



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 4

Max Mignotte

DIRO, Département d’Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

<http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/>

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I.

Trouver l’expression mathématique et l’allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous. Tracer sommairement l’allure de sa réponse fréquentiel (en une dimension). De quel type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) s’agit t-il ? Pouvait-on prévoir le résultat juste en regardant les coefficient de ce filtre ? Justifier votre réponse. De quel type de fonction continue ce filtre est censé provenir ? Théoriquement qu’aurait du t’on obtenir dans le domaine fréquentiel ? Est-ce le cas ? Pourquoi ?

$$h(x, y) = \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

II.

Rappelez l’expression mathématique et l’allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous et tracer sommairement l’allure de sa réponse fréquentiel (en une dimension). Quel transformation mathématique faut-il faire dans le domaine fréquentiel pour que ce masque de convolution soit un vrais filtre passe-haut¹ ? Dans le domaine spatial, quelle opération cela implique t-il sur le masque de convolution 1D pour que cela soit un vrais filtre passe-haut ? Trouver le masque de convolution 2D correspondant.

$$h(x, y) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -3 & 1 \\ \hline -3 & 9 & -3 \\ \hline 1 & -3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

^aQuel fonction faut-il retrancher ou ajouter, multiplier, etc. ?

III.

Calculer la convolution numérique de l'image $I(x, y)$ ci-dessous avec le masque de convolution en x et en y dont l'origine a été indiqué par une flèche. Indiquer les résultats ci dessous, respectivement la convolution avec le gradient en x , celui en y , et le résultat de l'approximation du module du gradient par la formule suivante $|G| = |G_x * I(x, y)| + |G_y * I(x, y)|$ et le résultat de la détection du contour si ce module de gradient est supérieur ou égale à trois.

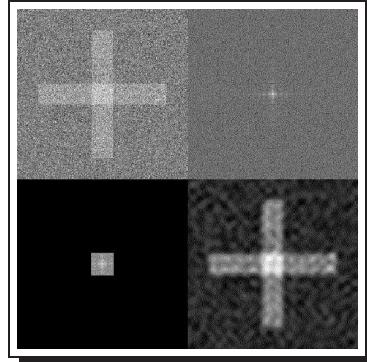
0	0	0	0	1	0
0	0	0	2	3	2
0	0	2	3	4	3
0	0	5	4	4	3
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

↑
-1 1
 G_x

-1
1
 G_y

IV.

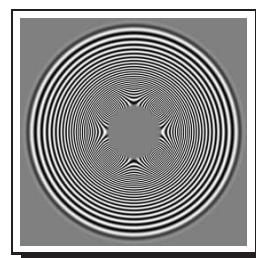
Décrivez le processus mis en oeuvre sur l'exemple de la Figure ci-dessous et commentez son résultat.



Successivement, l'image initiale, son spectre de Fourier, le spectre modifié et l'image résultat.

V.

Pouvez vous expliquez brièvement quel est le phénomène qui se passe pour cette image (cf. Figure) ? L'image *non bruitée* est composée de cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus.



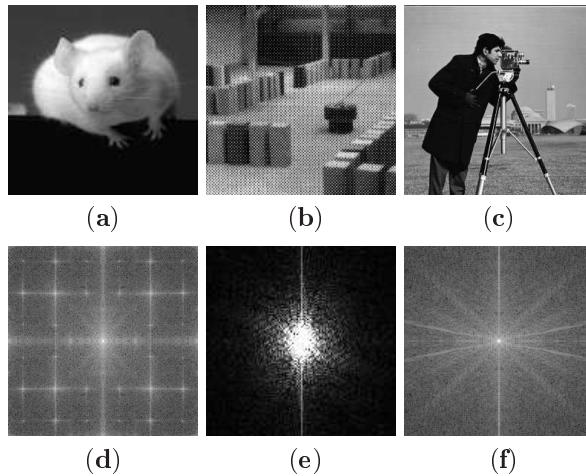


FIG. 1 – Trois Images et trois spectres ...

VI.

Associer à chacune des images le spectre (module de la TF) correspondant et expliquez pourquoi vous avez fait ce choix (cf. Figure 1) ?

VII.

Calculer la Transformée de Hadamard de l'image 2×2 suivante

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

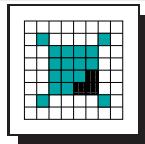
VIII.

Répondre brièvement (1 à 2 phrases) aux questions suivantes :

1. Donner le principal avantage du filtrage fréquentiel (lorsqu'on utilise une FFT) comparativement au filtrage spatial.
2. Donner approximativement le nombre d'opérations nécessaire pour un filtrage fréquentiel (utilisant une FFT) et un filtrage spatial avec un masque de convolution de taille $M \times M$ et une image de taille $N \times N$ (on prendra la convention suivante une addition complexe = 2 ops et une multiplication de 2 complexes = 6 ops, une opération = 1 multiplication = 1 op). A partir de quelle longueur du masque de convolution est-il plus avantageux de prendre le filtrage fréquentiel (pour une image de taille 128×128 par exemple) ?
3. Quel est le type de convolution spatiale équivalente doit-on s'attendre lorsqu'on fait du filtrage fréquentiel ; celui dont les bords de l'image sont remplies de valeurs nulles, celui où l'image est considérée comme toroïdale ou celui où les bords de l'image ne sont pas prises en compte ? Justifier votre réponse.

IX.

Quel est le nombre minimum de bits (Borne supérieure théorique) avec lequel on peut compresser cette image de taille 8×8 pixels (et comportant trois niveaux de gris différents) sans aucune perte ?



X.

1. Pour une image de taille $N \times N$, indiquer le nombre d'opérations nécessaires (complexité) pour :
 - (a) Faire la Transformée de Fourier Discrète (TFD).
 - (b) Faire la TFD en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de TFD 1D).
 - (c) Faire une Fast Fourier Transform (FFT) en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de FFT 1D).
 - (d) Faire une FFT 2D.
2. Calculer par TFD les quatre coefficients spectraux du vecteur de 4 échantillons suivant :

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Indiquer aussi quel interval de fréquence sépare le premier du deuxième échantillon.

3. Calculer en utilisant le principe de la FFT les deux premiers échantillons spectral de ce même vecteur.

XI.

On rappelle que le filtrage de Marr d'une image I consiste en deux étapes

1. Un filtrage Gaussien réalisé sur I .
2. Le calcul du laplacien de l'image filtrée obtenu à l'étape 1.

Donner l'expression analytique de ce filtre dans le domaine spatial et dans le domaine spectral¹. On ne considerera qu'une seule et unique dimension pour simplifier le problème et on s'aidera pour trouver l'expression analytique de ce filtre dans le domaine fréquentiel de la TF d'une gaussienne et des propriété de dérivation de la TF.

¹On rappelle qu'une distribution Gaussienne s'écrit

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

XII.

1. Soit le filtre 1D spatial qui réalise, sur le signal unidimensionnel $f(x)$, l'opération

$$f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad (1)$$

- (a) Trouver l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle (module de la Transformée de Fourier) de ce filtre pour $k > 1$.
 - (b) En déduire le type de filtre dont il s'agit pour $k > 0$, et rappeler (cf. notes de cours) quel phénomène ce filtre fera apparaître en rappelant son lien avec le système visuel humain et donner finalement (à l'aide d'un graphique) son effet sur un signal 1D en escalier.
 - (c) Quel rôle joue $k (> 0)$ dans ce filtre ?
 - (d) Si on considère le masque de convolution $[1 \times 3]$ (i.e., 1 ligne et 3 colonnes) traditionnellement donné pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donner le masque de convolution $[1 \times 3]$ qui réalise l'Équation (1) pour $k = 1$.
 - (e) En utilisant le masque de convolution $[1 \times 3]$ trouvé à la question précédente (que l'on appelle par la suite $h(x)$), utiliser la TF $H(\nu) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j \nu x)$ pour trouver sa réponse fréquentielle et comparer la avec la réponse fréquentielle obtenue à la question (a). Pourquoi ces deux réponses fréquentielles sont elles différentes ? Justifier votre réponse.
2. Soit maintenant le filtre 1D spatial de la fonction $f(x)$ qui réalise l'opération suivante

$$f(x) + k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad (2)$$

- (a) Trouvez l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle (module de la Transformée de Fourier) de ce filtre pour $k > 1$.
- (b) Si on considère le masque de convolution $[1 \times 3]$ (i.e., 1 ligne 3 colonnes) traditionnellement donné pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donnez le masque de convolution $[1 \times 3]$ qui réalise l'Éq. (3) pour k quelconque.
- (c) En déduire les valeurs de k pour lesquels l'Éq. (3) implémente un filtre passe-bas.
- (d) A quoi est équivalent le filtre trouvé en 2.(c) pour $k = 0.25$?

XIII.

1. Quelles propriétés à la spectre (obtenu à l'aide d'une TF) d'une fonction paire.
2. On dispose algorithmiquement d'une FFT (Fast Fourier Transform) et on voudrait calculer la TCD (Transformée de Cosinus Discrète) de l'image suivante que l'on suppose avoir une longueur et largeur égale à une puissance de deux.



Expliquez comment vous pouvez calculer cette TCD à partir de la FFT et dire qu'elles sont les propriétés de ces deux transformés qui vous permettent de faire cela (i.e., justifier votre réponse).

3. Quel est donc la complexité algorithmique par cette stratégie du calcul d'une TCD d'une image de taille $N \times N$?

XIV.

1. Les images 1 à 4 de la Fig. 2 représentent le module du spectre de Fourier des différentes images (a) à (d). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image.
2. Quelle particularité à le spectre de phase ou la partie imaginaire d'un signal paire ?
3. Quelle sorte d'image obtiendrait on, si après calcul de la transformée de cette image, on inversait (i.e., on multipliait par -1) tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier obtenue et si on faisait une transformée de Fourier inverse finale (en laissant la partie réelle inchangée) ? Justifier votre réponse en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier.

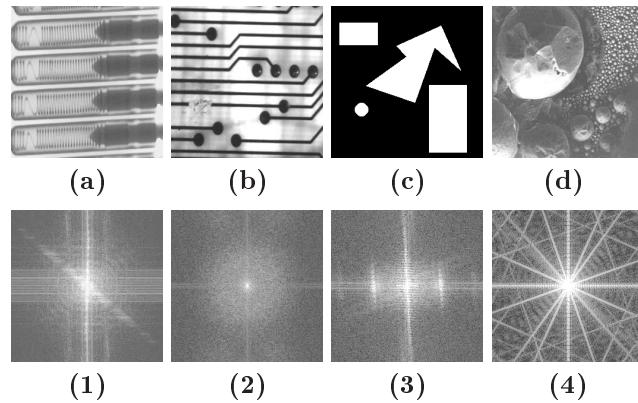


FIG. 2 – Images et leur module du spectre de Fourier en ordre aléatoire.

XV.

Soit une séquence d'images que l'on modélise par la fonction $f(x, y, t)$, x et y étant la position du pixel et t prenant des valeurs entières représentant le numéro de l'image dans la séquence.

1. On désirerait calculer la transformée discrète 3D de ce volume de donnée. Dire comment cela pourrait être fait à partir de la TFD 2D et la TFD 1D ?
2. Supposons que dans séquence d'image $f(x, y, t)$, une région (ou l'image entière) subit une translation pure de vitesse (ou vitesse) (v_x, v_y) , nous savons que la relation qui lie l'image $f(x, y, t)$ et cette vitesse est exprimée par la relation suivante

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) + v_y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \quad (3)$$

En posant $\mathcal{F}(f(x, y, t)) = F(\nu_x, \nu_y, \nu_t)$, que devient cette éq. dans le domaine spectral.

3. En déduire comment on peut estimer le couple (v_x, v_y) donnant la vitesse de translation dans le domaine spectral.