



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 4

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I.

Trouver l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous. Tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentiel (en une dimension). De quel type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) s'agit t-il ? Pouvait-on prévoir le résultat juste en regardant les coefficient de ce filtre ? Justifier votre réponse. De quel type de fonction continue ce filtre est censé provenir ? Théoriquement qu'aurait du t'on obtenir dans le domaine fréquentiel ? Est-ce le cas ? Pourquoi ?

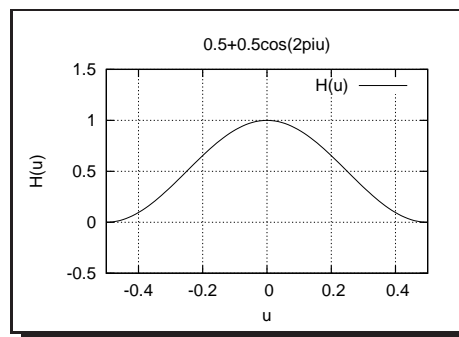
$$h(x, y) = \frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Réponse

Filtre séparable $\blacktriangleright \frac{1}{4} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \frac{1}{4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi jux) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi jux) \\ &= \frac{1}{4} [\exp(2\pi ju) + 2 + \exp(-2\pi ju)] = \frac{1}{4} [2 + 2 \cos(2\pi u)] = \frac{1 + \cos(2\pi u)}{2} \end{aligned}$$

C'est un filtre passe-bas; ce que l'on pouvait prévoir en constatant que tous les coefficients de ce filtre sont positifs. Ce filtre est un filtre Gaussien, censé provenir de la discrétisation de la fonction Gaussienne bien connue. Théoriquement, si c'était parfaitement le cas, on aurait du obtenir dans le domaine fréquentiel une Gaussienne, ce qui n'est pas le cas ici. On obtient seulement la reconstruction de la Gaussienne par les deux premiers termes de la série de Fourier complexe (reconstruction par les deux premières exponentiels complexes).



II.

Rappelez l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous et tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (en une dimension). Quel transformation mathématique faut-il faire dans le domaine fréquentiel pour que ce masque de convolution soit un vrais filtre passe-haut ¹? Dans le domaine spatial, quelle opération cela implique t-il sur le masque de convolution 1D pour que cela soit un vrais filtre passe-haut ? Trouver le masque de convolution 2D correspondant.

$$h(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

^aQuel fonction faut-il retrancher ou ajouter, multiplier, etc. ?

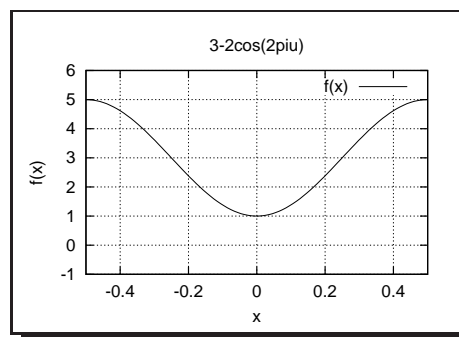
Réponse

Filtre séparable ► $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x) \\ &= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2\cos(2\pi u) \end{aligned}$$

C'est un rehausseur de contour, ce n'est donc pas un réel filtre passe-haut. Pour que cela en soit un, il faudrait retrancher dans le domaine fréquentiel la fonction constante $f(\nu) = -1$, i.e., retrancher dans le domaine spatial la fonction $\mathcal{F}^{-1}(f(\nu)) = -\delta(x)$. Dans ce cas, on obtiendrait le masque de convolution $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, qui est bien un vrais filtre passe haut. En 2D cela correspond au masque de convolution ci dessous

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



III.

Calculer la convolution numérique de l'image $I(x, y)$ ci-dessous avec le masque de convolution en x et en y dont l'origine a été indiqué par une flèche. Indiquer les résultats ci dessous, respectivement la convolution avec le gradient en x , celui en y , et le résultat de l'approximation du module du gradient par la formule suivante $|G| = |G_x * I(x, y)| + |G_y * I(x, y)|$ et le résultat de la détection du contour si ce module de gradient est supérieur ou égale à trois.

0	0	0	0	1	0
0	0	0	2	3	2
0	0	2	3	4	3
0	0	5	4	4	3
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

1	
-1	1
G _x	

-1	1
G _y	

Réponse

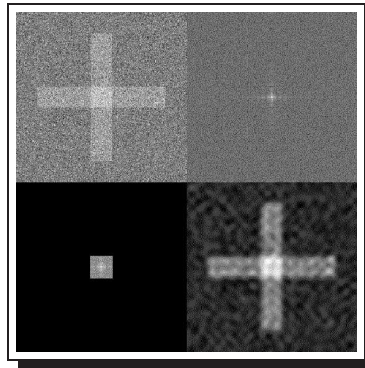
G _x					
0	0	0	-1	1	
0	0	-2	-1	1	
0	-2	-1	-1	1	
0	-5	1	0	1	
0	-1	1	0	0	
0	0	0	0	0	

G _y					
0	0	0	-2	-2	-2
0	0	-2	-1	-1	-1
0	0	-3	-1	0	0
0	0	4	4	4	3
0	0	1	0	0	0

G _x + G _y et Resultat					
0	0	X	X	X	
0	X	2	2	2	
0	X	2	0	1	
0	X	X	X	X	
0	1	0	0	0	

IV.

Décrivez le processus mis en oeuvre sur l'exemple de la Figure ci-dessous et commentez son résultat.



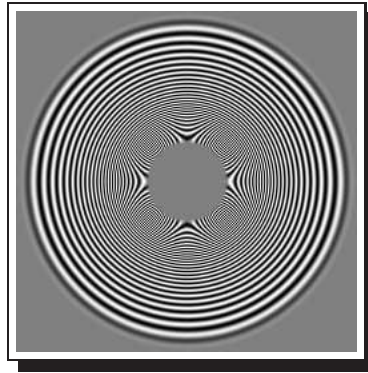
Successivement, l'image initiale, son spectre de Fourier, le spectre modifié et l'image résultat.

Réponse

Ce processus est un filtre passe-bas. Il consiste à calculer la TF de l'image et à multiplier cette TF par une fonction porte bidimensionnelle. Cela a pour effet de *filter* le bruit mais aussi d'éliminer les détails de l'image et d'introduire un flou sur l'image. De plus ce filtrage passe-bas a pour effet d'introduire sur l'image résultat une certaine ondulation (causé par le fait que la TF inverse d'une fonction porte est un sinus cardinal ; les lobes secondaires de la sinc produisant cet effet).

V.

Pouvez vous expliquer brièvement quel est le phénomène qui se passe pour cette image (cf. Figure)? L'image *non bruitée* est composée de cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus.



Réponse

C'est l'effet moiré, d'aliasing, de sous-échantillonnage ou encore l'effet du repliement de spectre. De par sa nature (des cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus), il est impossible de trouver une période d'échantillonnage assez petite pour éviter le repliement de spectre de cette image.

VI.

Associer à chacune des images le spectre (module de la TF) correspondant et expliquez pourquoi vous avez fait ce choix (cf. Figure 1)?

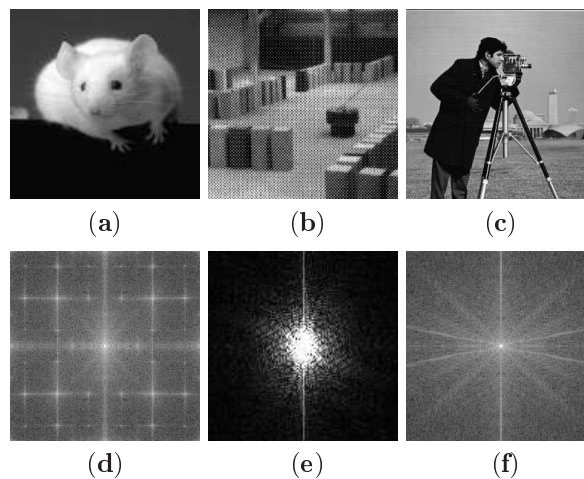


FIG. 1 – *Trois Images et trois spectres ...*

Réponse

Image (a) avec spectre (e) : l'image de la souris présente une discontinuité ou transition brutale suivant l'axe des x qui se traduit par une TF présentant de nombreuses fréquences spatiales suivant l'axe des ν (associé à l'axe des y).

Image (c) avec spectre (f) : l'image du caméra-man présente spatialement de nombreuses discontinuités suivant différents axes que l'on retrouve dans le domaine fréquentiel (de nombreuses et importantes fréquences spatiales associées à différents axes).

Image (b) avec spectre (d) : l'image est discrétisée par une sorte de peigne de Dirac bidimensionnel pondéré. Dans le domaine fréquentiel, cela se traduit par une convolution du motif spectral de base par un peigne de Dirac bidimensionnel pondéré.

VII.

Calculer la Transformée de Hadamard de l'image 2×2 suivante $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Réponse

Projection de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ sur la base de Hadamard 2×2 :

$$\begin{aligned} \bullet & < \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > / 4 = 2, \\ \bullet & < \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} > / 4 = -1/2, \\ \bullet & < \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > / 4 = 1/2, \\ \bullet & < \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} > / 4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

VIII.

Répondre brièvement (1 à 2 phrases) aux questions suivantes :

1. Donner le principal avantage du filtrage fréquentiel (lorsqu'on utilise une FFT) comparativement au filtrage spatial.
2. Donner approximativement le nombre d'opérations nécessaire pour un filtrage fréquentiel (utilisant une FFT) et un filtrage spatial avec un masque de convolution de taille $M \times M$ et une image de taille $N \times N$ (on prendra la convention suivante une addition complexe = 2 ops et une multiplication de 2 complexes = 6 ops, une opération = 1 multiplication = 1 op). A partir de quelle longueur du masque de convolution est il plus avantageux de prendre le filtrage fréquentiel (pour une image de taille 128×128 par exemple) ?
3. Quel est le type de convolution spatiale équivalente doit on s'attendre lorsqu'on fait du filtrage fréquentiel ; celui dont les bords de l'image sont remplis de valeurs nulles, celui ou l'image est considéré comme toroïdale ou celui ou les bords de l'image ne sont pas prises en compte ? Justifier votre réponse.

Réponse

1

Le filtrage fréquentiel (lorsqu'on utilise une FFT) est plus rapide que le filtrage spatial surtout pour des masque de convolution de taille importante.

2

Pour le filtrage fréquentiel : $2N^2 \log N$ (FFT + IFFT de l'image) + $M^2 \log M$ (FFT masque) + $6N^2$ (multiplication de N^2 complexes dans l'espace des fréquences).

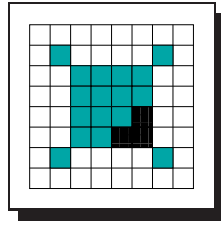
Pour le filtrage spatial : $N^2(2M^2 - 1) \approx 2M^2 \times N^2$. À partir d'un masque 3×3 ou 4×4 il est plus intéressant (en terme de coût calculatoire) de faire du filtrage fréquentiel.

3

Celui où l'image est considéré comme toroïdale car la technique de filtrage fréquentiel périodise intrinsèquement l'image.

IX.

Quel est le nombre minimum de bits (Borne supérieure théorique) avec lequel on peut compresser cette image de taille 8×8 pixels (et comportant trois niveaux de gris différents) sans aucune perte ?



Réponse

On calcule l'entropie de cette image (cf. cours Compression, compression d'Huffman),

$$\text{Nb Moyen de bits} > \text{Entropy} = - \sum_{i=0}^{G_{\max}} h_i \log_2(h_i)$$

où la sommation se fait sur les différents niveaux de gris de cette image. G_{\max} est le nombre de niveaux de gris maximal et h_i la probabilité d'avoir le niveau de gris $= i$. On trouve,

$$\begin{aligned} \text{Entropy} = \sum_{i=0}^2 h_i \log_2(h_i) &= \frac{44}{64} \log_2\left(\frac{44}{64}\right) + \frac{17}{64} \log_2\left(\frac{17}{64}\right) + \frac{3}{64} \log_2\left(\frac{3}{64}\right) \\ &= 0.3716 + 0.5080 + 0.2069 \\ &= 1.0866 \text{ bits/pixel.} \end{aligned}$$

Il faut donc au minimum 64×1.0866 pour coder cette image sans perte soit 69.54 bits.

X.

1. Pour une image de taille $N \times N$, indiquer le nombre d'opérations nécessaires (complexité) pour :
 - (a) Faire la Transformée de Fourier Discrète (TFD).
 - (b) Faire la TFD en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de TFD 1D).
 - (c) Faire une Fast Fourier Transform (FFT) en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de FFT 1D).
 - (d) Faire une FFT 2D.
2. Calculer par TFD les quatre coefficients spectraux du vecteur de 4 échantillons suivant :

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Indiquer aussi quel interval de fréquence sépare le premier du deuxième échantillon.

3. Calculer en utilisant le principe de la FFT les deux premiers échantillons spectral de ce même vecteur.

Réponse

1

1. $\text{TF}_{2\text{D}}$ d'une image $N \times N = N^4$.
2. $\text{TF}_{2\text{D}}$ d'une image $N \times N = 2N \text{ TF}_{1\text{D}} = 2N(N^2) = 2N^3$.
3. $\text{FFT}_{2\text{D}}$ d'une image $N \times N = 2N \text{ FFT}_{1\text{D}} = 2N(N \log N) = 2N^2 \log N$.
4. $\text{FFT}_{2\text{D}}$ d'une image $N \times N = N^2 \log N$.

2

$$F(0) = \frac{1}{4}$$

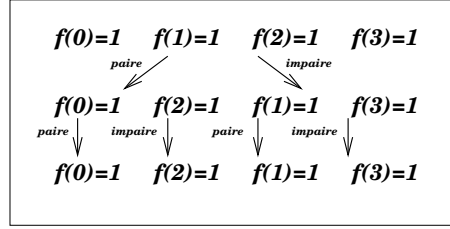
$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \exp(-\pi j x / 2) = \left(\frac{1}{4} \exp(0) + \exp(-\pi j / 2) + \exp(-\pi j) + \exp(-3\pi j / 2) \right) = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0$$

$$F(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \exp(-\pi j x) = \left(\frac{1}{4} \exp(0) + \exp(-\pi j) + \exp(-2\pi j) + \exp(-3\pi j) \right) = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0$$

$$F(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 \exp(-3\pi j x / 2) = \left(\frac{1}{4} \exp(0) + \exp(-3\pi j / 2) + \exp(-3\pi j) + \exp(-9\pi j / 2) \right) = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0$$

L'intervalle de fréquence séparant le premier du deuxième échantillon est la résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/T$ avec T la plus grande période existant dans le signal (i.e., la longueur même du signal, donc $T = 4\Delta T$), avec ΔT , la résolution spatiale ; ($\Delta T = 1$ (1 pixel)) et de ce fait $\Delta\nu = 1/4$. **<1 pt>**

3



On doit calculer $F_4(0)$ et $F_4(1)$.

$$\begin{aligned}
 F_4(0) &= \frac{1}{2} [F_2^{\text{paire}}(0) + F_2^{\text{impaire}}(0)], \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}} + F_1^{\text{impaire}}(0)] + \frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}}(0) + F_1^{\text{impaire}}(0)] \right], \\
 &= \frac{1}{4} [1 + 1 + 1 + 1] = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_4(1) &= \frac{1}{2} [F_2^{\text{paire}}(1) - jF_2^{\text{impaire}}(1)], \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [F_1^{\text{paire}}(1) - F_1^{\text{impaire}}(1)] - (j/2) [F_1^{\text{paire}}(1) + F_1^{\text{impaire}}(1)] \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [1 - 1] - (j/2) [1 - 1] \right] = 0.
 \end{aligned}$$

XI.

On rappelle que le filtrage de Marr d'une image I consiste en deux étapes

1. Un filtrage Gaussien réalisé sur I .
2. Le calcul du laplacien de l'image filtrée obtenu à l'étape 1.

Donner l'expression analytique de ce filtre dans le domaine spatial et dans le domaine spectral¹. On ne considèrera qu'une seule et unique dimension pour simplifier le problème et on s'aidera pour trouver l'expression analytique de ce filtre dans le domaine fréquentiel de la TF d'une gaussienne et des propriétés de dérivation de la TF.

^aOn rappelle qu'une distribution Gaussienne s'écrit

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Réponse

Les étapes 1. et 2. reviennent à filtrer l'image I par le laplacien d'une Gaussienne. En ne considérant qu'une seule et unique dimension, cela revient à filtrer l'image I par une PSF qui serait analytiquement la dérivée seconde d'une Gaussienne. Pour obtenir l'expressions analytique de ce filtre dans l'espace physique, considérons la définition d'une fonction Gaussienne :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sa dérivée par rapport à x est :

$$G'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

et sa dérivée seconde (ou son laplacien en x),

$$G''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

ce qui nous donne l'expression analytique de ce filtre dans l'espace spatial suivant la direction x .

Cherchons maintenant son expression analytique dans le domaine de Fourier. Utilisons la propriété de dérivation de la TF pour établir que $\mathcal{F}(G(x)'') = (2\pi j\nu)^2 \mathcal{F}(G(x)) = -4\pi^2\nu^2 \mathcal{F}(G(x))$ et le fait, déjà établi en cours que $\mathcal{F}(G(x)) = \exp(-2\pi^2 u^2 \sigma^2)$. On en déduit l'expression analytique du filtre dans le domaine fréquentiel :

$$\mathcal{F}(G(x)'') = -4\pi^2\nu^2 \exp(-2\pi^2 u^2 \sigma^2)$$

XII.

1. Soit le filtre 1D spatial qui réalise, sur le signal unidimensionnel $f(x)$, l'opération suivante

$$f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \tag{1}$$

- (a) Trouver l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle (module de la Transformée de Fourier) de ce filtre pour $k > 1$.
 - (b) En déduire le type de filtre dont il s'agit pour $k > 0$, et rappeler (cf. notes de cours) quel phénomène ce filtre fera apparaître en rappelant son lien avec le système visuel humain et donner finalement (à l'aide d'un graphique) son effet sur un signal 1D en escalier.
 - (c) Quel rôle joue $k (> 0)$ dans ce filtre ?
 - (d) Si on considère le masque de convolution $[1 \times 3]$ (i.e., 1 ligne et 3 colonnes) traditionnellement donné pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donner le masque de convolution $[1 \times 3]$ qui réalise l'Équation (1) pour $k = 1$.
 - (e) En utilisant le masque de convolution $[1 \times 3]$ trouvé à la question précédente (que l'on appelle par la suite $h(x)$), utiliser la TF $H(\nu) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j\nu x)$ pour trouver sa réponse fréquentielle et comparer la avec la réponse fréquentielle obtenue à la question (a). Pourquoi ces deux réponses fréquentielles sont-elles différentes ? Justifier votre réponse.
2. Soit maintenant le filtre 1D spatial de la fonction $f(x)$ qui réalise l'opération suivante

$$f(x) + k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \tag{2}$$

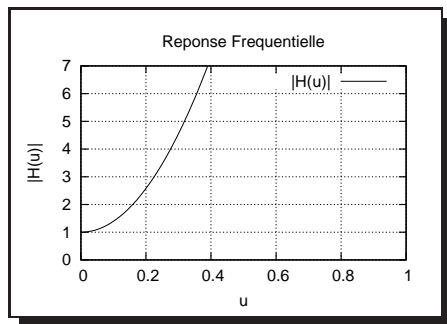
- (a) Trouvez l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle (module de la Transformée de Fourier) de ce filtre pour $k > 1$.
- (b) Si on considère le masque de convolution $[1 \times 3]$ (i.e., 1 ligne 3 colonnes) traditionnellement donné pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donnez le masque de convolution $[1 \times 3]$ qui réalise l'Équation (3) pour k quelconque.
- (c) En déduire les valeurs de k pour lesquels l'Équation (3) implémente un filtre passe-bas.
- (d) A quoi est équivalent le filtre trouvé en 2.(c) pour $k = 0.25$?

Réponse

1(a) La transposition dans le domaine de Fourier avec la convention $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu)$ se fait immédiatement et on trouve

$$f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) [1 - k(2\pi j\nu)^2] = F(\nu) \underbrace{[1 + 4k\pi^2\nu^2]}_{H(\nu)}.$$

Dans le domaine spectrale, $|F(\nu)|$ est donc multiplié par la fonction de transfert $H(\nu) = 1 + 4k\pi^2\nu^2$, dont le module est $|1 + (4k\pi^2\nu^2)|$. Avec $|H(\nu)|_{\nu \rightarrow 0} \rightarrow 1$ et $|H(\nu)|_{\nu \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$. L'allure est donné par le graphe ci contre (pour $k = 1$).



1(c) Il contrôlera, proportionnellement à la valeur de k , la plus ou moins amplification ou rehaussement des contours.

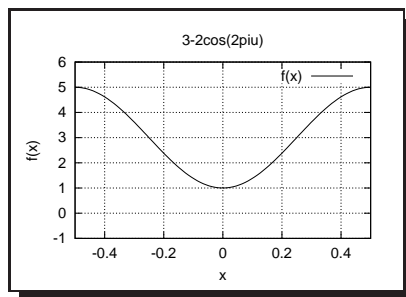
1(d) On a, en utilisant l'opérateur $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ pour $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} &= f(x) * \left[\delta(x) - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= f(x) * \left[\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= f(x) * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On trouve donc le masque $[1 \times 3]$ de convolution suivant $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

1(e) Si on appelle $H(\nu)$ la TFD de $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j\nu x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j\nu x) \\ &= -\exp(2\pi j\nu) + 3 - \exp(-2\pi j\nu) = 3 - 2\cos(2\pi\nu) \end{aligned}$$



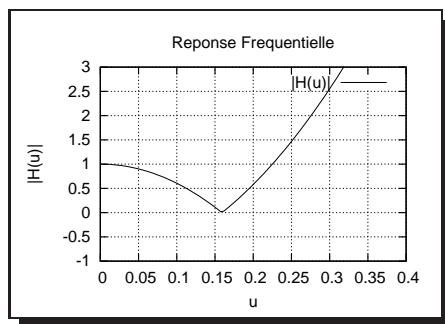
Cette réponse fréquentielle est elle aussi un rehausseur de contour mais la TF s'applique ici sur une fonction discrète donc le spectre est ici (forcément) périodique de période numérique $T=1$. De plus on doit considérer l'effet de la discrétisation de l'opérateur dérivé seconde qui explique que "localement" cette réponse fréquentielle comporte quelques dissemblances comparativement à la TF fait sur sa version continu.

Nota : En fait, pour être plus précis, il s'agit bien du même filtre et on peut le constater facilement car, pour les petites valeurs de ν (proche de 0), $\cos(2\pi\nu) \approx 1 - (2\pi\nu)^2/2$ et donc $H(\nu) = 3 - 2\cos(2\pi\nu) \approx 3 - 2 \times (1 - (2\pi\nu)^2/2) = 1 + 4\pi^2\nu^2$, identique à la fonction de transfert trouvée à la question 1.(a) pour $k = 1$.

2.(a) On trouve

$$f(x) + k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) \underbrace{[1 - 4k\pi^2\nu^2]}_{H(\nu)}$$

Et, $|H(\nu)| = |1 - 4k\pi^2\nu^2|$ qui se représente dans le domaine des fréquences par



2.(b)

$$\begin{aligned} f(x) + k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} &= f(x) * \left[\delta(x) + k \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= f(x) * \left[\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= f(x) * \begin{bmatrix} k & -2k+1 & k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On trouve donc le masque 1×3 de convolution suivant $\begin{bmatrix} k & -2k+1 & k \end{bmatrix}$

2.(c) Si tous les coefficients de ce masque de convolution étaient positifs, alors la convolution par ce masque se réduirait à un moyennage et on aurait un filtre passe-bas ; ce qui est donc le cas pour $k > 0$ et $k < 1/2$.

2.(d) Pour $k = 0.25$, on a $\begin{bmatrix} k & -2k+1 & k \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ qui est similaire au filtre Gaussien ou binomial de largeur 3 (et qui est bien passe-bas puisque tous ses coefficients sont positifs).

XIII.

1. Rappeler quelles propriétés à la spectre (obtenu à l'aide d'une TF) d'une fonction paire.
2. On dispose algorithmiquement d'une FFT (Fast Fourier Transform) et on voudrait calculer la TCD (Transformée de Cosinus Discrète) de l'image suivante que l'on suppose avoir une longueur et largeur égale à une puissance de deux.



Expliquez comment vous pouvez calculer cette TCD à partir de la FFT et dire qu'elles sont les propriétés de ces deux transformés qui vous permettent de faire cela (i.e., justifier votre réponse).

3. Quel est donc la complexité algorithmique par cette stratégie du calcul d'une TCD d'une image de taille $N \times N$?

Réponse

1(a) Partie réelle paire et pas de partie imaginaire.

1(b) On se sert du fait que la FFT suppose que l'image à transformée est périodique en x et y (i.e., cyclique) et que la TCD suppose que la transformée de l'image est pair. Donc une stratégie serait de rendre pair l'image de départ (ou symétrie miroir) sans changer la répartition des fréquences de celles ci puis de calculer la FFT ; cela reviendrait à faire sa TCD ; i.e.

$$\text{TCD} \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{😊} \\ \hline \end{array} \right) = \text{TF} \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{😊} & \text{😊} \\ \hline \text{😞} & \text{😞} \\ \hline \end{array} \right\}$$

NOTA : On comprend bien que l'image rendue paire à la même répartition de fréquence que l'image originale et que puisque celle-ci à été rendue pair, sa FFT n'a qu'une partie réelle sans partie imaginaire et est donc identique à une TCD. Théoriquement le spectre obtenu en utilisant la FFT est aussi 4 fois plus grand en taille (il faudrait sous-échantillonner d'un facteur 2 pour retrouver la même taille que celle obtenu en calculant directement la TCD) et l'ensemble ds coefficients obtenus sont auss multiplié par ce même facteur.

1(c) Pour la FFT d'une image de taille $N \times N$, on a une complexité proportionnelle à $N^2 \log_2 N$. Pour calculer sa TCD il nous faut donc une complexité proportionnelle à $4N^2 \log_2 2N$ ($\approx N^2 \log_2 N$).

XIV.

1. Les images 1 à 4 de la Fig. 2 représentent le module du spectre de Fourier des différentes images (a) à (d). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image.
2. Quelle particularité à le spectre de phase ou la partie imaginaire d'un signal paire?
3. Quelle sorte d'image obtiendrait on, si après calcul de la transformée de cette image, on inversait (i.e., on multipliait par -1) tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier obtenue et si on faisait une transformée de Fourier inverse finale (en laissant la partie réelle inchangée)? Justifier votre réponse en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier.

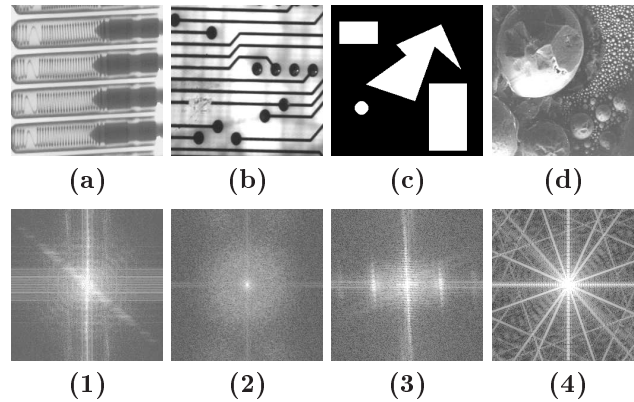


FIG. 2 – Images et leur module du spectre de Fourier en ordre aléatoire.

Réponse

c-4 : l'image est binaire et synthétique et fait donc apparaître des transitions ou discontinuités spatiales très nettes qui vont se matérialiser dans son spectre d'amplitude par des fréquences spatiales élevées et des forts coefficients de module du spectre dans la direction perpendiculaire à toutes les transitions blanche-noire visibles dans l'image. Il s'agit donc, sans ambiguïté, de l'image 4.

d-2 : l'image présente des formes présentant des transitions de différentes importances et des formes différentes qui vont se traduire spectralement par une diversité de fréquence dans le domaine spectral. Il s'agit donc de l'image 2.

a-3 : Un type de transitions existe dans l'image (horizontale légèrement diagonale) expliquant la ligne presque verticale de forts coefficient dans le module du spectre de l'image 3. De plus un motif se répète (4 fois) suivant l'axe des y et une discrétisations de 4 ou 5 pixels suivant l'axe des fréquences en y peut être vues sur l'image 3.

b-1 : Deux types de transitions (horiz. et diagonales droites) existent dans l'image et correspondent à deux type de forts coefficients spectraux sur une orientation perpendiculaire aux deux précédentes transitions.

2 Le spectre de phase ou la partie imaginaire d'un signal paire est nulle.

3 L'opération qui consiste à multiplier par -1.0 tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier est l'opération qui prend le conjugué du spectre complexe, i.e., l'opération $F(u, \nu) \rightarrow F^*(u, \nu)$. Or on a la propriété suivante :

$$f(-x, -y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(u, \nu)$$

Donc par transformée de Fourier inverse, on va réaliser spatialement l'opération $f(-x, -y)$ qui correspond, puisque l'image est périodique à l'infini en ligne et en colonne (car on a utilisé la transformé de Fourier discrète), à une rotation de 180 degré de l'image.

- On pourrait raisonner aussi de la façon suivante; l'opération qui consiste à multiplier par -1.0 tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier est l'opération qui multipliera la phase du signal par -1 et laissera inchangé le module du spectre du signal. L'image sera la même mais donc déphasé d'un angle π , ce qui correspond pour l'image à une rotation d'angle π radian ou d'angle 180 degré.

XV.

Soit une séquence d'images que l'on modélise par la fonction $f(x, y, t)$, x et y étant la position du pixel et t prenant des valeurs entières représentant le numéro de l'image dans la séquence.

1. On désirerait calculer la transformée discrète 3D de ce volume de donnée. Dire comment cela pourrait être fait à partir de la TFD 2D et la TFD 1D ?
2. Supposons que dans séquence d'image $f(x, y, t)$, une région (ou l'image entière) subit une translation pure de vitesse (ou vélocité) (v_x, v_y) , nous savons que la relation qui lie l'image $f(x, y, t)$ et cette vélocité est exprimée par la relation suivante

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) + v_y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \quad (3)$$

En posant $\mathcal{F}(f(x, y, t)) = F(\nu_x, \nu_y, \nu_t)$, que devient cette éq. dans le domaine spectral.

3. En déduire comment on peut estimer le couple (v_x, v_y) donnant la vitesse de translation dans le domaine spectral.

Réponse

1

Grâce à la propriété de séparabilité de la transformée de Fourier, on devrait d'abord calculer pour chaque valeur de t une transformé 2D et ainsi réaliser l'opération $f(x, y, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y, t)$, puis ensuite sur toute les lignes temporelles, pour chaque (ν_x, ν_y) utiliser finalement une transformé 1D.

2

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) + v_y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad 2\pi j F(\nu_x, \nu_y, \nu_t) (v_x \nu_x + v_y \nu_y + \nu_t) = 0$$

l'équation (3) devient donc $v_x \nu_x + v_y \nu_y + \nu_t = 0$ qui est l'équation d'un plan dans le domaine spectral.

3

Le plan de maximum d'énergie spectral sera le plan d'équation $v_x \nu_x + v_y \nu_y + \nu_t = 0$. Trouver ce plan, c'est trouver v_x et v_y .