



DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL

FILTRAGE SPATIAL

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

FILTRAGE SPATIALE

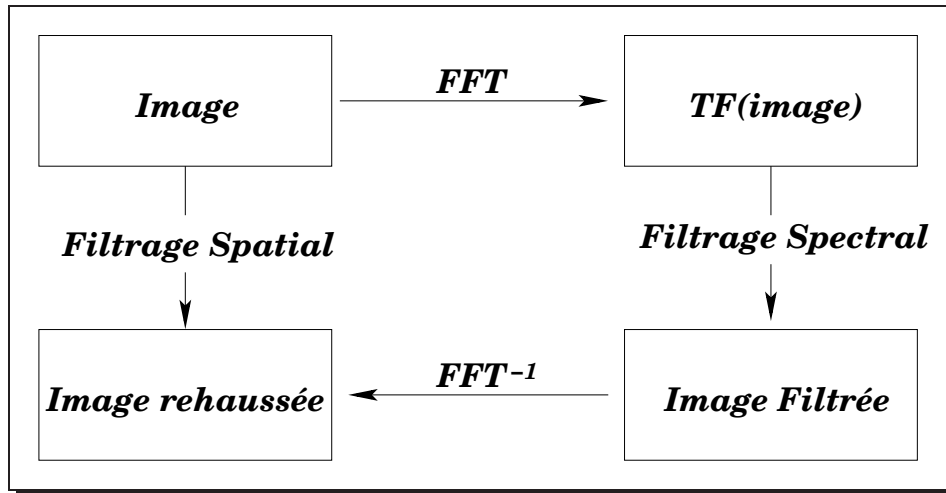
SOMMAIRE

Introduction	2
Convolution Discrète 2D -Rappel-	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas)	6
Filtre Gaussien (Passe-bas)	7
Autres Filtres Passe-bas	8
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique-	9
Filtre Passe-haut -Gradient-	12
Filtre Passe-haut -Laplacien-	17
Filtre de Marr-Hildreth	19
Exercices	21

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION (1)

Principe de Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

$$f(x, y) * g(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u, \nu) \cdot G(u, \nu)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u, \nu) * G(u, \nu)$$

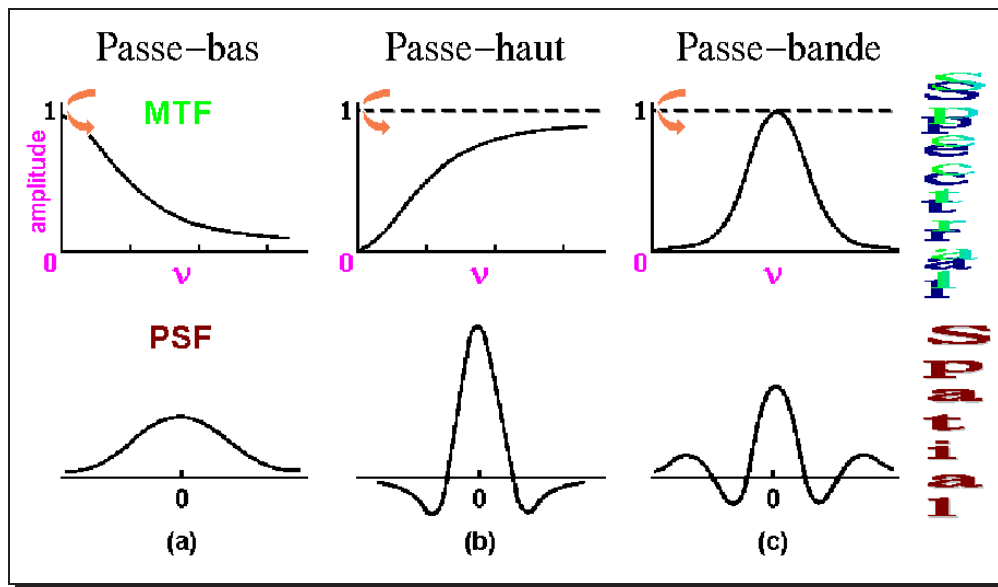
donc, si $f(x, y)$ est l'image à filtrer (ou à rehausser) et $g(x, y)$, le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{f(x, y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

FILTRAGE SPATIAL

INTRODUCTION (2)

Trois Types de Filtrage



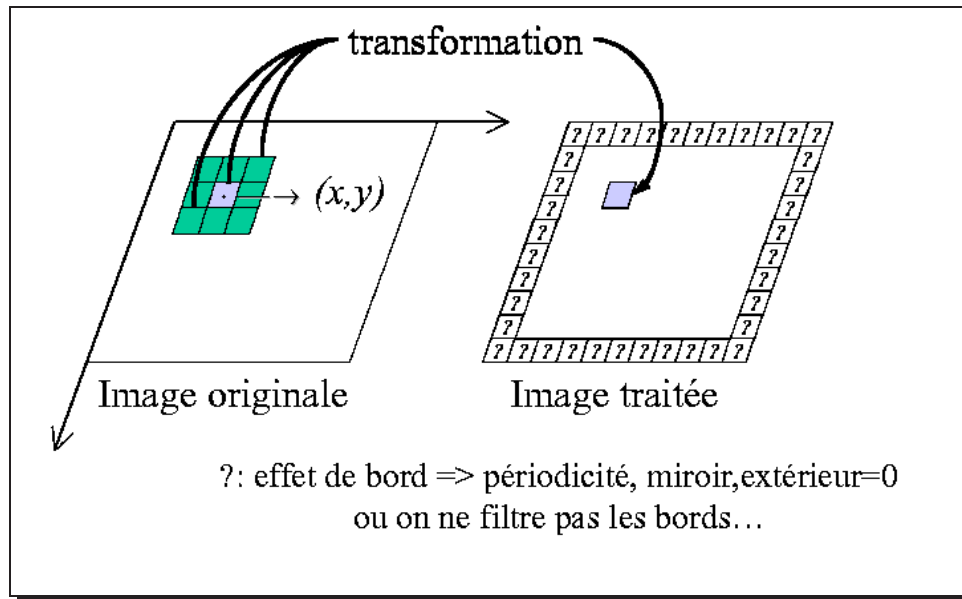
- **PSF** : Point Spread Function
(ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function
(ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

FILTRAGE SPATIALE

CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (1)

Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point (x, y)



Exemple

		16	0	16		
		16	16	16		
		16	16	16		

$\ast (1/16)$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

=

		1	2	2	2	1
		3	7	8	7	3
		4	11	14	11	4
		3	9	12	9	3
		1	3	4	3	1

FILTRAGE SPATIALE

CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (2)

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

Remarque

- Généralement le masque est de dimension (DF) impair et symétrique et dans ce cas

$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x + i, y + j) \text{filtre}(i, j)$$

<i>Filtre(i, j)</i>		
<i>w1</i>	<i>w2</i>	<i>w3</i>
<i>w4</i>	<i>w5</i>	<i>w6</i>
<i>w7</i>	<i>w8</i>	<i>w9</i>

$\left. \vphantom{\begin{matrix} w1 \\ w4 \\ w7 \end{matrix}} \right\} DF=3$

Filtre(0,0)=w5

$$\begin{aligned}
 g(x, y) = & w_1 f(x - 1, y - 1) + w_2 f(x, y - 1) + w_3 f(x + 1, y - 1) \\
 & + w_4 f(x - 1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x + 1, y) \\
 & + w_7 f(x - 1, y + 1) + w_8 f(x, y + 1) + w_9 f(x + 1, y + 1)
 \end{aligned}$$

- Afin de conserver la moyenne de l'image $f(x, y)$, la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e., $\sum_i w_i = 1$)

FILTRAGE SPATIALE

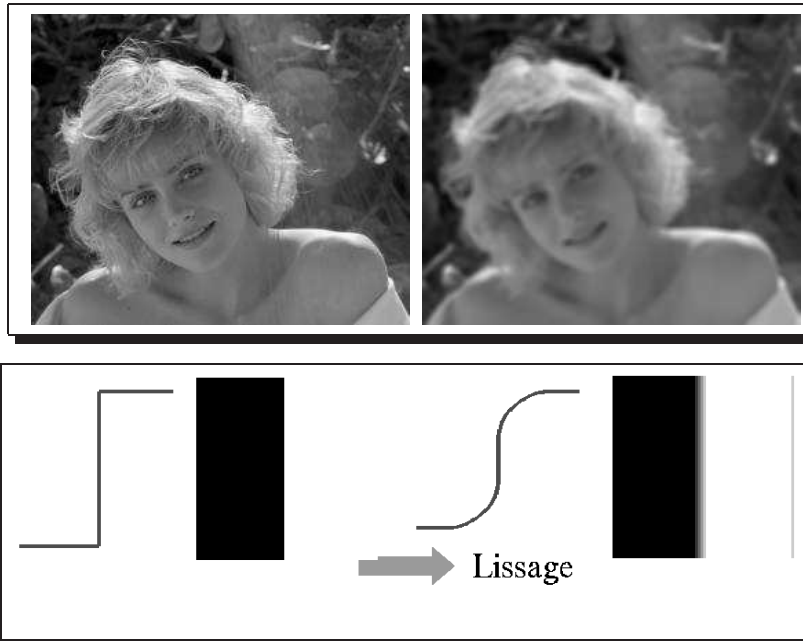
FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

$1/9 *$	1	1	1
	1	1	1
	1	1	1
<i>Filtre 3x3</i>			

$1/25 *$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
<i>Filtre 5x5</i>				

Exemple

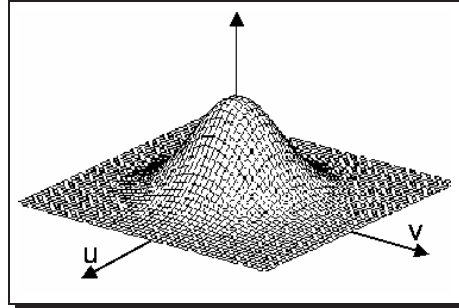


► **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 (1/16) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (1/4) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 * \begin{array}{c}
 (1/4) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{c}
 (1/16) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (1/4) \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 * \begin{array}{c}
 (1/4) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 = \begin{array}{c}
 (1/16) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

FILTRAGE SPATIALE

AUTRES FILTRES PASSE-BAS

Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$. Le filtre 2D est

$\frac{1}{256}$	1	4	6	4	1
	4	16	24	16	4
	6	24	36	24	6
	4	16	24	16	4
	1	4	6	4	1

Filtre Pyramidal

$\frac{1}{81}$	1	2	3	2	1
	2	4	6	4	2
	3	6	9	6	3
	2	4	6	4	2
	1	2	3	2	1

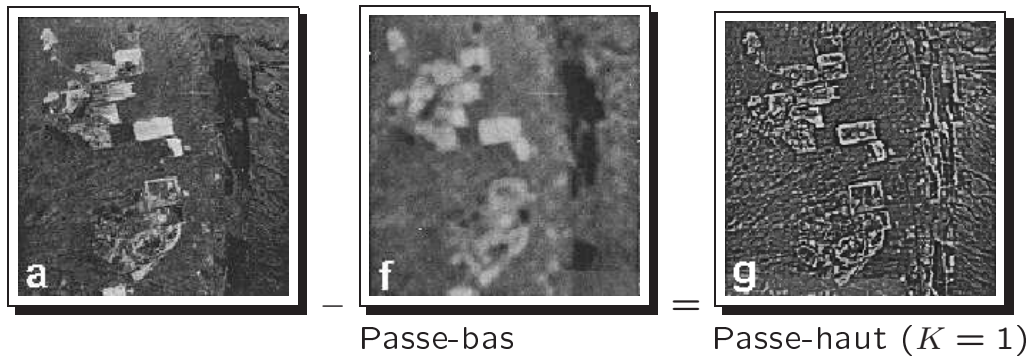
Filtre Conique

$\frac{1}{25}$	0	0	1	0	0
	0	2	2	2	0
	1	2	5	2	1
	0	2	2	2	0
	0	0	1	0	0

FILTRAGE SPATIALE

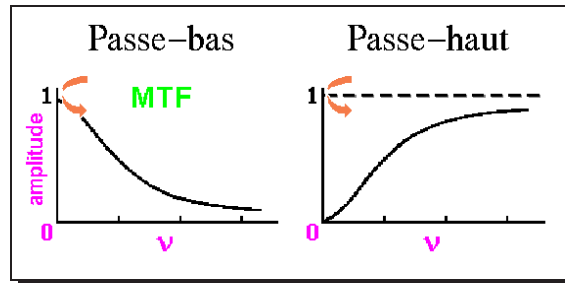
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"



High boost = $K(\text{original}) - \text{Passe-bas}(\text{original})$

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= Kf(x, y) - f(x, y) * h(x, y) \\
 &= (K - 1)f(x, y) + (f(x, y) * \delta(x, y)) - f(x, y) * h(x, y) \\
 &= (K - 1)f(x, y) + f(x, y) * (\delta(x, y) - h(x, y)) \\
 &\quad \downarrow \mathcal{F} \\
 G(u, v) &= (K - 1)F(u, v) + F(u, v) \underbrace{[1 - H(u, v)]}_{\text{Passe-haut}}
 \end{aligned}$$



- $K = 1$ Passe-haut
- $K > 1$ Rehaussement de Contour

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3×3 -

$$\delta(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Filtre 5×5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

Détection de Point

Convolution avec

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	- 1	-1

- Grande valeur positive ► point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ► point noir sur fond blanc

- Exemple -

5	5	5	5	5	*	-1	-1	-1	=	0	0	-95	-95	-95
5	5	5	100	5		-1	8	-1		0	0	-95	760	-95
5	5	5	5	5		-1	- 1	-1		0	0	-95	-95	-95

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

Le Gradient

- Soit $f(x, y)$, alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

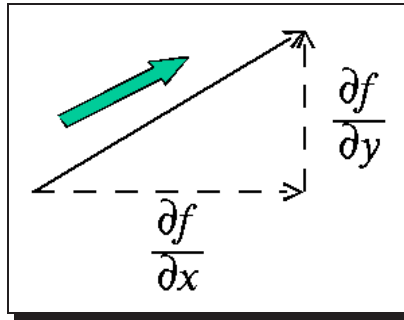
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

Approximation du Gradient (en x)

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1 \blacktriangleright$ Masque de convolution $\blacktriangleright$

1	-1
---	----

 ou

-1	1
----	---

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1 \blacktriangleright$ Masque de convolution $\blacktriangleright$

1	0	-1
---	---	----

Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution $\blacktriangleright$

1
-1

 ou

-1
1

 ou

-1
0
1

 ou

1
0
-1

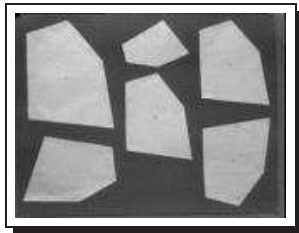
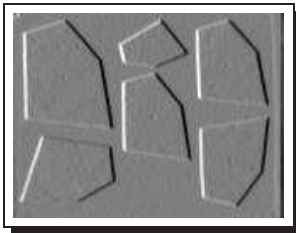
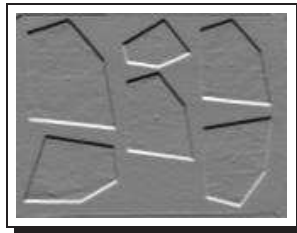


Image original



Gradient en x



Gradient en y

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x-1, y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x-1, y) - f(x, y-1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

1	0
0	-1

 et

0	1
-1	0

► Sensible au bruit

Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

 et

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

1
1
1

-1	0	1
----	---	---

 et

-1
0
1

1	1	1
---	---	---

Filtre Gaussien + Gradient = Filtre de Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

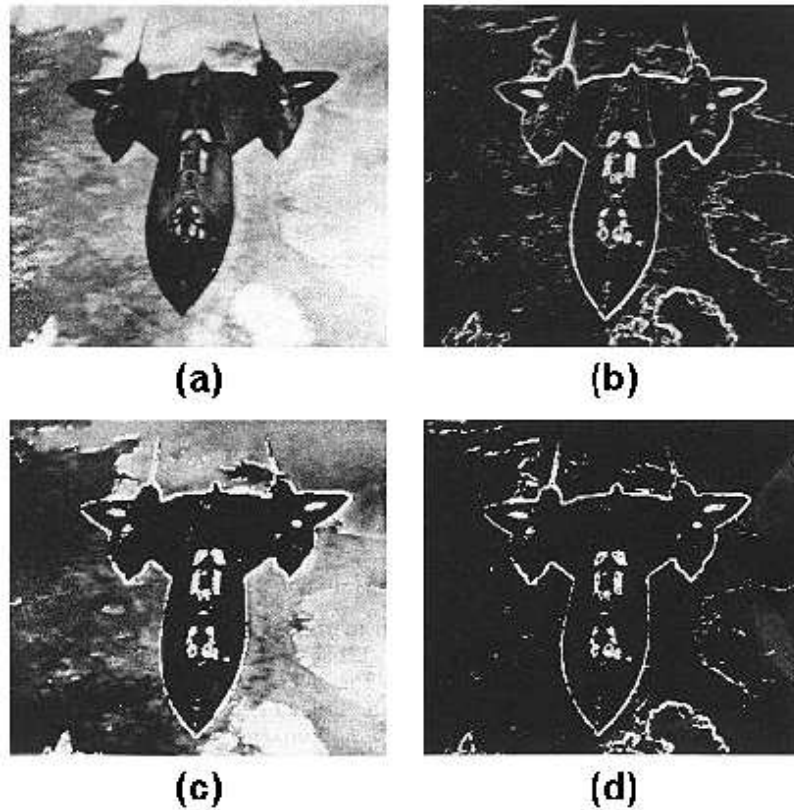
 et

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

Exemple

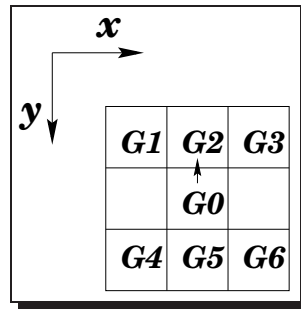


- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient $> 10\%I_{max}(= 25)$ ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient $< 25\%I_{max}$ ont été mis à 0 (image binaire)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

Décision Contour



- G_0 contour si $|G_0| > \text{seuil}$
- G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$ ou G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$
- **Seuillage par hystérésis**

On définit deux seuils S_b (seuil bas) et S_h (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= f''(x, y) = f'(x+1, y) - f'(x, y) \\ &= [f(x+1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x-1, y)] \\ &= f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y)\end{aligned}$$

Convolution avec le masque ►

1	-2	1
---	----	---

- Par convolution répétée -

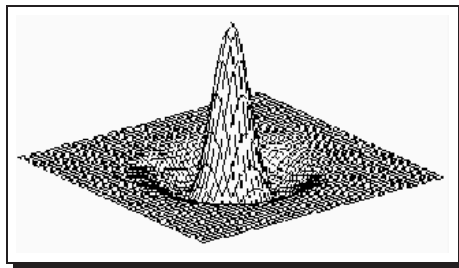
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad \blacktriangleright \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

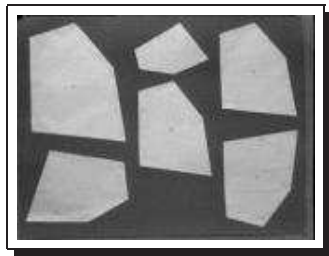
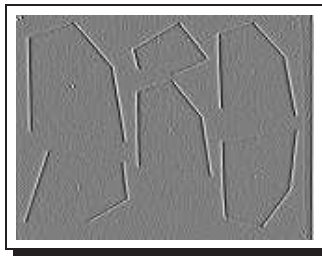
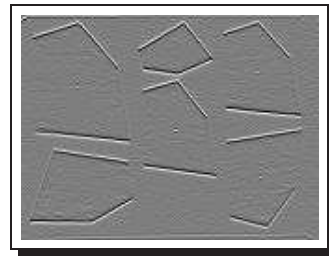


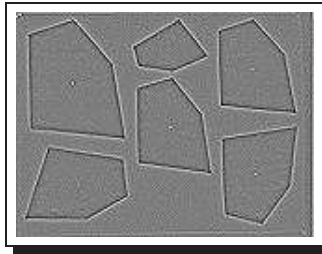
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

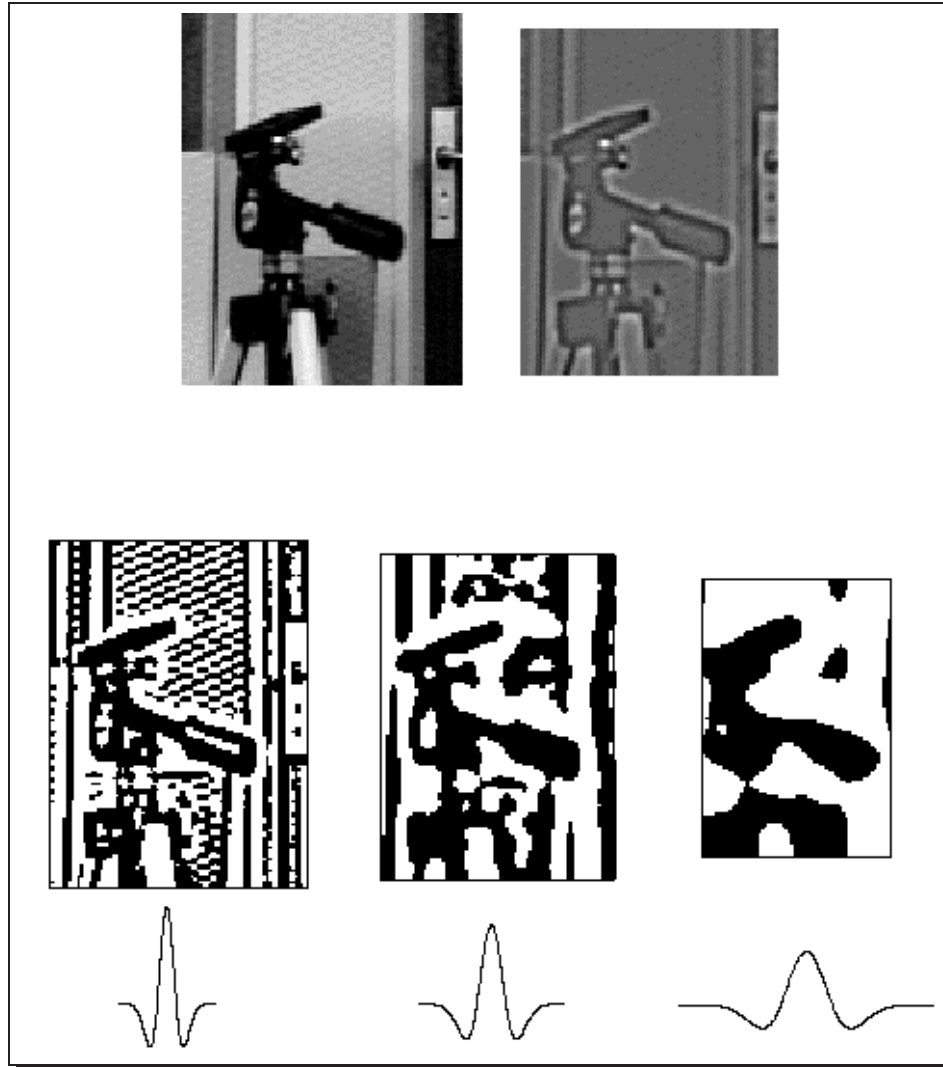
Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

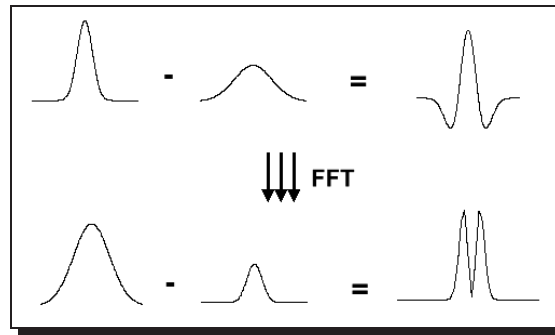
1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée



FILTRAGE SPATIALE

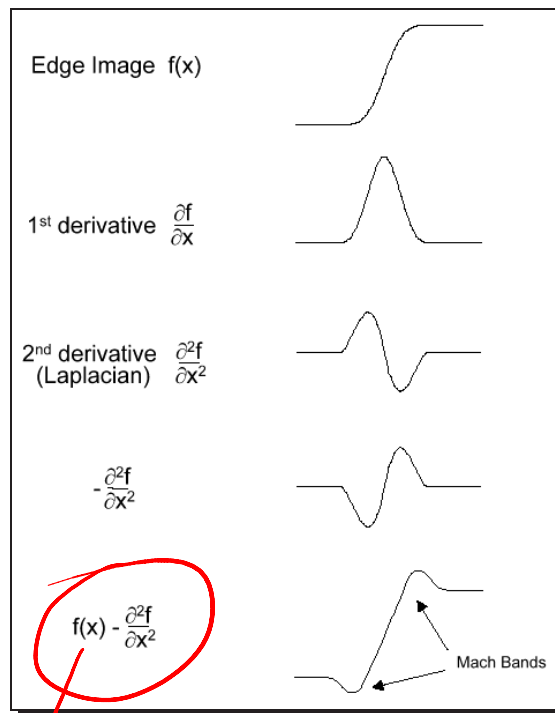
FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth $\approx$ Différence de deux Gaussienne



► Filtre Passe-bande

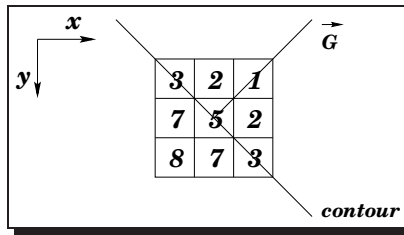
Rehaussement des contours avec le Laplacien



FILTRAGE SPATIALE

EXERCICE

Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en $x \rightarrow$

-1	0	1
----	---	---

-1
0
1

on trouve, pour le pixel du milieu $G_y = -5$ et $G_x = 5$.

Donc, $|\vec{G}| = 10$ et $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur de convolution

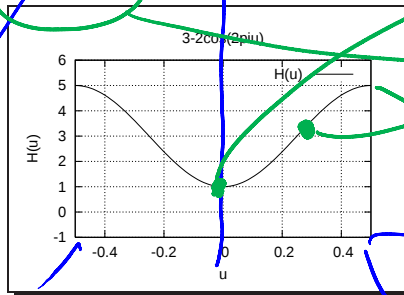
1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

Filtre séparable $\rightarrow$

-1
3
-1

$$H(u) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x)$$

$$= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2 \cos(2\pi u)$$



21

$$\Delta(x) * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \Delta(x) * \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Delta(x) * \left(\delta(x) - \frac{d^2}{dx^2} \delta(x) \right)$$

$$\rightarrow \Delta(x) - \frac{d^2 \Delta(x)}{dx^2}$$