



DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

SOMMAIRE

Conception des filtres RIF	2
Conception des filtres RII	9

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (1)

Rappel

$H(z)$ est un polynôme de degré N en z^{-1}
 $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}$

Filtre **stable** avec une **réponse impulsionnelle finie** et **réelle** constitué de la suite des $N+1$ coefficients b_0, \dots, b_N

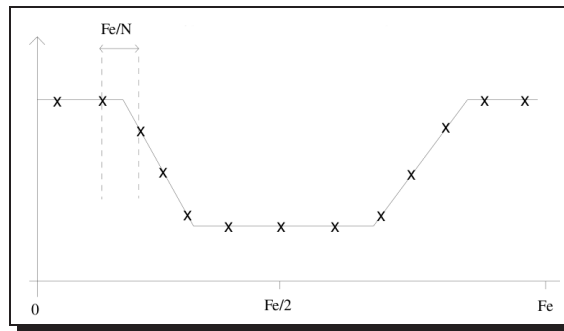
⇓

La réponse fréquentielle est la TF des coefficients b_i

1

Synthèse par Interpolation Fréquentielle

On se donne un gabarit fréquentiel que l'on échantillonne et on calcul la TFD inverse de ces échantillons



$$h(n) = h_n = \sum_{u=0}^{N-1} H\left(\frac{u F_e}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi j u F_e n T_e}{N}\right)$$

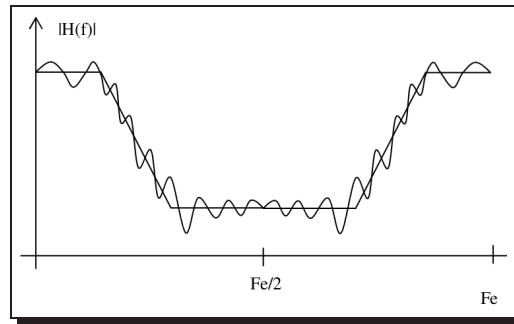
Les h_i ainsi obtenus vont bien donner la fonction de transfert idéale aux points $H(\frac{n F_e}{N})$ mais il donneront un spectre avec des ondulations entre ces valeurs

Le fait de prendre N coefs b_i revient à tronquer h par $\Pi_{N T_e}$

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (2)

Le fait de prendre un nb finit N de coefs b_i revient à considérer le gabarit fréquentiel suivant



Nota

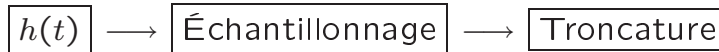
La troncature simple est la troncature par fenêtre rectangulaire. On peut considérer d'autres types de troncatures, Hanning, Blackman, etc.

2

Synthèse par Interpolation Temporelle

La TF inverse du gabarit fréquentiel idéal nous donne une expression analytique de la réponse impulsionnelle que l'on échantillonne et que l'on tronque

$$\begin{array}{c} \text{Graph of } H(e^{j\omega}) \text{ vs } f \\ \text{Rectangular pulse from } -f_b/2 \text{ to } f_b/2 \text{ with height 1} \end{array} \xLeftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2f_b \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot f_b \cdot t)}{\pi \cdot t} = h(t)$$



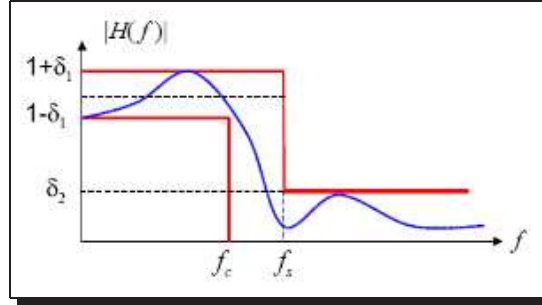
Nota

Même problèmes que pour la méthode précédente

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (3)

3 Synthèse par Méthode de la Fenêtre



Gabarit fréquentiel réel

- Bande Passante (BP)
- Largeur Bande Transition ($\Delta F = f_s - f_c$)
- Bande Atténuée (BA)
- Amplitude des oscillations en BP (δ_1) et BA (δ_2)

+ Contrainte de Phase linéaire \Rightarrow symétrie des coefs

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

1 On détermine la longueur N nécessaire

$$N \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{f_e}{\Delta f} \cdot \log_{10} \left[\frac{1}{10 \delta_1 \delta_2} \right]$$

2 Calcul de la TF inverse à partir du filtre idéal

Si N impair
$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{2\pi j f n} df$$

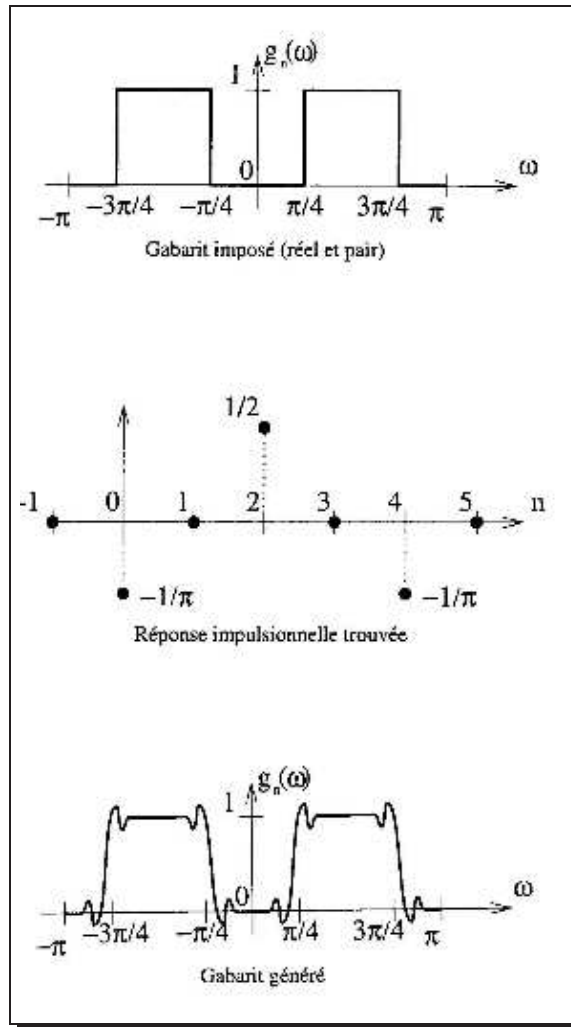
Si N pair
$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{-\pi j f} e^{2\pi j f n} df$$

3 Troncature à N échant. (+ Apodisation)

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (4)

Exemple



Nota

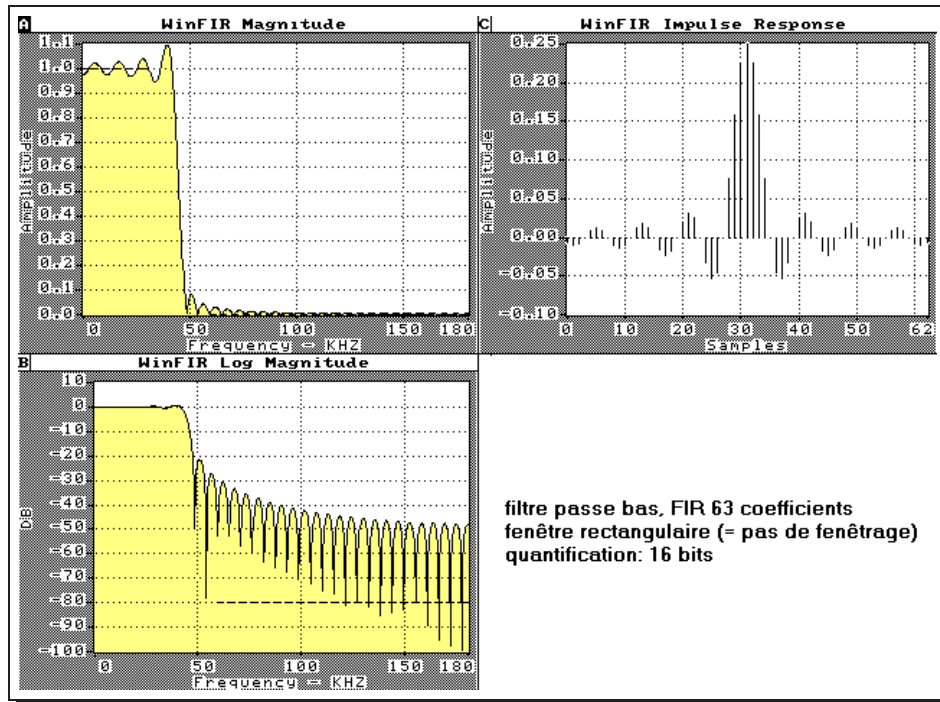
- Pour éviter un tronquage brutal (et phénomène de Gibbs) il convient d'appliquer une fenêtre d'apodisation
- on décalera la réponse impulsionnelle afin qu'elle devienne causal

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (5)

Exemple

Avec Apodisation par fenêtre rectangulaire



Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = f_c = 30$ kHz
- $f_2 = f_s = 60$ kHz
- Gain = -80 dB dans BA

Nota

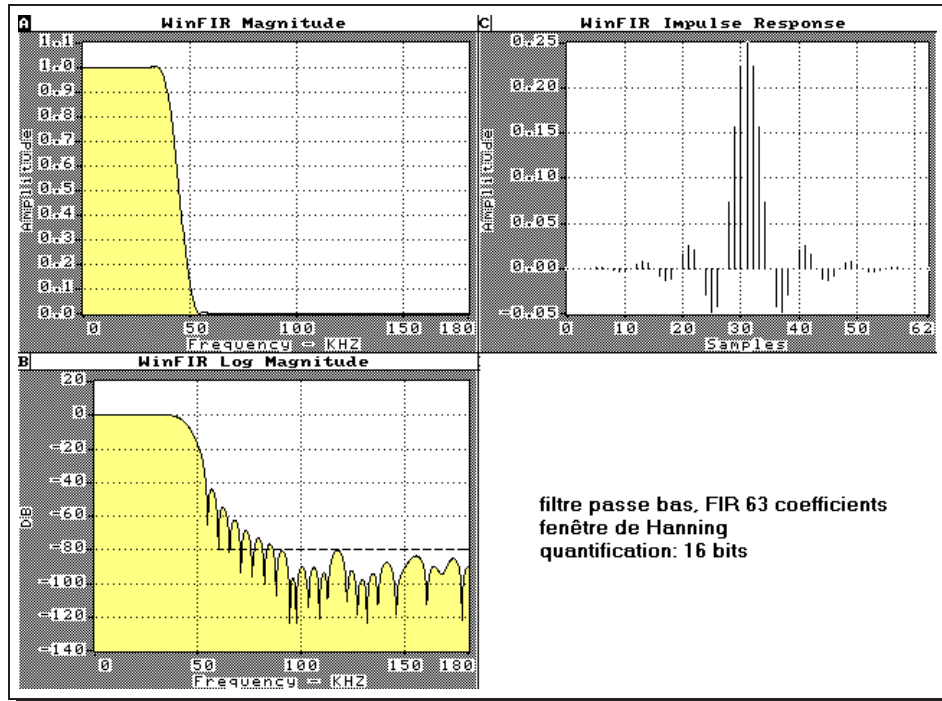
Ne peut être réalisé avec une fenêtre rectangulaire
(Gain > 80 dB) dans BA

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (6)

Exemple

Avec Apodisation par fenêtre de Hanning



Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = f_c = 30$ kHz
- $f_2 = f_s = 60$ kHz
- Gain = -80 dB dans BA

Nota

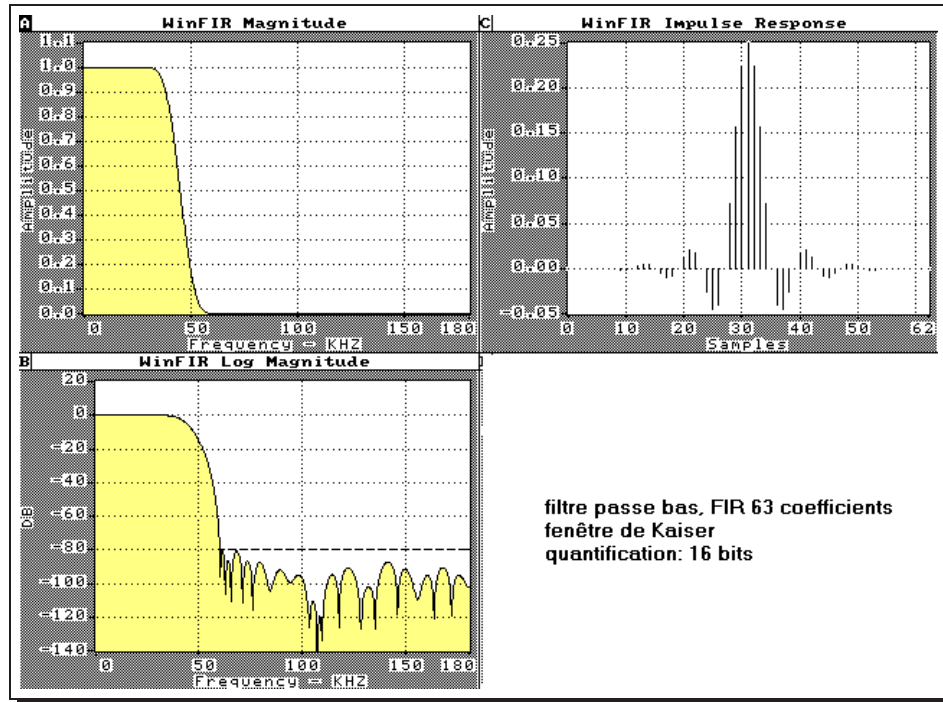
Le gain souhaité (-80 dB) dans la BA demanderait plus de 63 coefficients

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RIF (7)

Exemple

Avec Apodisation par fenêtre de Kaiser



Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = f_c = 30$ kHz
- $f_2 = f_s = 60$ kHz
- Gain = -80 dB dans BA

Nota

Le gain souhaité (-80 dB) est réalisé avec 63 coefs

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (1)

Rappel

$H(z)$ est une fraction en z^{-1}

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

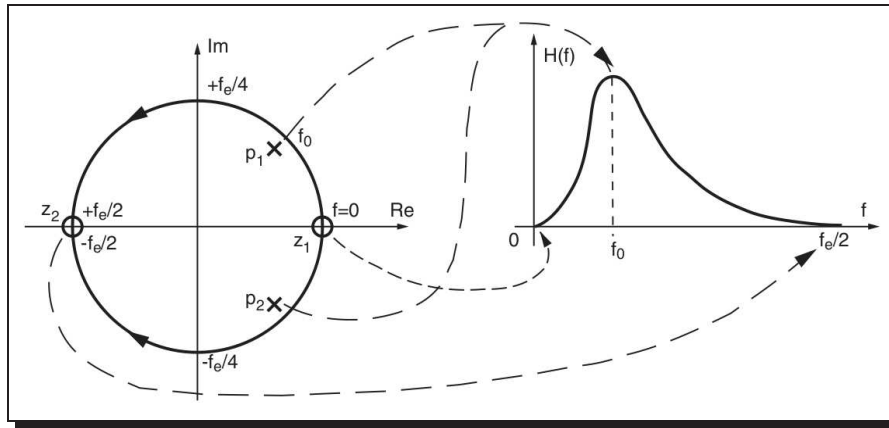
Filtre de réponse impulsionnelle infinie, définie par une équation récurrente avec des pôles et zéros actifs et stable si les poles sont à l'intérieur de $\mathcal{C}_{|z|=1}$

► Pour un point $M(f)$ sur $\mathcal{C}_{|z|=1}$, proximité d'un zéro $\Rightarrow H() \searrow$ et proximité d'un pôle $\Rightarrow H() \nearrow$

1

Synthèse directe par Placement des pôles et zéros

Lorsqu'on veut réaliser une $H(f)$ approximative



Comment modifier ce filtre pour

- La BP soit plus étroite ?
- Gain en continu ($f = 0$) fixé ?
- Gain en haute fréquence ($f = f_e/2$) soit fixé ?

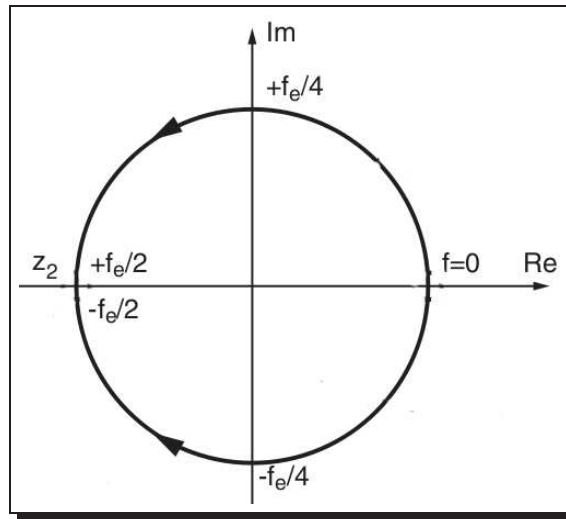
SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (2)

Exercice

Filtre rejeteur (notch filter) avec $f_e = 1000$ Hz et fréquence à rejeter de 50 Hz

- 2 pôles sur en $\theta = \pm 18^\circ$ à l'intérieur du $C_{|z|=1}$. Les zeros sont placés sur $C_{|z|=1}$ comme précédemment en $\theta = \pm 18^\circ$
- La rejection de 50 Hz sera d'autant plus forte si l'on place n couples de pôles en $\theta = \pm 18^\circ$



SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (3)

2 Synthèse à partir d'un filtre analogique

A. Approximation de l'équation différentielle

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x$$

On utilise l'approx. de la dérivée, $\frac{\partial y(t)}{\partial t} \approx y(n) - y(n-1)$

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x \stackrel{\text{discret}}{\Rightarrow} (1 + \tau) y(n) - \tau y(n-1) = x(n)$$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 + \tau) - \tau z^{-1}}$$

Cf. Chapitre Syst. LIT Rationnel
Ex. de Fonct. Transfert (4)

Nota

Meilleure approximation de $\frac{\partial y(t)}{\partial t}$ en utilisant

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} \approx [y(n+1) - y(n-1)]/2$$

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} \approx [y(n+1) - 2y(n) + y(n-1)]/2$$

B. Synthèse à partir d'une transmittance

À partir de $H(f)$ ou $H(p = jw)$, on remplace

$$p = jw = 1 - z^{-1} \quad p^2 = (1 - z^{-1})^2 \quad \text{etc. ...}$$

$$p = jw = [z - z^{-1}]/2 \quad \begin{matrix} \text{ou} \\ p^2 = (z - 2 + z^{-1}) \end{matrix} \quad \text{etc. ...}$$

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (4)

Exercice

Calculer la fonction de transfert $H(z)$ équivalente au filtre analogique en utilisant l'approximation la plus simple et la deuxième

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 0.2p + 1}$$

1

$$H(z) = \frac{z^2}{2.2z^2 - 2.2z + 1}$$

2

$$H(z) = \frac{z}{1.1z^2 - z + 0.9}$$

3

$$H(z) = \frac{1 + 2z + z^2}{5.4z^2 + 10z^{-1} + 4.6}$$

(cf. Méthode Transformation bilinéaire, slide 15)

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (5)

3 Invariance de la réponse impulsionnelle

On cherche des filtres analogiques et numériques ayant des réponses impulsionnelles identiques

Soit à synthétiser un filtre (par ex : $\frac{1}{1+j\omega\tau}$) dont la réponse impulsionnelle est

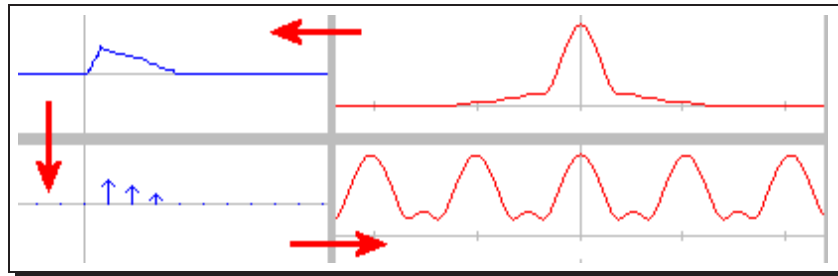
$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \mathcal{U}(t) \quad \xrightarrow{Z} \quad \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}} z^{-1}} = H(z)$$

Dans la pratique, on normalisera $H(z)$ en le divisant par $H(1)$ de manière à ce que les gains en continu des filtres numériques et analogiques soient identiques

$$H(z) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{1}{\tau}} z^{-1}}$$

Remarque

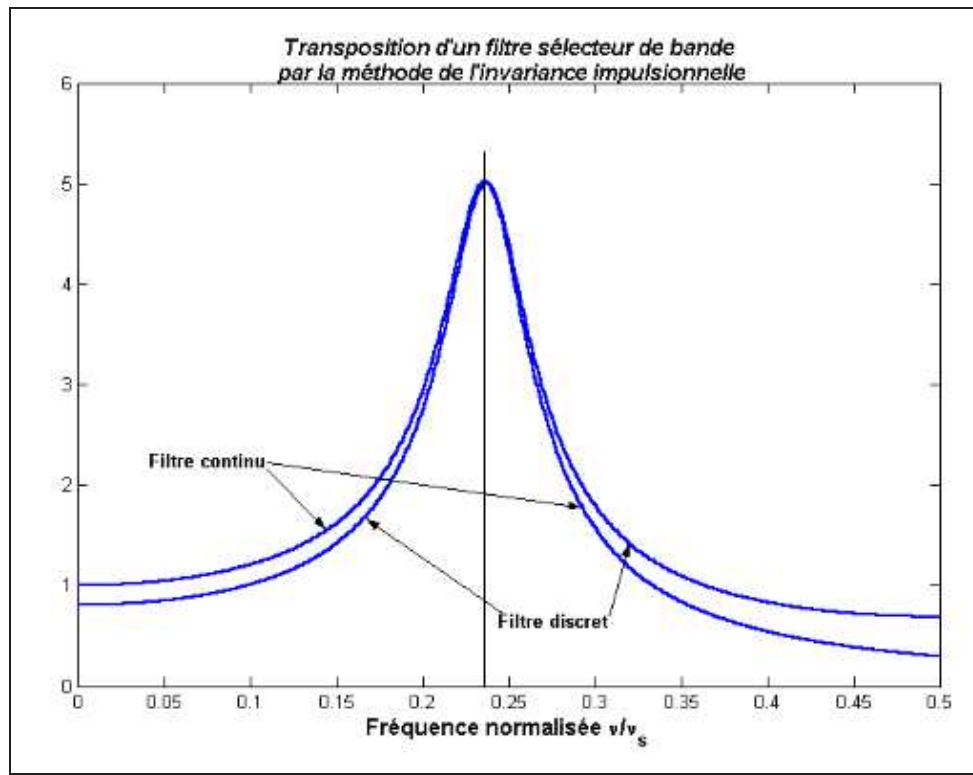
Cependant la BP du filtre numérique résulte de la périodisation de celle du filtre analogique



► Ne convient que pour les filtres analogiques à bande limitée (passe-bas, passe-bande), afin d'éviter tout phénomène de repliement de spectre

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (6)

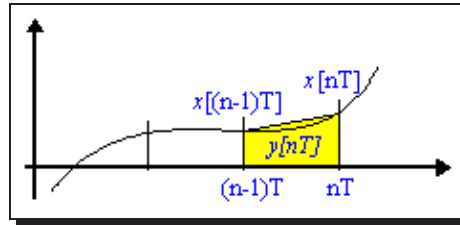


SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (7)

4 Transformation bilinéaire

Soit un système discret réalisant l'approximation d'une intégrale par la méthode du trapèze



pour $T=1$ ►
$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$

↓ \mathcal{Z}

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Intégrateur dans \mathcal{Z}

Or l'opérateur réalisant une intégration dans l'espace de *Fourier* est $\frac{1}{2\pi j f} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{p}$

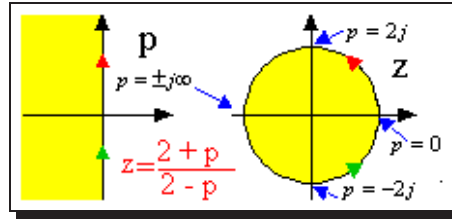
Pour passer d'une transmittance $H(f)$ dans \mathcal{F} à une fonction de transfert $H(z)$ dans \mathcal{Z} ►

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$p = 2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (8)



$$z = \frac{2+p}{2-p}$$

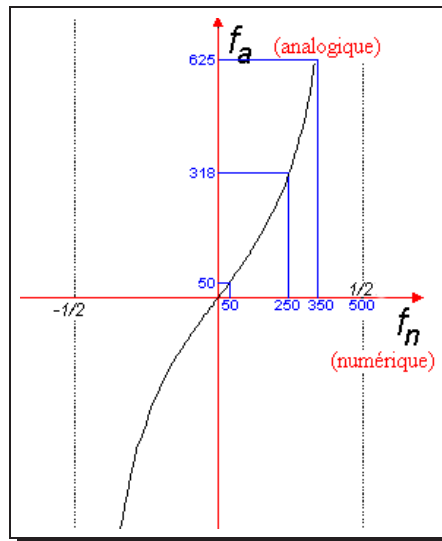
$$e^{2\pi j f_n} = \frac{2+j(2\pi f_a)}{2-j(2\pi f_a)}$$

– Donc –

- Même module
- L'égalité des phases nécessite $\pi f_a = \tan(\pi f_n)$

\Leftrightarrow

$$f_a = \frac{1}{\pi} \tan(\pi f_n)$$



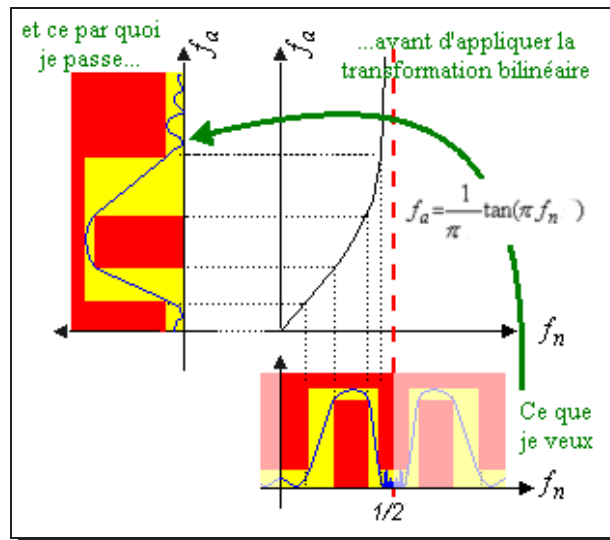
SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (9)

Toute transformation bilinéaire induit une déformation en fréquence de tout le domaine fréquentiel

Deux cas peuvent se présenter :

- 1 Les caractéristiques du filtre se situent dans les basses fréquences et cette distorsion est tolérable
- 2 Dans le cas contraire, il faut la compenser par un pré-décalage des caractéristiques du filtre analogique



A partir d'un Gabarit numérique caractérisé par des fréquences numériques $f_{1_n}, f_{2_n}, \text{etc.}$

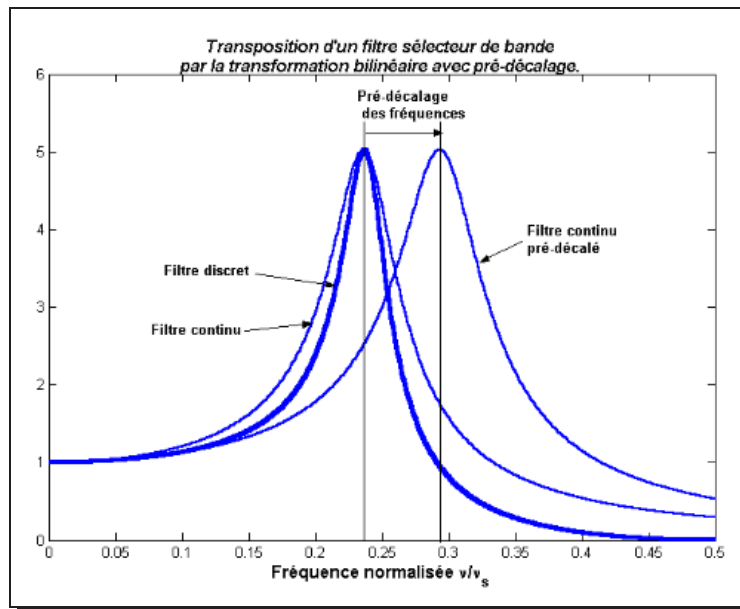
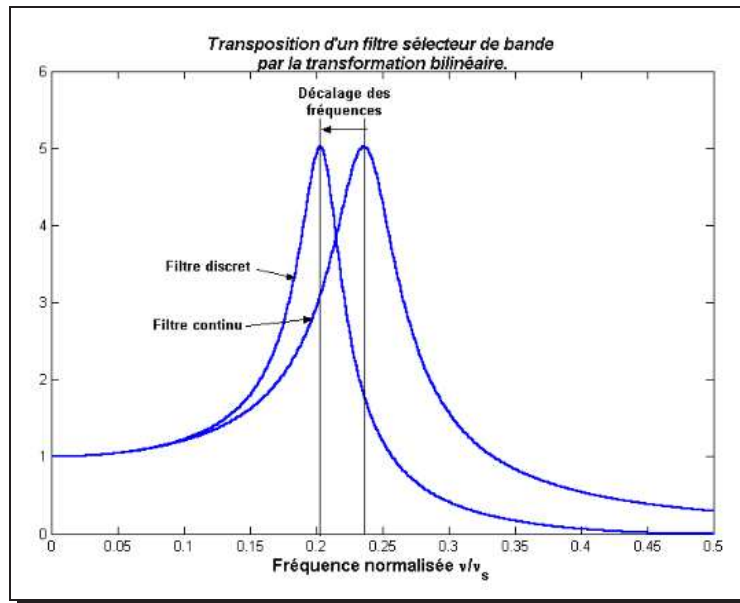
$$\Downarrow f_a = \frac{1}{\pi} \tan(\pi f_n)$$

fréquences analogiques $f_{1_a}, f_{2_a}, \text{etc.}$
c-a-d le gabarit analogique

puis **TRANSFORMATION BILINÉAIRE**

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

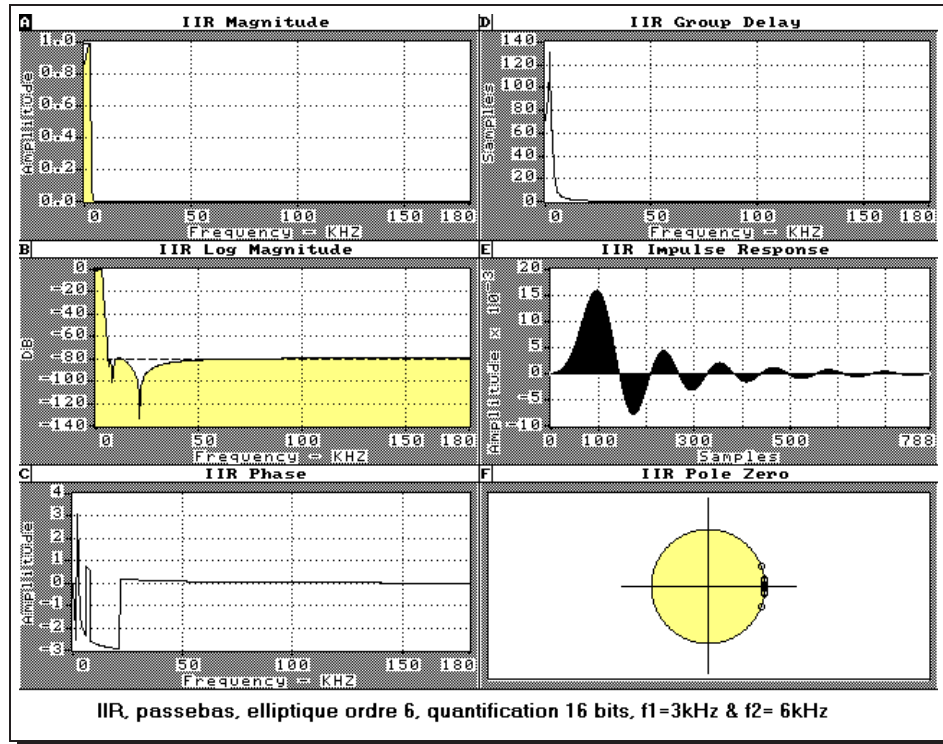
CONCEPTION DES FILTRES RII (10)



SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (11)

Exemple



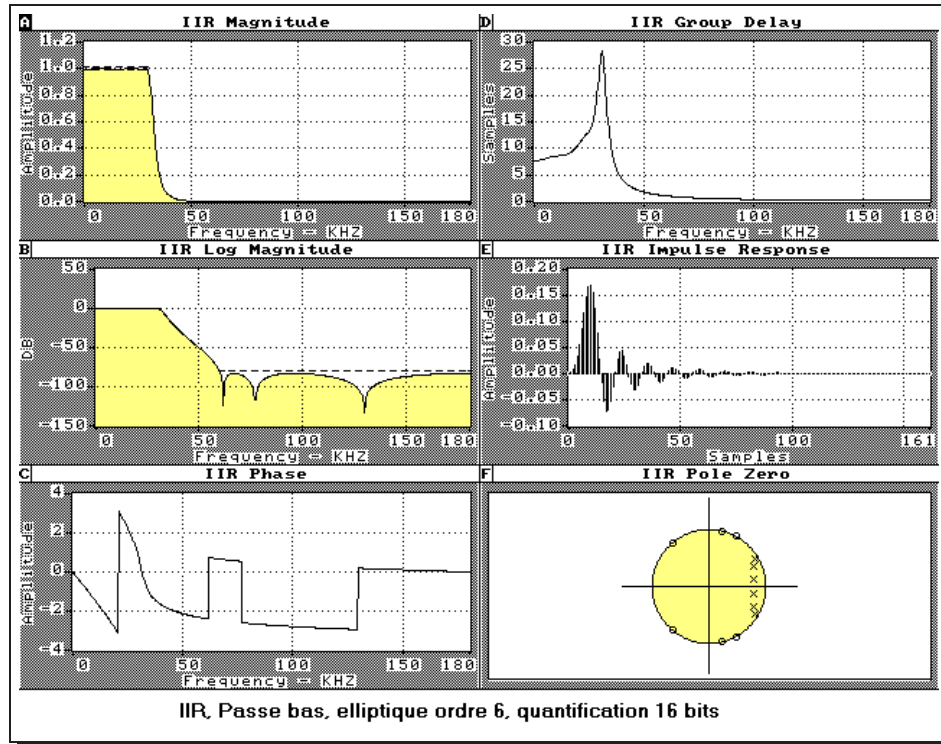
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360 \text{ kHz}$
- $f_1 = f_c = 3 \text{ kHz}$
- $f_2 = f_s = 6 \text{ kHz}$
- Ondulation dans BP $< 0.1 \text{ dB}$
- Gain dans BA $< -80 \text{ dB}$

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (12)

Exemple



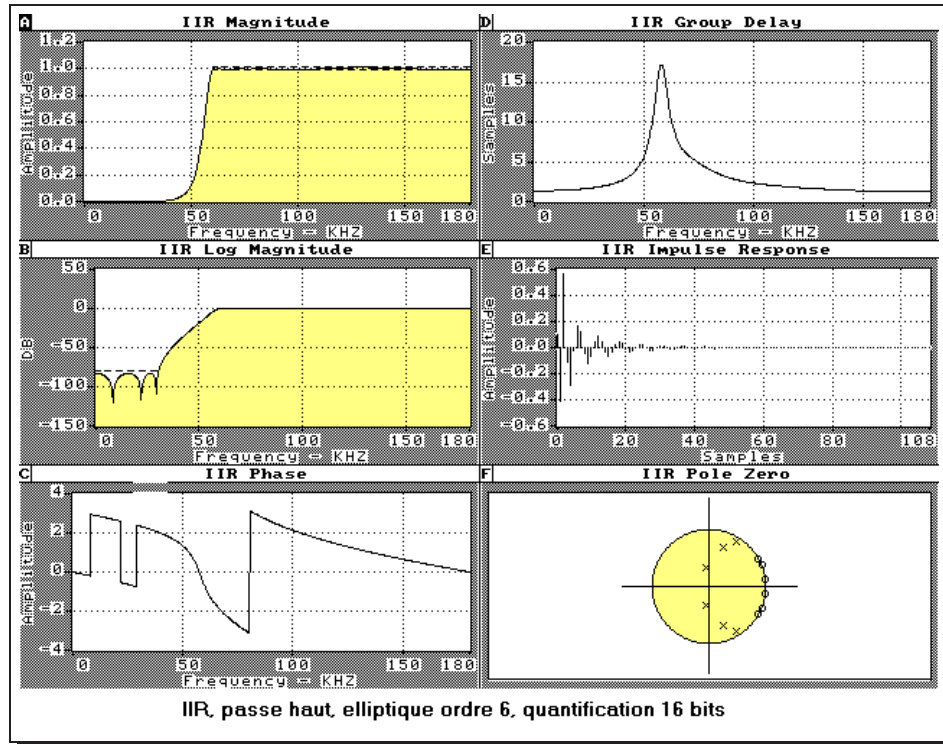
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = f_c = 30$ kHz
- $f_2 = f_s = 60$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (13)

Exemple



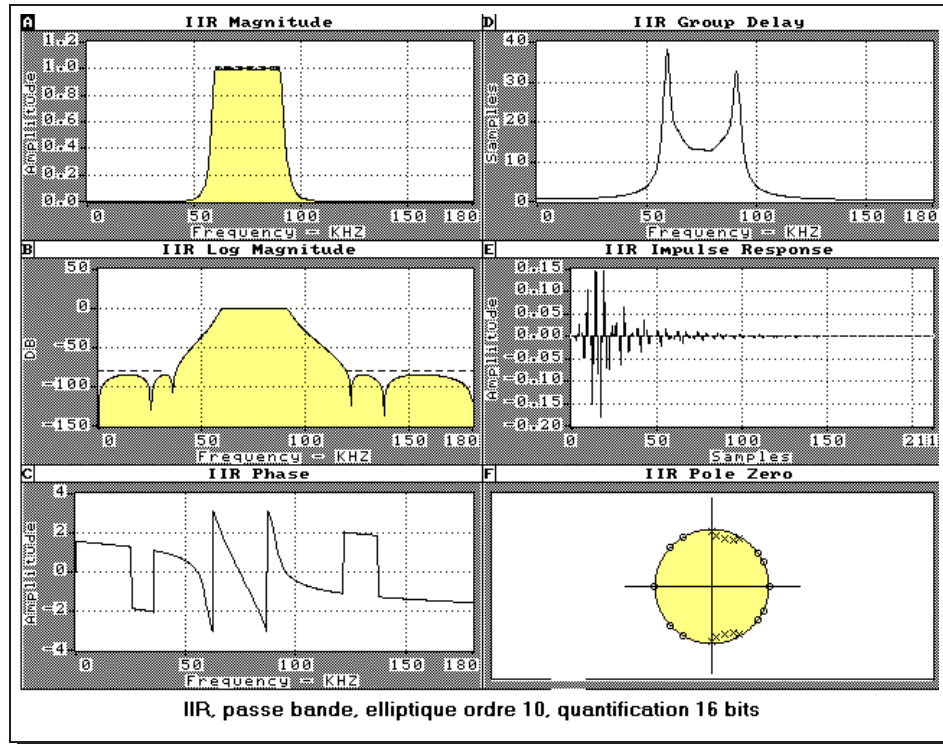
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = 30$ kHz
- $f_2 = 60$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (14)

Exemple



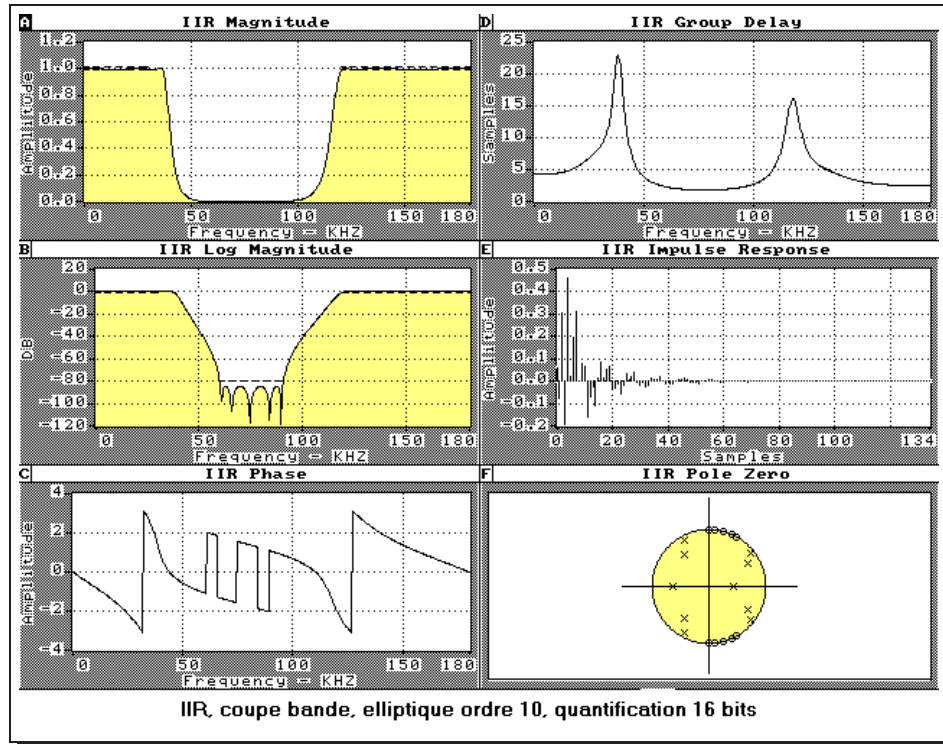
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = 30$ kHz • $f_2 = 60$ kHz
- $f_1 = 90$ kHz • $f_2 = 120$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (15)

Exemple



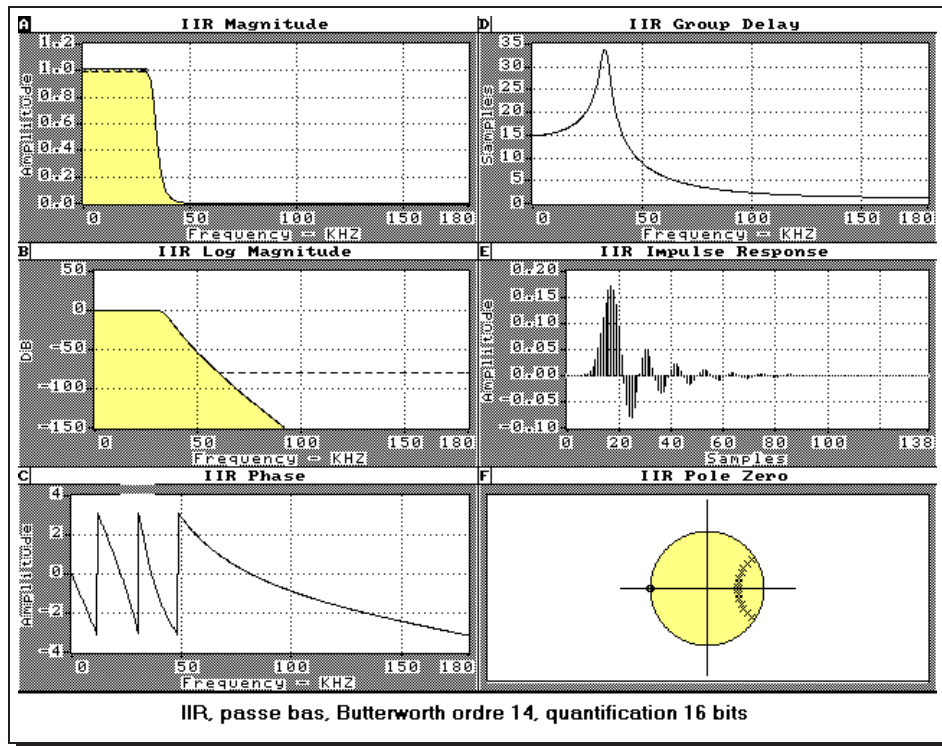
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = 30$ kHz • $f_2 = 60$ kHz
- $f_1 = 90$ kHz • $f_2 = 120$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (16)

Exemple



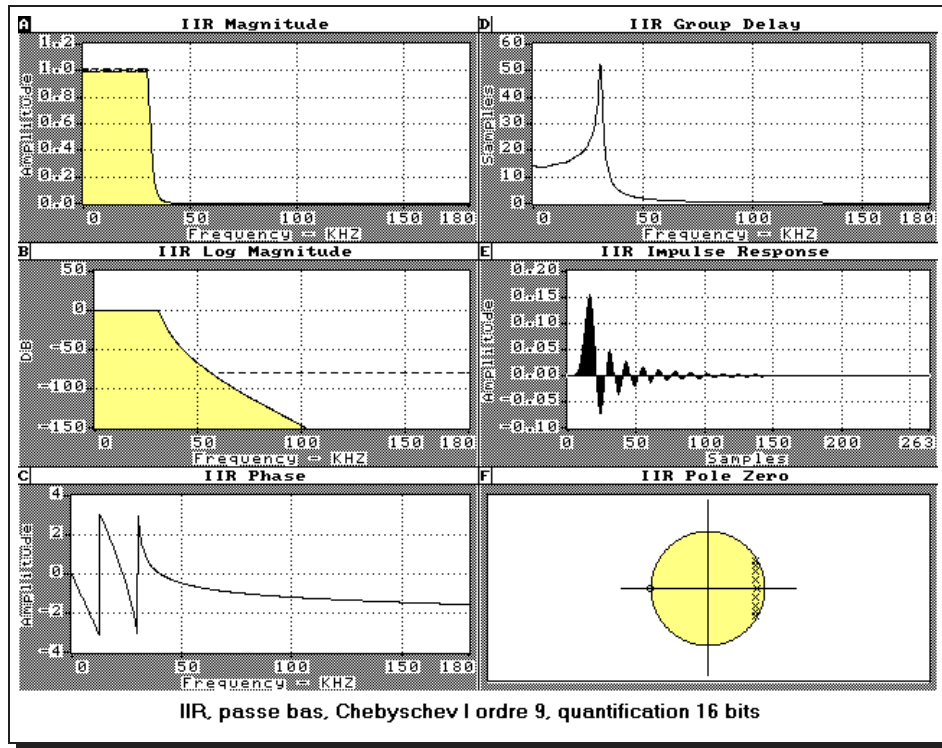
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ KHz
- $f_1 = f_c = 30$ KHz • $f_2 = f_s = 60$ KHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (17)

Exemple



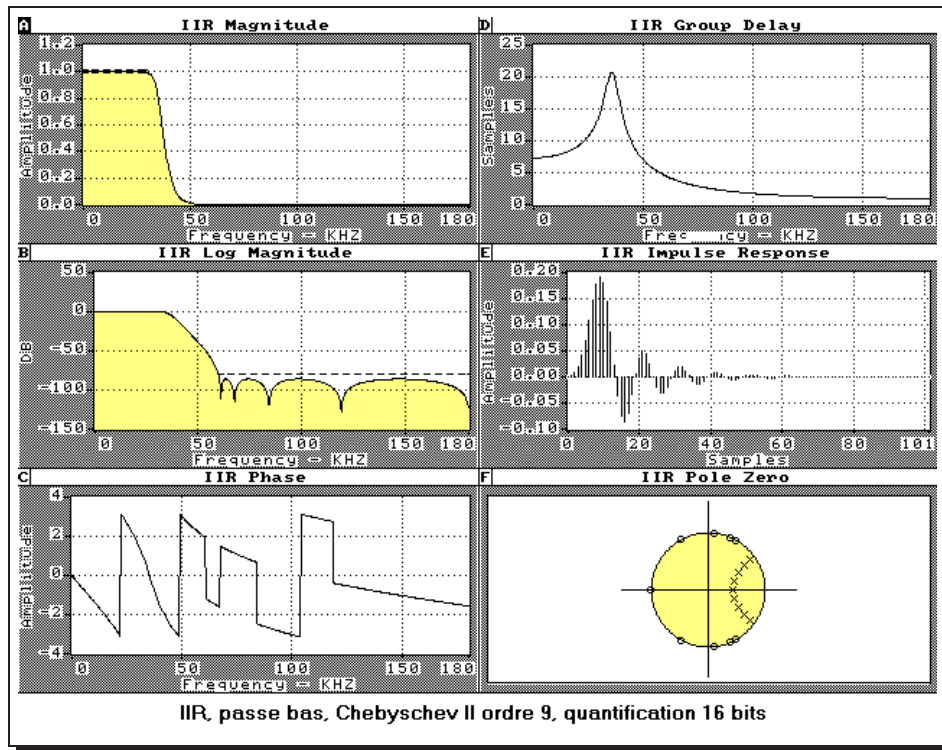
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = 30$ kHz • $f_2 = 60$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (18)

Exemple



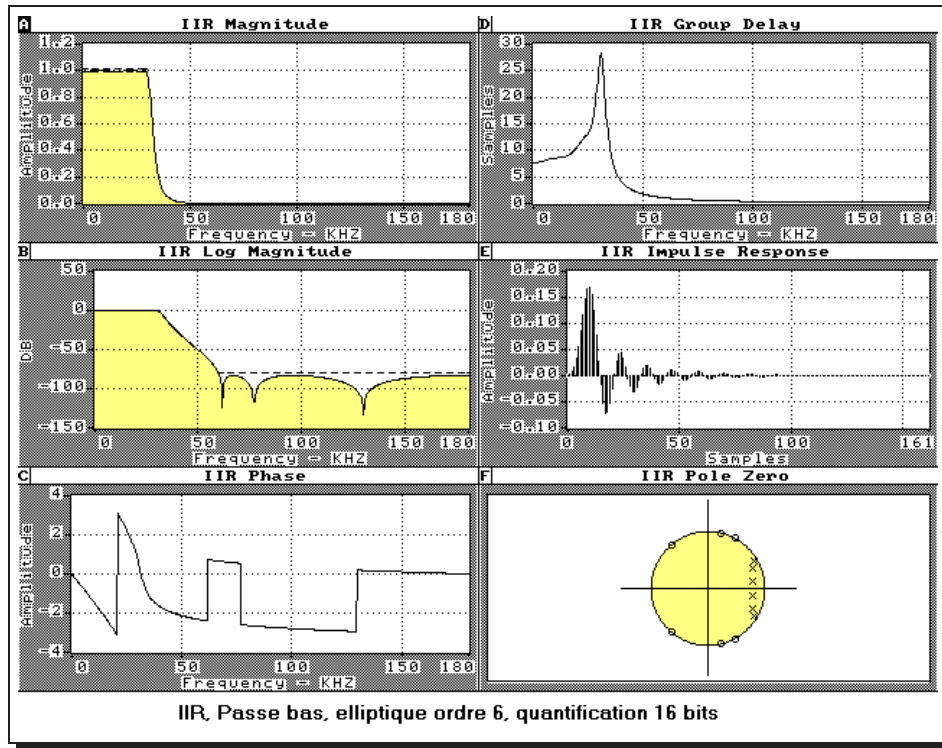
Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = 30$ kHz • $f_2 = 60$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB

SYNTHÈSE DES FILTRES RIF & RII

CONCEPTION DES FILTRES RII (19)

Exemple



Caractéristique souhaitée

- $f_e = 360$ kHz
- $f_1 = 30$ kHz • $f_2 = 60$ kHz
- Ondulation dans BP < 0.1 dB
- Gain dans BA < -80 dB