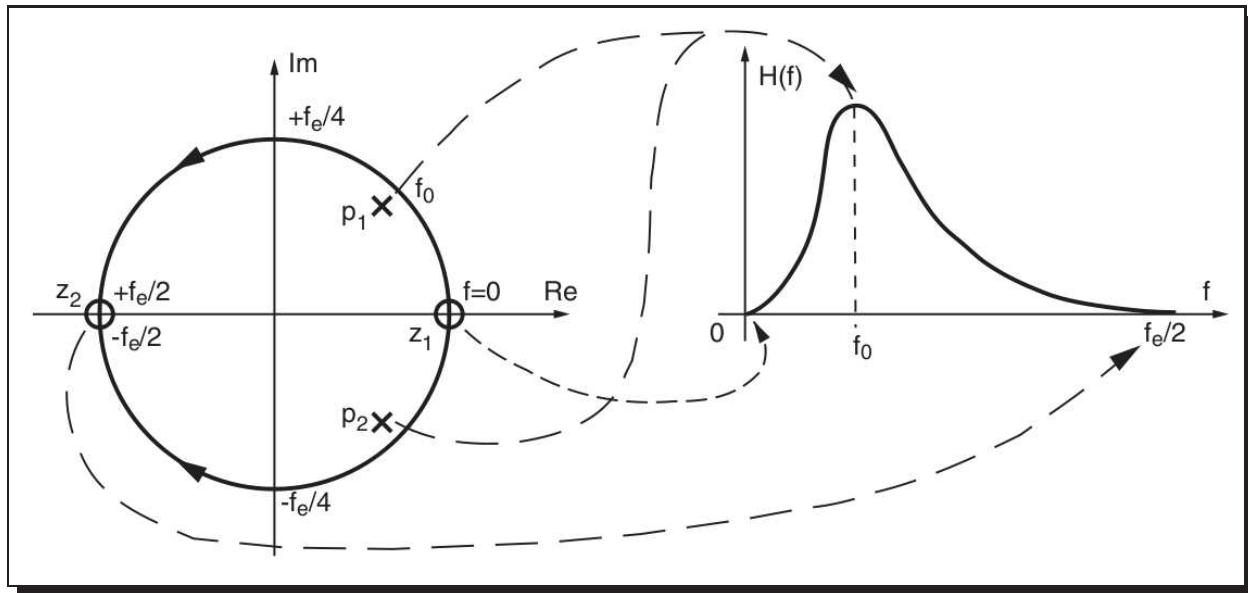
Filtre de réponse impulsionnelle infinie, définie par une équation récursive avec des pôles et zéros actifs et stable si les pôles sont à l'intérieur de  $\mathcal{C}_{|z|=1}$

► Pour un point  $M(f)$  sur  $\mathcal{C}_{|z|=1}$ , proximité d'un zéro  $\Rightarrow H() \searrow$  et proximité d'un pôle  $\Rightarrow H() \nearrow$

1

### Synthèse directe par Placement des pôles et zéros

Lorsqu'on veut réaliser une  $H(f)$  approximative



Comment modifier ce filtre pour

- || • La BP soit plus étroite ?
- Gain en continu ( $f = 0$ ) fixé ?
- Gain en haute fréquence ( $f = f_e/2$ ) soit fixé ?

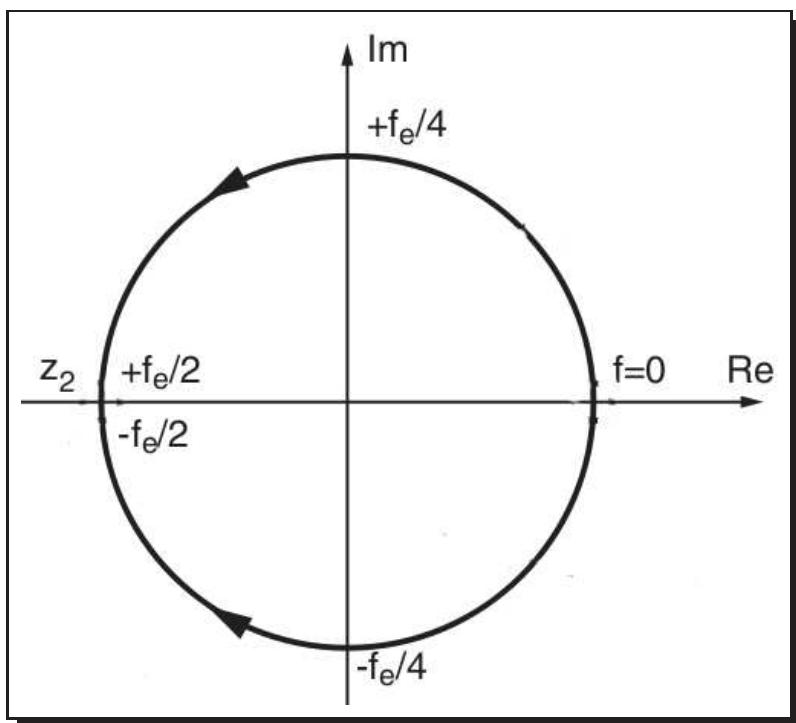
# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (2)

### Exercice

Filtre rejecteur (notch filter) avec  $f_e = 1000$  Hz et fréquence à rejeter de 50 Hz

- ▶ 2 pôles sur en  $\theta = \pm 18^0$  à l'intérieur du  $\mathcal{C}_{|z|=1}$ . Les zeros sont placés sur  $\mathcal{C}_{|z|=1}$  comme précédemment en  $\theta = \pm 18^0$
- ▶ La rejection de 50 Hz sera d'autant plus forte si l'on place  $n$  couples de pôles en  $\theta = \pm 18^0$



# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (3)

2

### Synthèse à partir d'un filtre analogique

#### A. Approximation de l'équation différentielle

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x$$

On utilise l'approx. de la dérivée,  $\frac{\partial y(t)}{\partial t} \approx y(n) - y(n-1)$

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x \stackrel{discret}{\Rightarrow} (1 + \tau) y(n) - \tau y(n-1) = x(n)$$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 + \tau) - \tau z^{-1}}$$

**Cf. Chapitre Syst. LIT Rationnel**  
Ex. de Fonct. Transfert (4)

Nota

Meilleure approximation de  $\frac{\partial y(t)}{\partial t}$  en utilisant

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} \approx [y(n+1) - y(n-1)]/2$$

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \approx [y(n+1) - 2y(n) + y(n-1)]/2$$

#### B. Synthèse à partir d'une transmittance

À partir de  $H(f)$  ou  $H(p = jw)$ , on remplace

$$p = jw = 1 - z^{-1} \quad p^2 = (1 - z^{-1})^2 \quad \text{etc. ...}$$

$$p = jw = [z - z^{-1}]/2 \quad p^2 = (z - 2 + z^{-1}) \quad \text{etc. ...}$$

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (4)

### Exercice

Calculer la fonction de transfert  $H(z)$  équivalente au filtre analogique en utilisant l'approximation la plus simple et la deuxième

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 0.2p + 1}$$

1

$$H(z) = \frac{z^2}{2.2z^2 - 2.2z + 1}$$

2

$$H(z) = \frac{z}{1.1z^2 - z + 0.9}$$

3

$$H(z) = \frac{1 + 2z + z^2}{5.4z^2 + 10z^{-1} + 4.6}$$

(cf. Méthode Transformation bilinéaire, slide 15)

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (5)

3

### Invariance de la réponse impulsionnelle

On cherche des filtres analogiques et numériques ayant des réponses impulsionnelles identiques

Soit à synthétiser un filtre (par ex :  $\frac{1}{1+jw\tau}$ ) dont la réponse impulsionnelle est

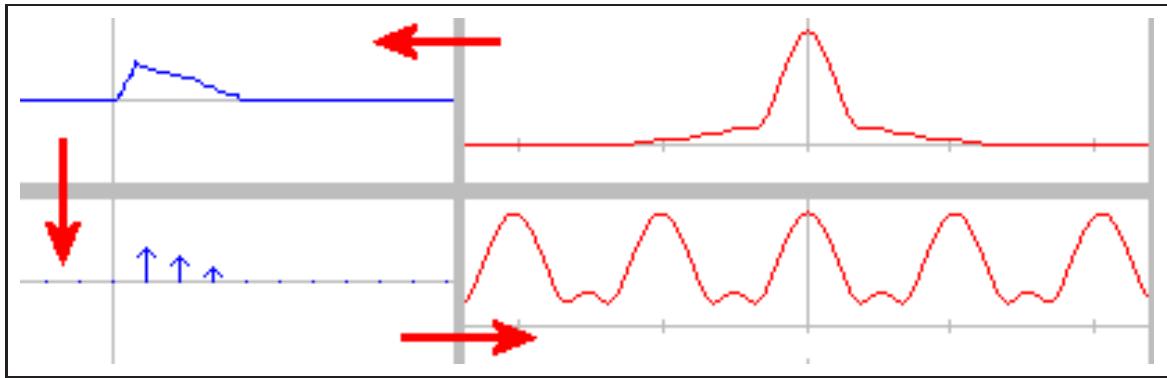
$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \mathcal{U}(t) \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}} z^{-1}} = H(z)$$

Dans la pratique, on normalisera  $H(z)$  en le divisant par  $H(1)$  de manière à ce que les gains en continu des filtres numériques et analogiques soient identiques

$$H(z) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}} z^{-1}}$$

#### Remarque

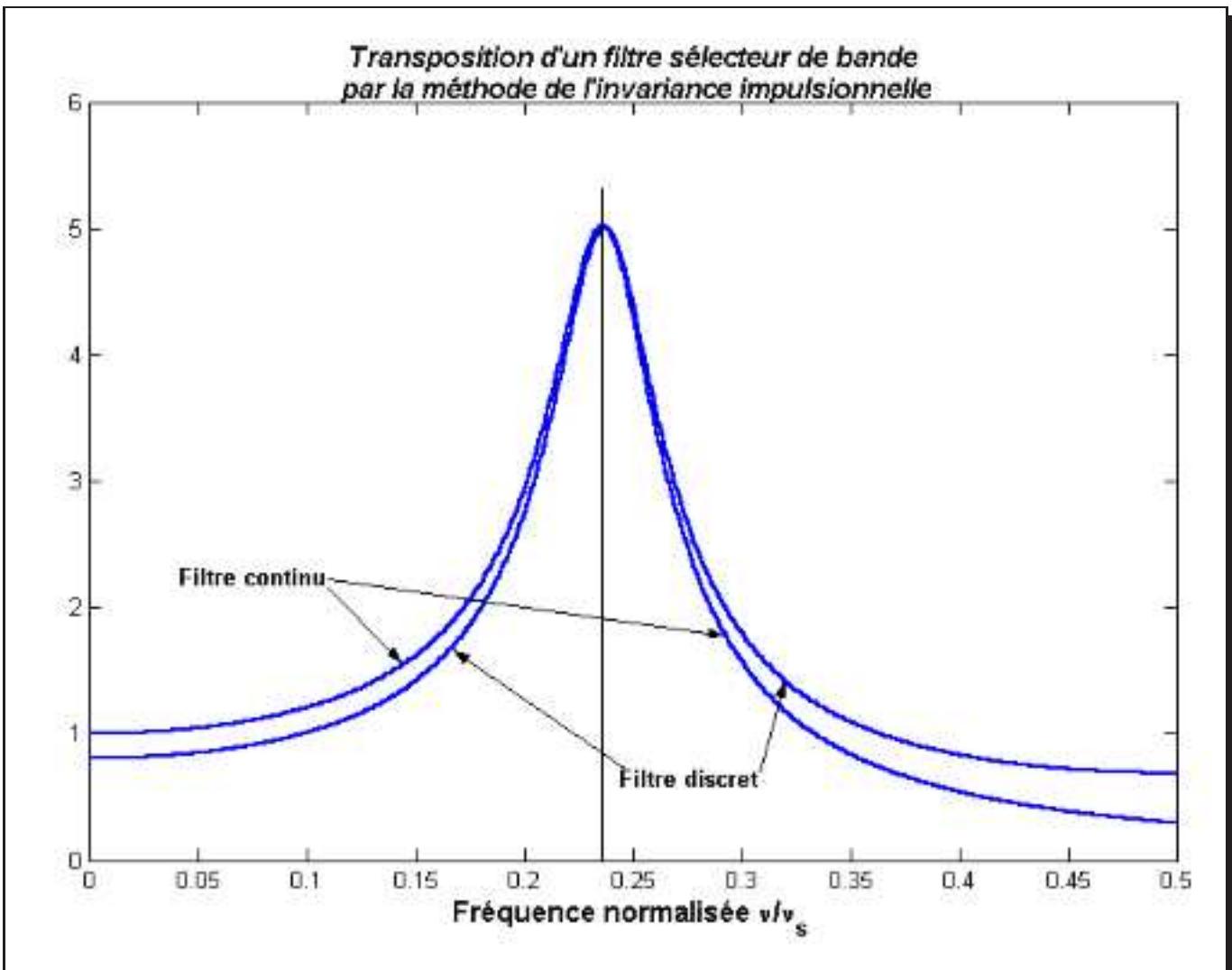
Cependant la BP du filtre numérique résulte de la périodisation de celle du filtre analogique



- Ne convient que pour les filtres analogiques à bande limitée (passe-bas, passe-bande), afin d'éviter tout phénomène de repliement de spectre

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (6)



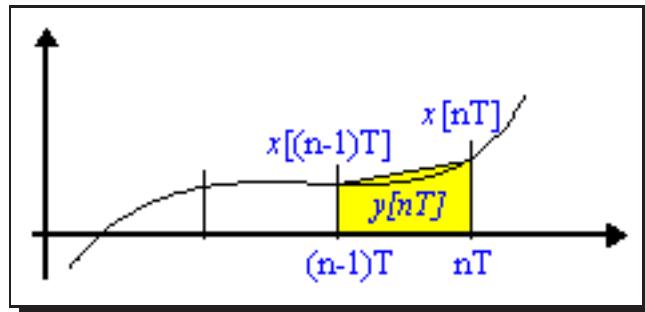
# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (7)

4

### Transformation bilinéaire

Soit un système discret réalisant l'approximation d'une intégrale par la méthode du trapèze



$$\text{pour } T=1 \quad \blacktriangleright \quad y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}}_{\text{Intégrateur dans } \mathcal{Z}}$$

Or l'opérateur réalisant une intégration dans l'espace de Fourier est  $\frac{1}{2\pi j f} = \frac{1}{j w} = \frac{1}{p}$

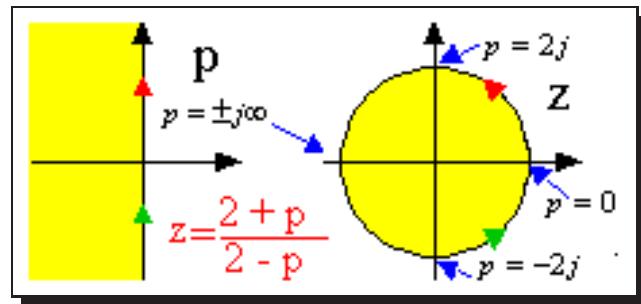
Pour passer d'une transmittance  $H(f)$  dans  $\mathcal{F}$  à une fonction de transfert  $H(z)$  dans  $\mathcal{Z}$  ►

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$p = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (8)



$$z = \frac{2 + p}{2 - p}$$

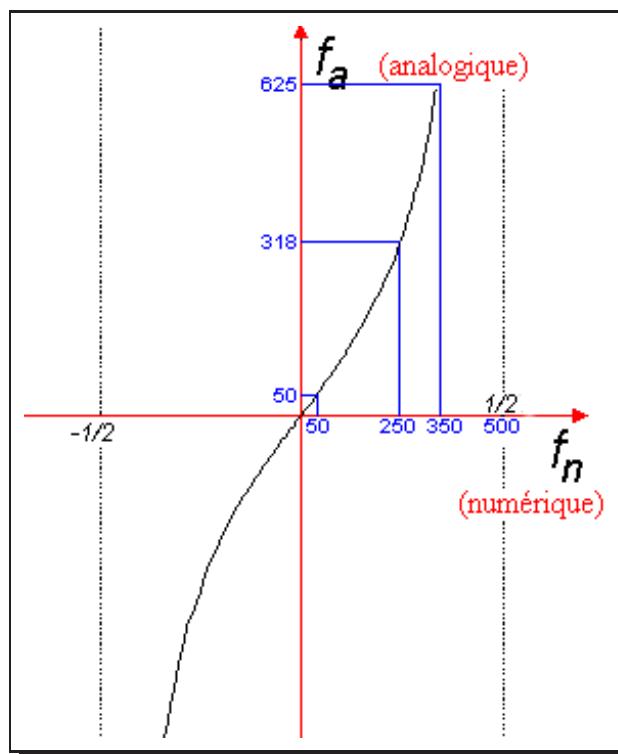
$$e^{2\pi j f_n} = \frac{2 + j(2\pi f_a)}{2 - j(2\pi f_a)}$$

— Donc —

- Même module
- L'égalité des phases nécessite  $\pi f_a = \tan(\pi f_n)$

$\Leftrightarrow$

$$f_a = \frac{1}{\pi} \tan(\pi f_n)$$



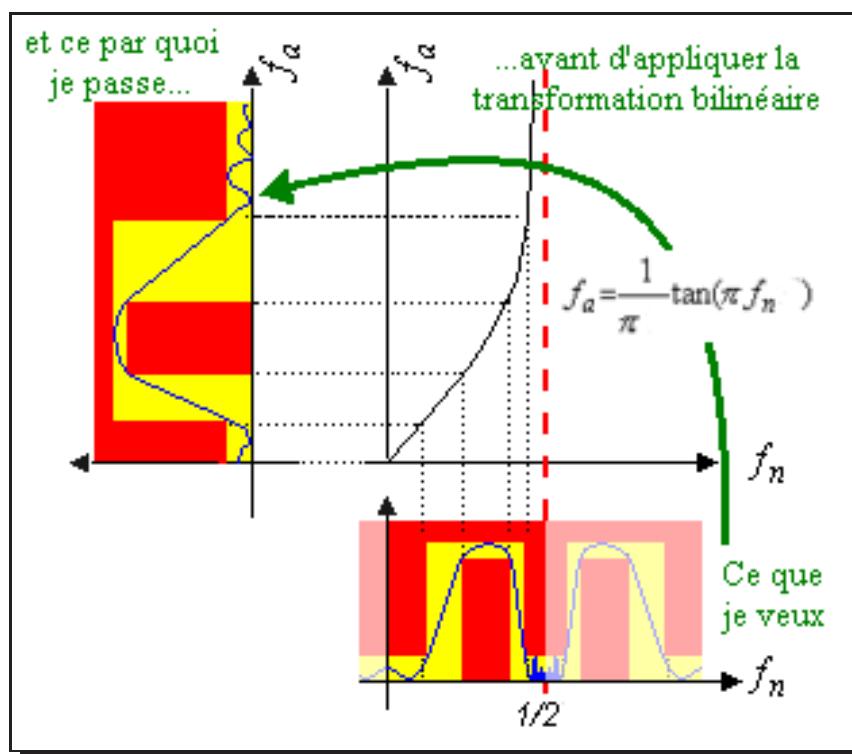
# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (9)

Toute transformation bilinéaire induit une déformation en fréquence de tout le domaine fréquentiel

### Deux cas peuvent se présenter :

- 1 Les caractéristiques du filtre se situent dans les basses fréquences et cette distorsion est tolérable
- 2 Dans le cas contraire, il faut la compenser par un pré-décalage des caractéristiques du filtre analogique



A partir d'un Gabarit numérique caractérisé par des fréquences numériques  $f_{1_n}, f_{2_n}$ , etc.

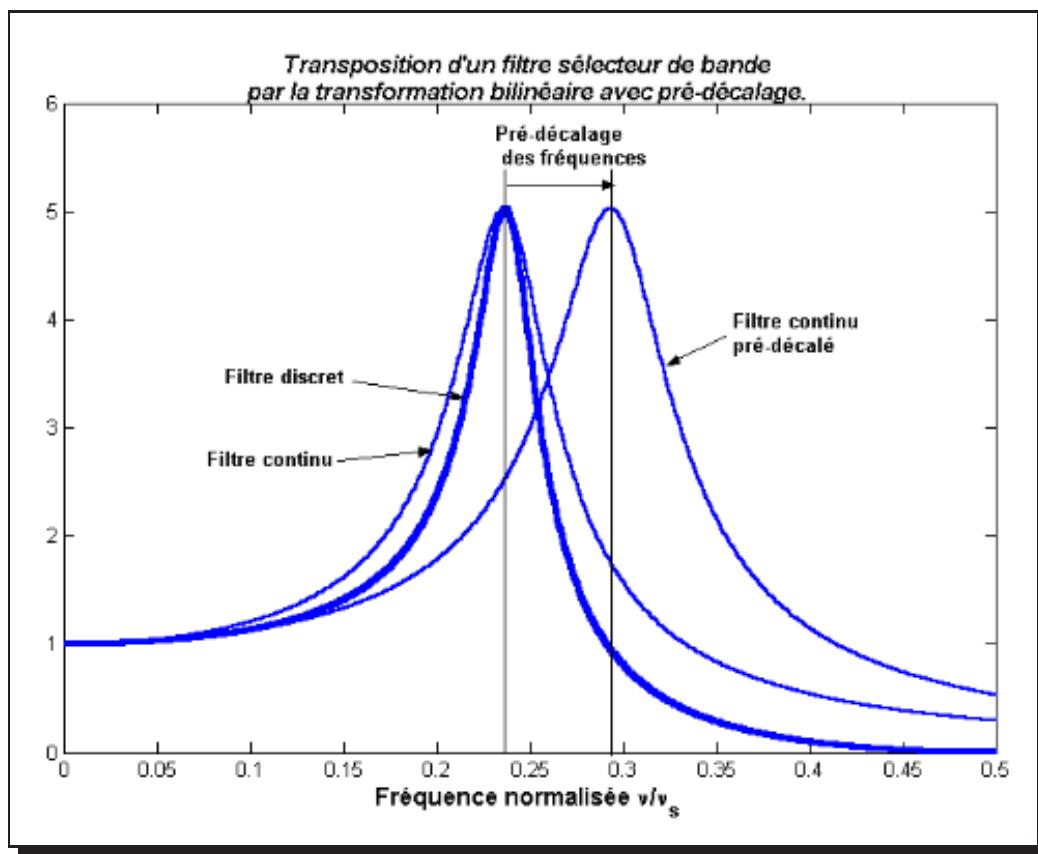
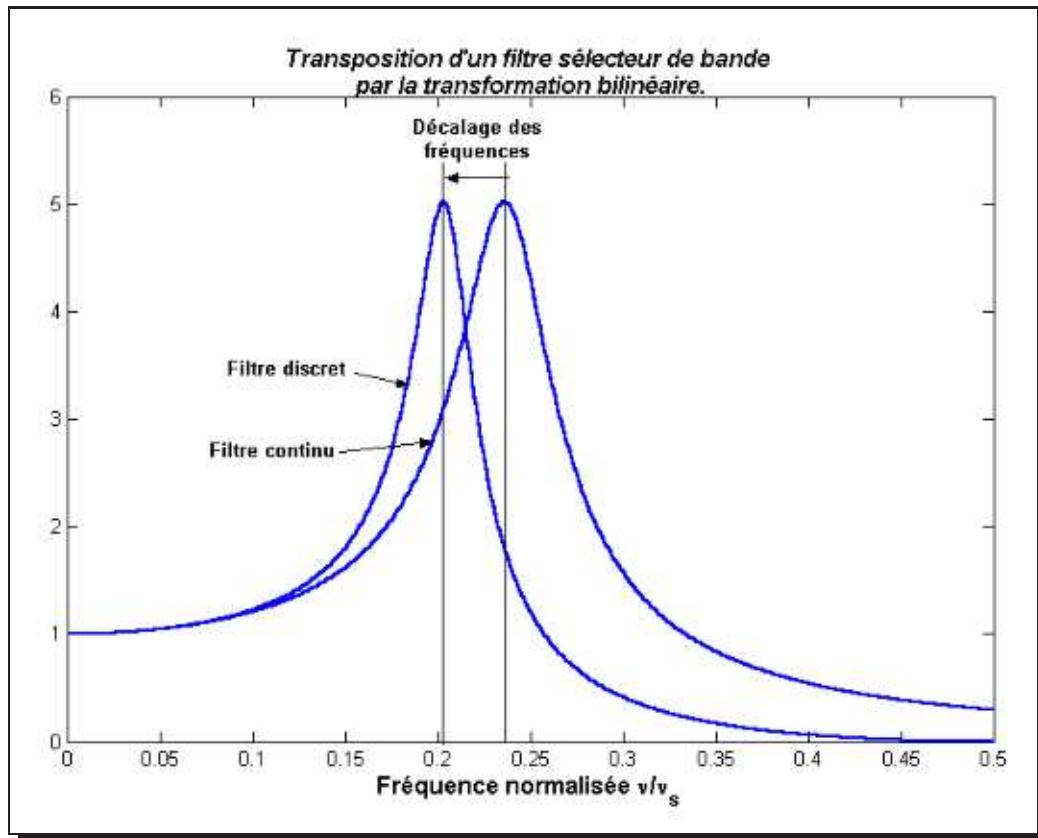
$$\Downarrow f_a = \frac{1}{\pi} \tan(\pi f_n)$$

fréquences analogiques  $f_{1_a}, f_{2_a}$ , etc.  
c-a-d le gabarit analogique

puis **TRANSFORMATION BILINÉAIRE**

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

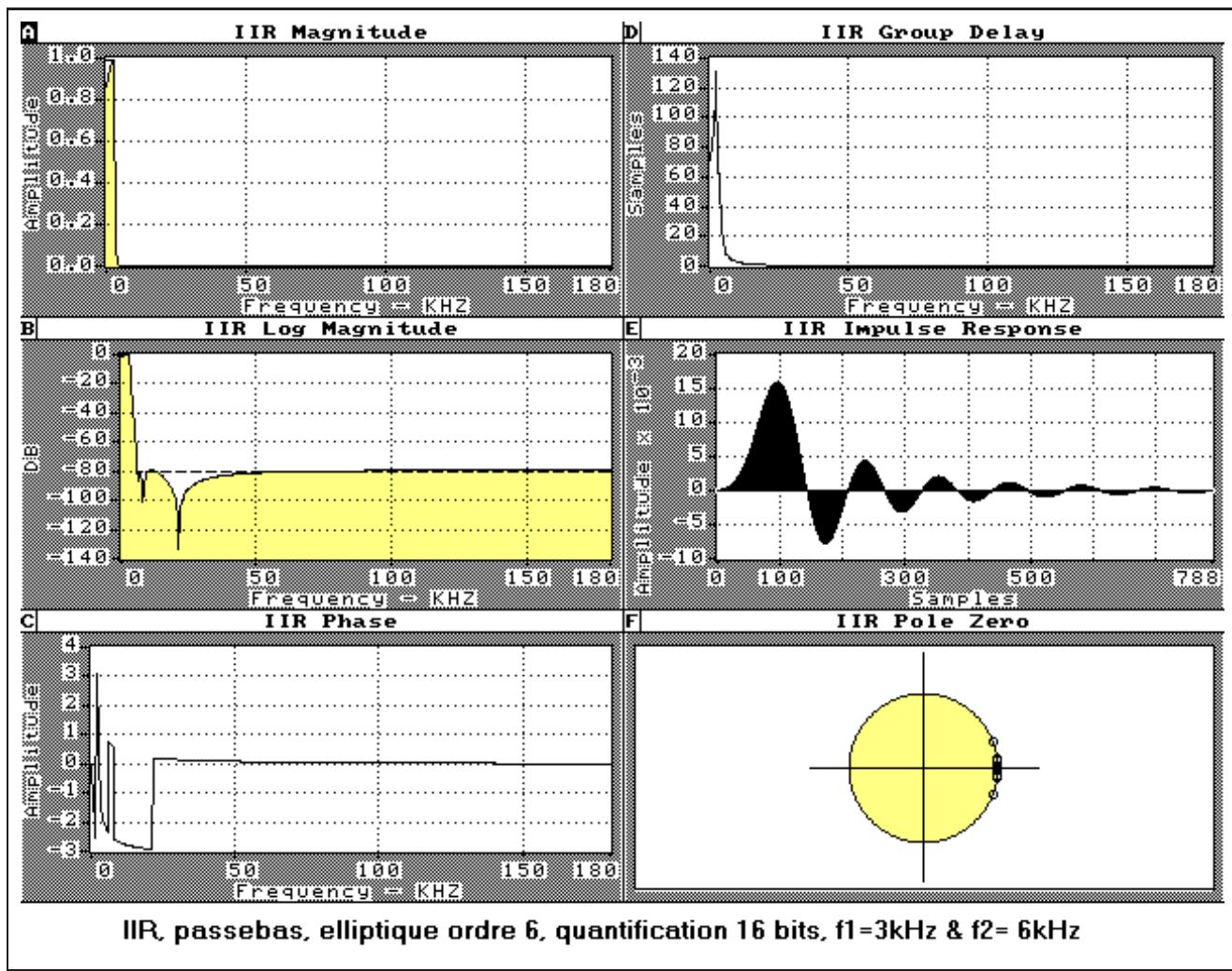
## CONCEPTION DES FILTRES RII (10)



# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (11)

### Exemple



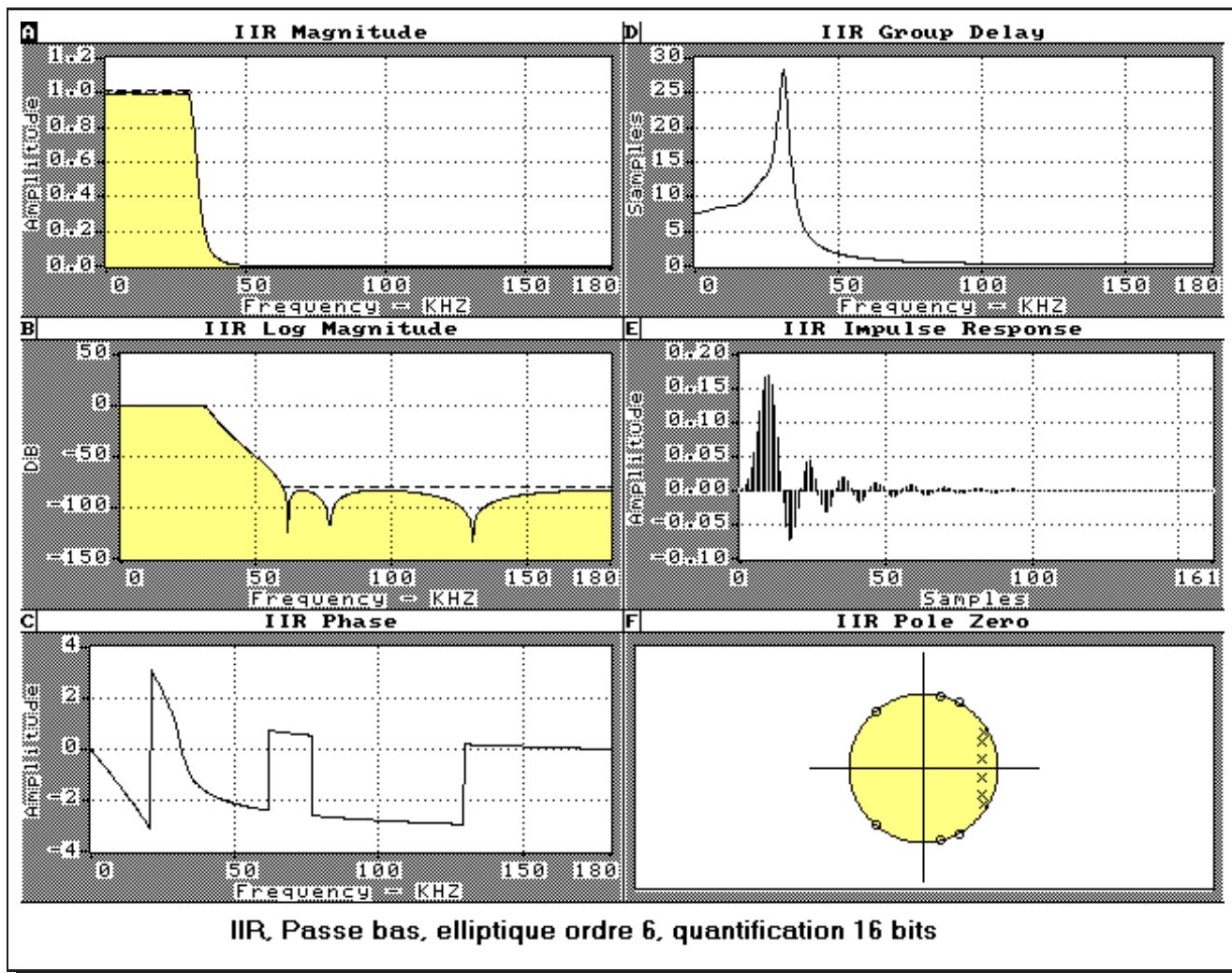
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 3 \text{ kHz}$
- $f_2 = f_s = 6 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (12)

### Exemple



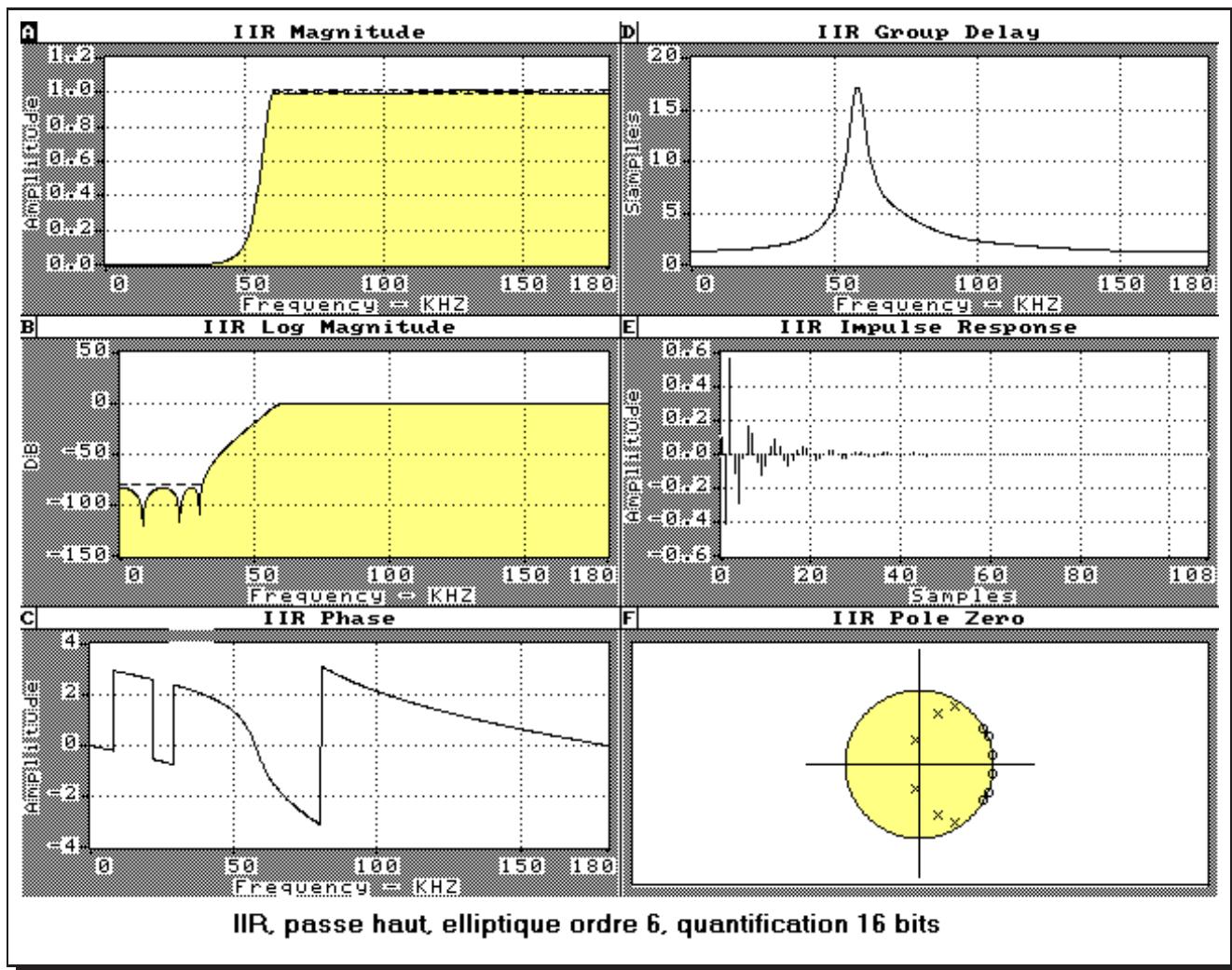
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 30 \text{ kHz}$
- $f_2 = f_s = 60 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (13)

### Exemple



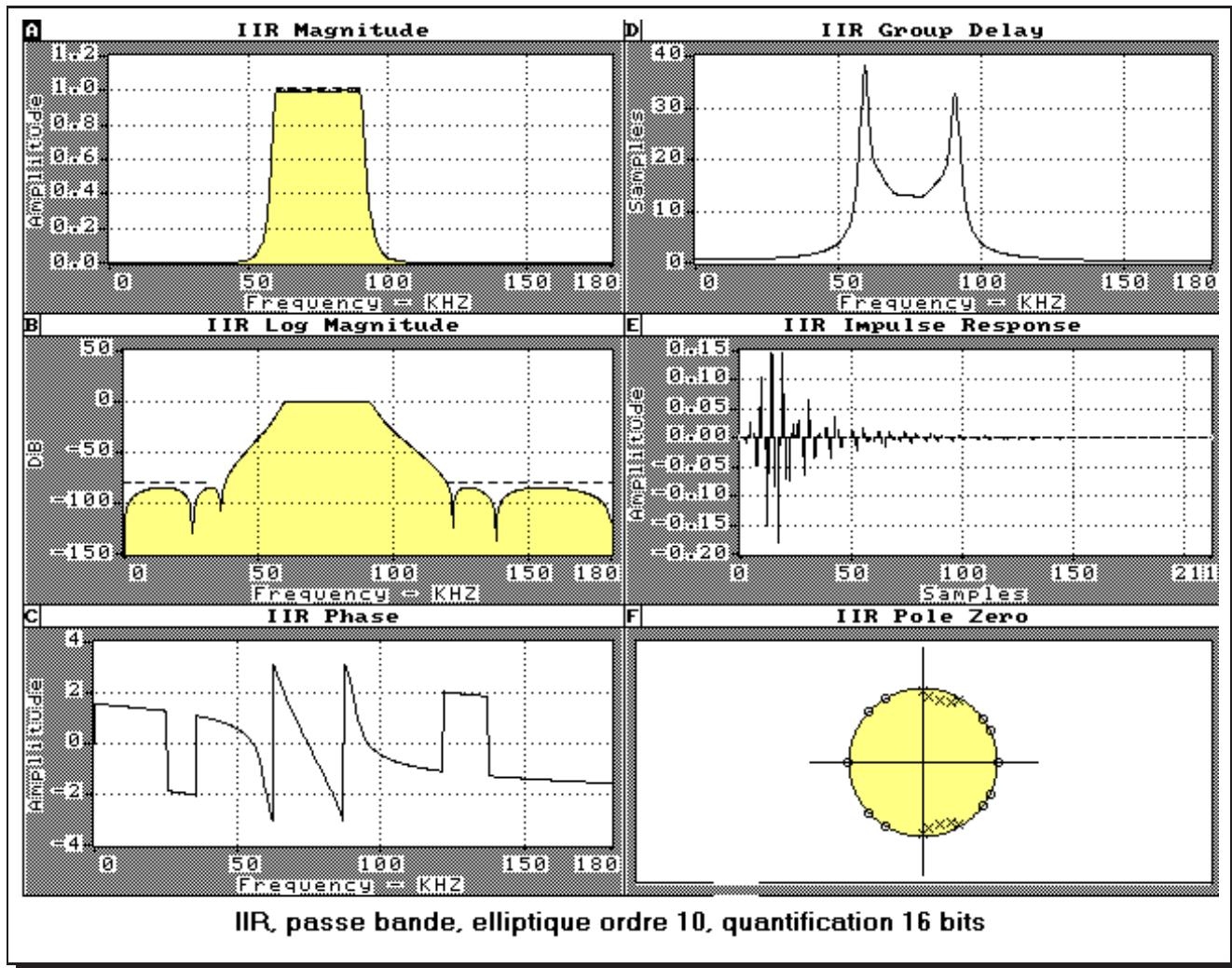
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = 30 \text{ kHz}$
- $f_2 = 60 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHESE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (14)

### Exemple



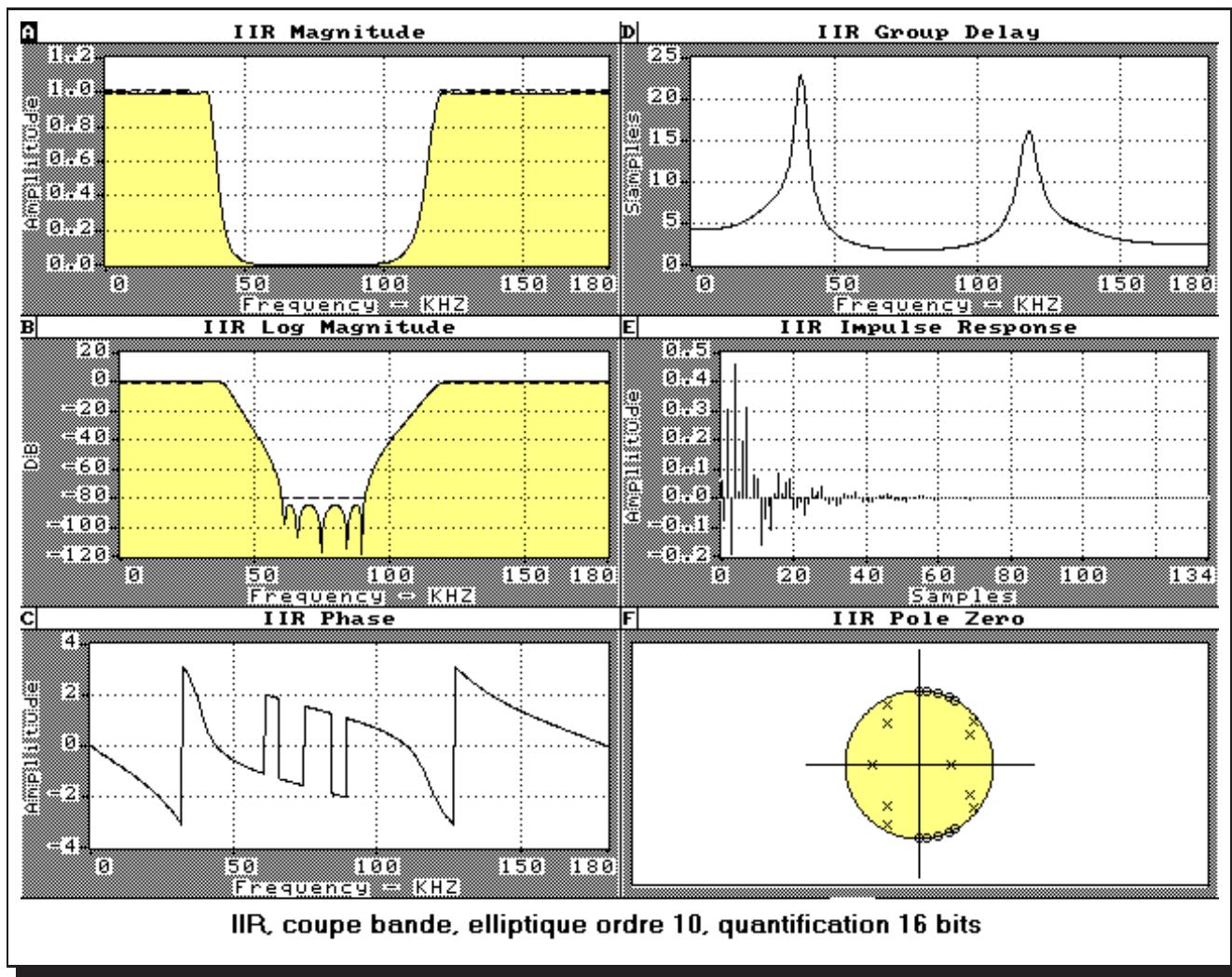
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = 30 \text{ kHz}$       •  $f_2 = 60 \text{ kHz}$
- $f_1 = 90 \text{ kHz}$       •  $f_2 = 120 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (15)

Exemple



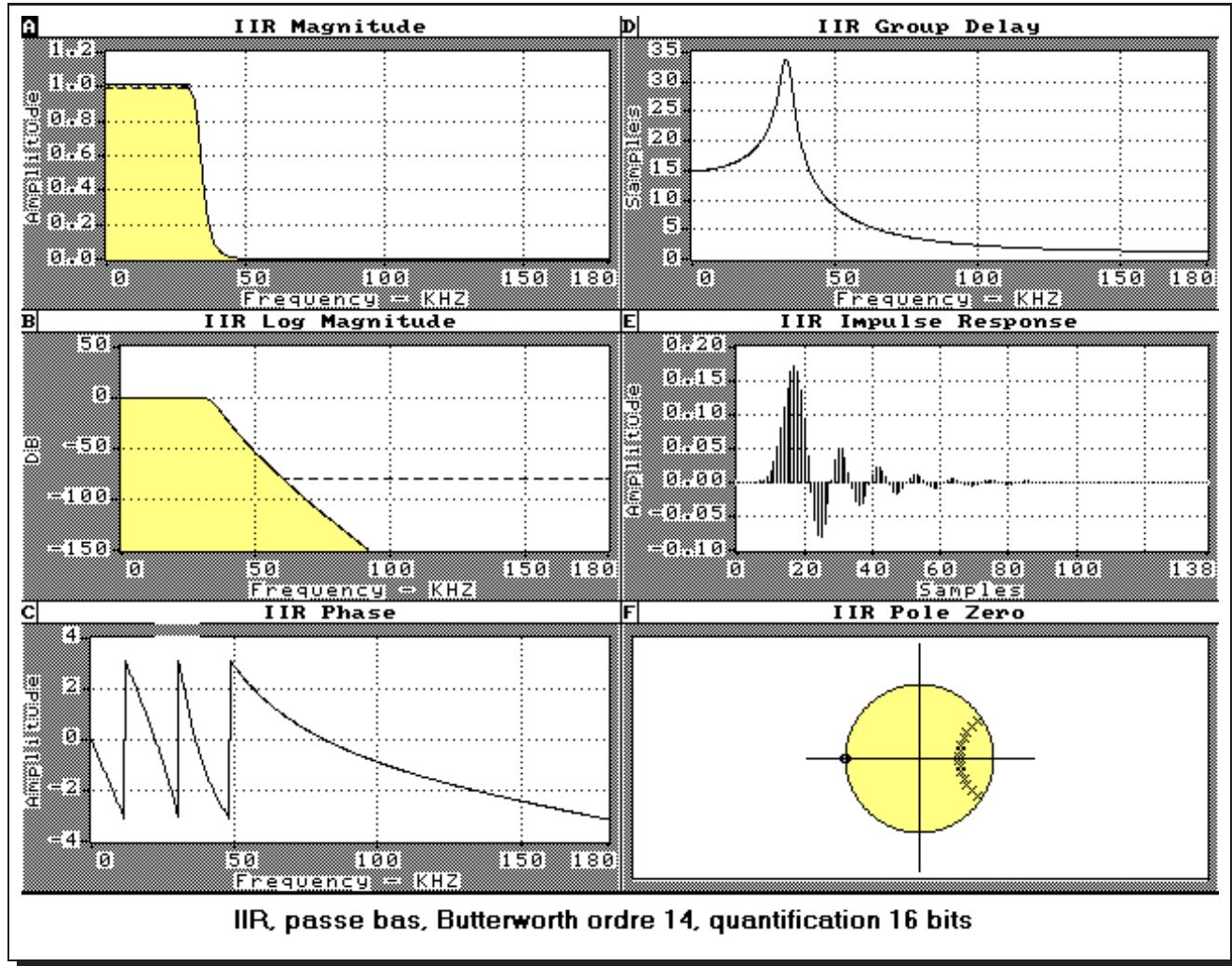
### Caractéristique souhaitée

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_e = 360 \text{ kHz}</math></li> <li>• <math>f_1 = 30 \text{ kHz}</math></li> <li>• <math>f_1 = 90 \text{ kHz}</math></li> <li>• Ondulation dans BP &lt; 0.1 dB</li> <li>• Gain dans BA &lt; -80 dB</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_2 = 60 \text{ kHz}</math></li> <li>• <math>f_2 = 120 \text{ kHz}</math></li> </ul> |
|--|---|

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (16)

### Exemple



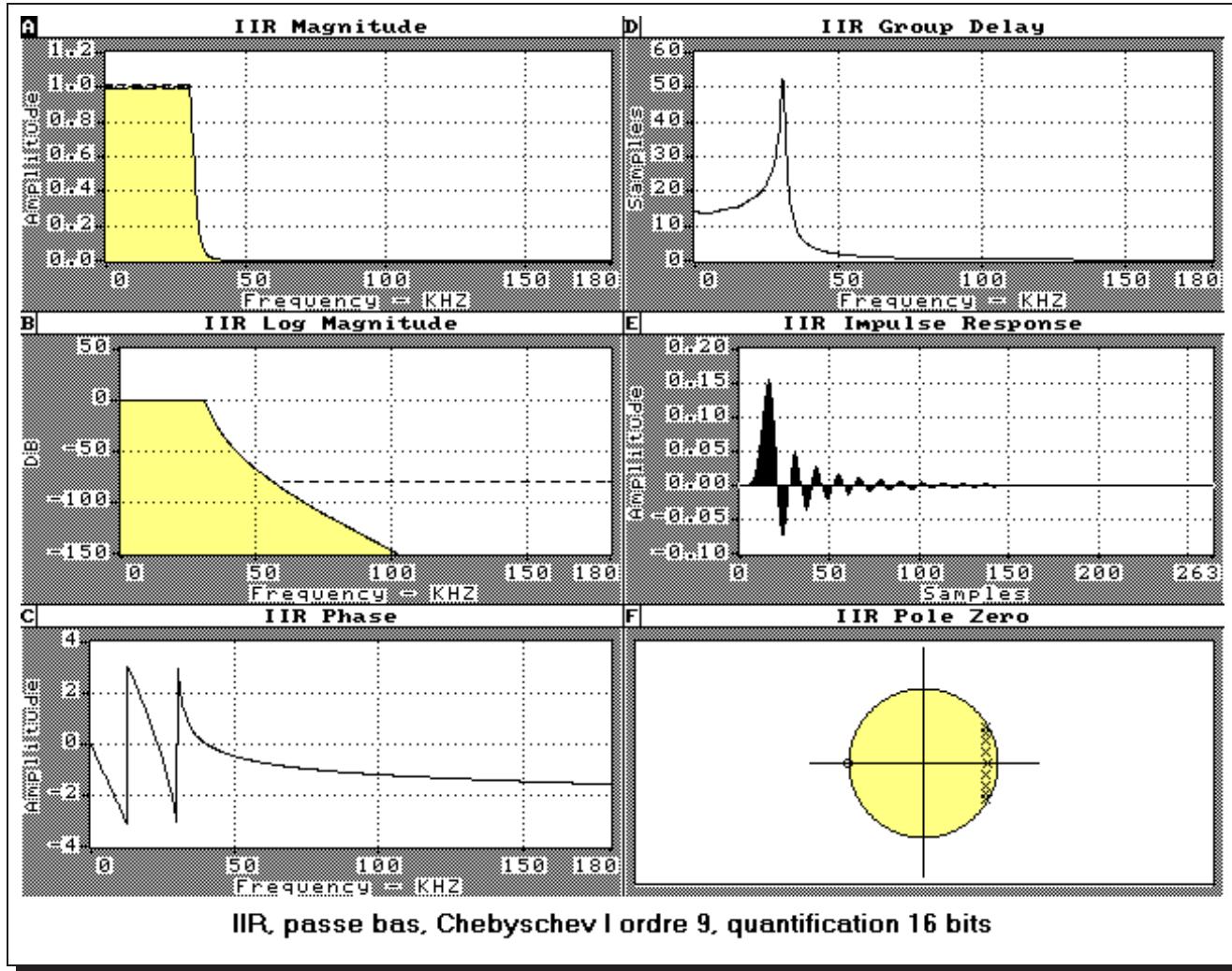
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 30 \text{ kHz}$       •  $f_2 = f_s = 60 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (17)

Exemple



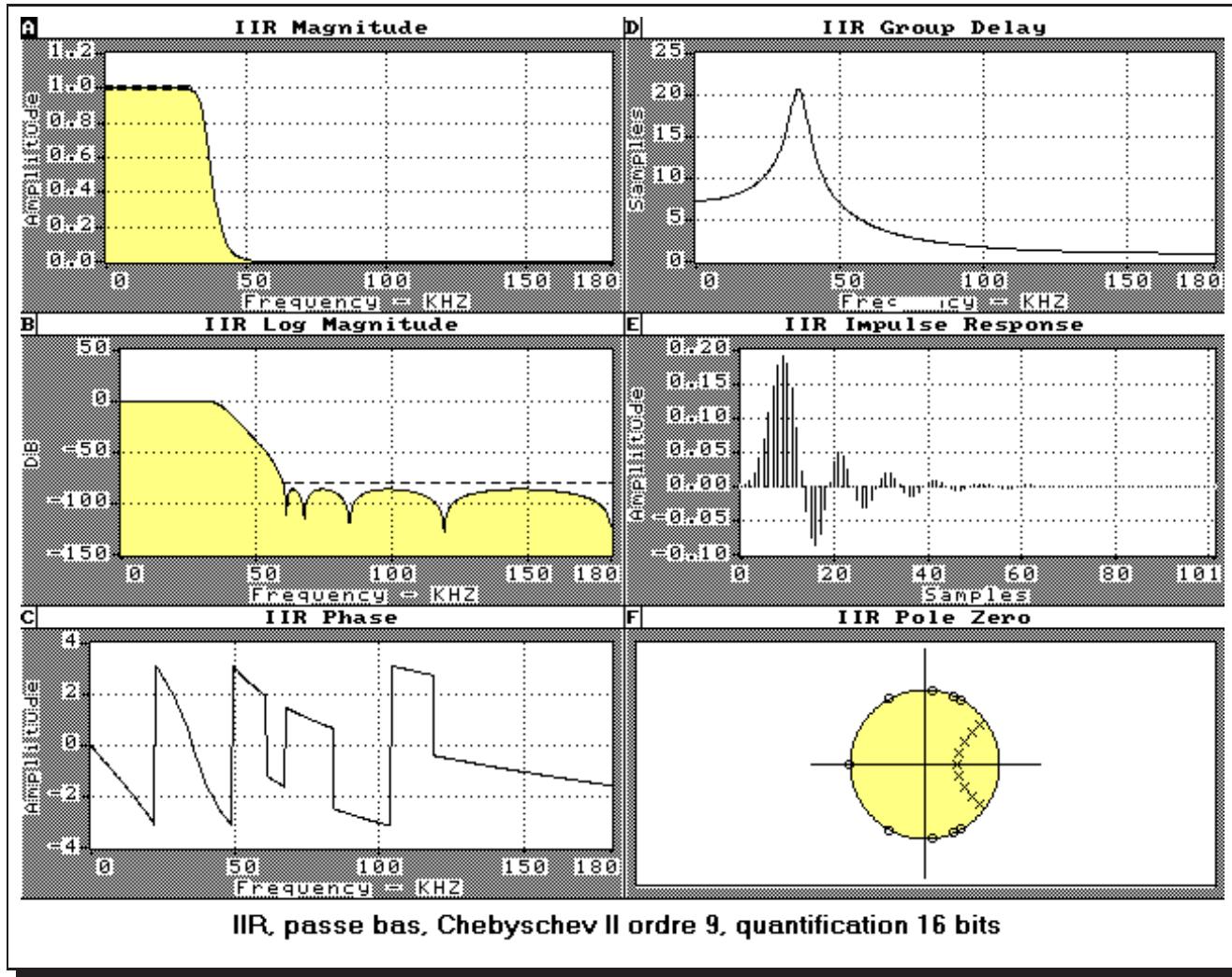
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = 30 \text{ kHz}$       •  $f_2 = 60 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (18)

Exemple



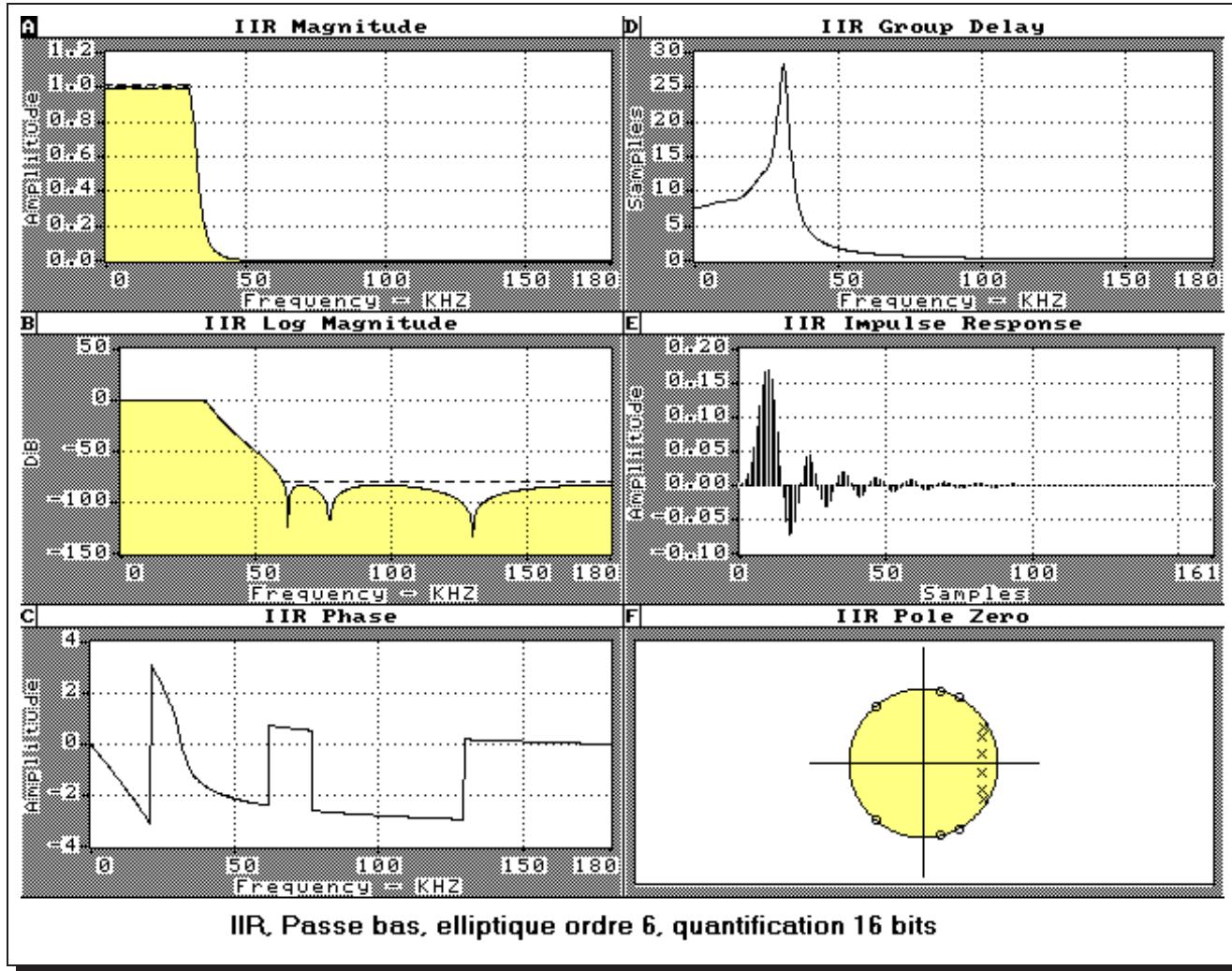
### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = 30 \text{ kHz}$       •  $f_2 = 60 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

# SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

## CONCEPTION DES FILTRES RII (19)

Exemple



### Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = 30 \text{ kHz}$       •  $f_2 = 60 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB