



TRAITEMENT DU SIGNAL FILTRAGE SPATIAL

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

FILTRAGE SPATIALE

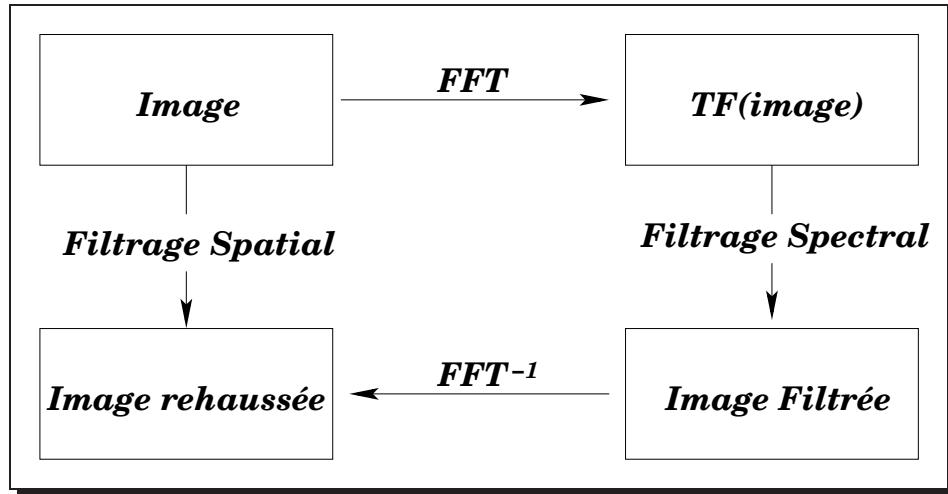
SOMMAIRE

Introduction	2
Convolution Discrète 2D -Rappel-	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas)	6
Filtre Gaussien (Passe-bas)	7
Autres Filtres Passe-bas	8
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique-	9
Filtre Passe-haut -Gradient-	12
Filtre Passe-haut -Laplacien-	17
Filtre de Marr-Hildreth	19
Exercices	21

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION (1)

Principe de Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

$$\begin{aligned} f(x, y) * g(x, y) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} F(u, \nu) \cdot G(u, \nu) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} F(u, \nu) * G(u, \nu) \end{aligned}$$

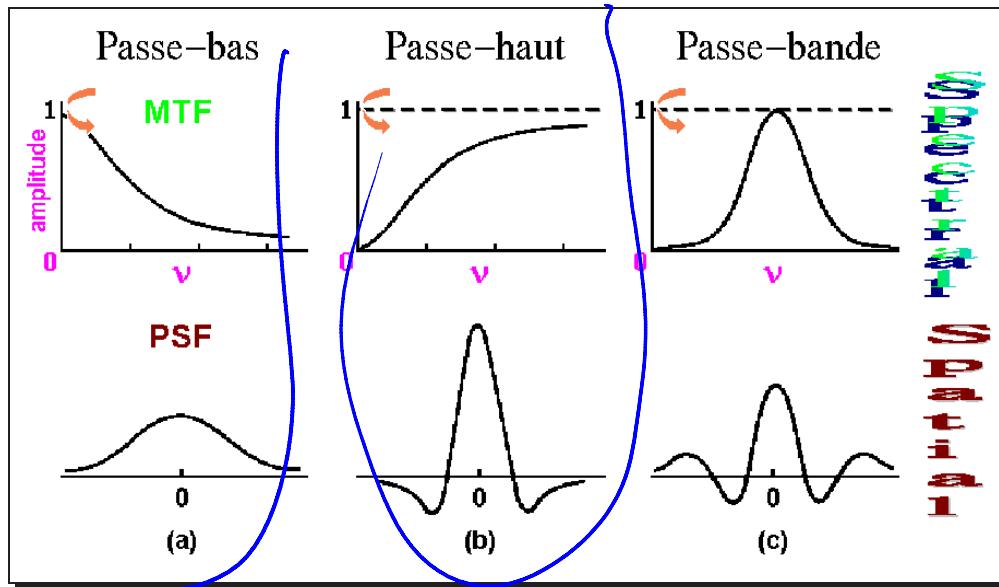
donc, si $f(x, y)$ est l'image à filtrer (ou à rehausser) et $g(x, y)$, le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{f(x, y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION (2)

Trois Types de Filtrage



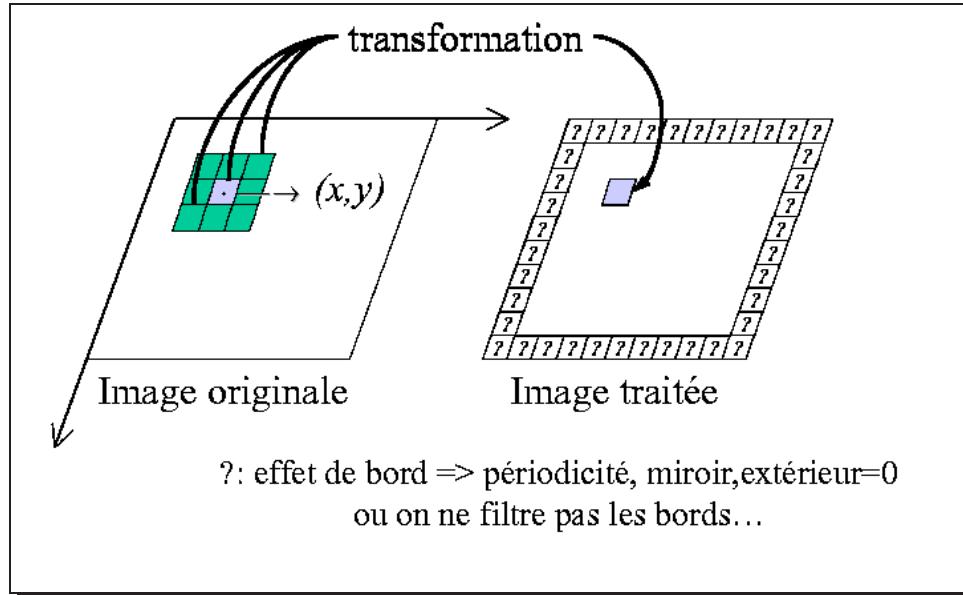
- **PSF** : Point Spread Function
(ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function
(ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

FILTRAGE SPATIALE

CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (1)

Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point (x, y)



Exemple

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & 16 & 0 & 16 & \\ \hline & 16 & 16 & 16 & \\ \hline & 16 & 16 & 16 & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \quad * (1/16) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline 4 & 11 & 14 & 11 & 4 & \\ \hline 3 & 9 & 12 & 9 & 3 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

FILTRAGE SPATIALE

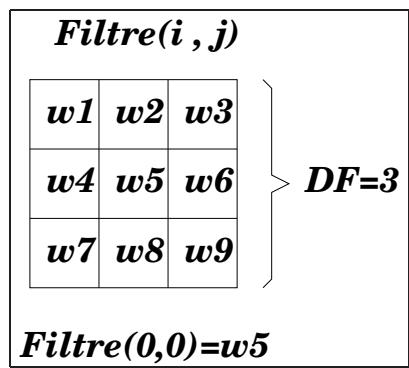
CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (2)

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

Remarque

- Généralement le masque est de dimension (DF) impair et symétrique et dans ce cas

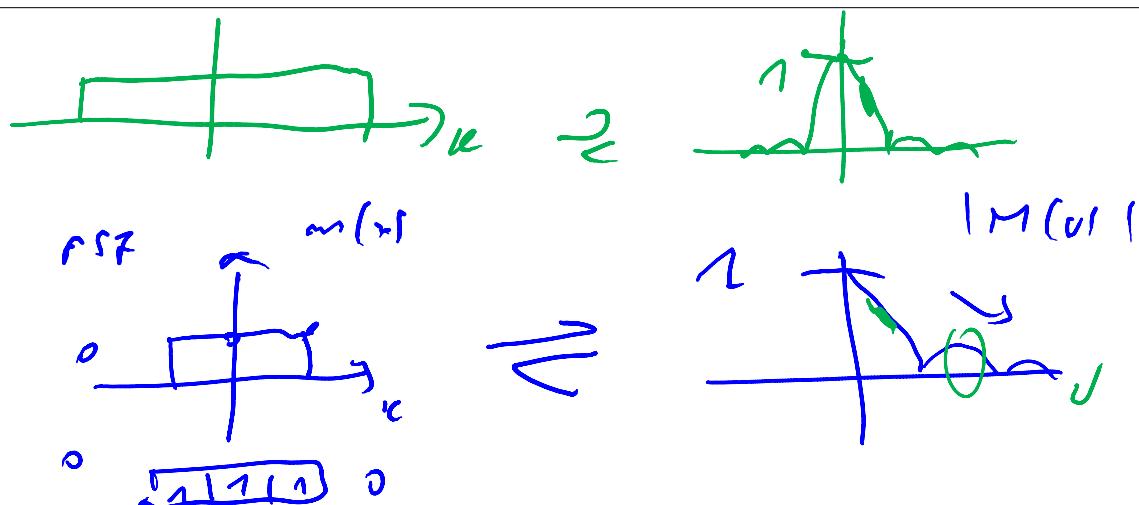
$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x + i, y + j) \text{filtre}(i, j)$$



$$\begin{aligned} g(x, y) &= w_1 f(x - 1, y - 1) + w_2 f(x, y - 1) + w_3 f(x + 1, y - 1) \\ &+ w_4 f(x - 1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x + 1, y) \\ &+ w_7 f(x - 1, y + 1) + w_8 f(x, y + 1) + w_9 f(x + 1, y + 1) \end{aligned}$$

- Afin de conserver la moyenne de l'image $f(x, y)$, la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e., $\sum_i w_i = 1$)

5

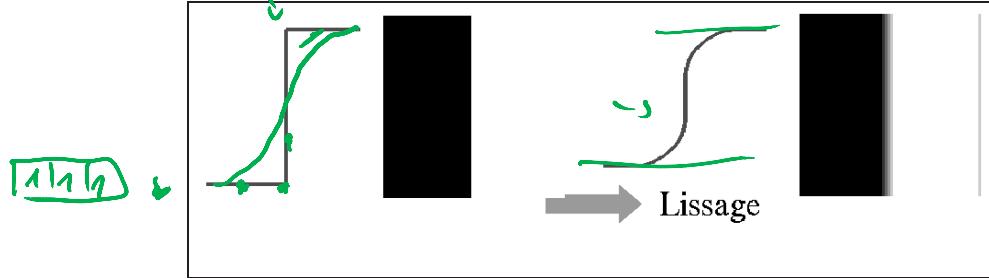


FILTRAGE SPATIALE

FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

$1/9 *$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$1/25 *$ <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1																																	
1	1	1																																	
1	1	1																																	
1	1	1	1	1																															
1	1	1	1	1																															
1	1	1	1	1																															
1	1	1	1	1																															
1	1	1	1	1																															
<i>Filtre 3x3</i>	<i>Filtre 5x5</i>																																		

Exemple



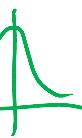
- Filtre Passe-bas : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

$$e^{-\pi x^2} \geq e^{-\pi V^2}$$

$$f(ax) \geq \left(\frac{1}{|a|}\right) f\left(\frac{x}{|a|}\right)$$

FILTRAGE SPATIALE FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

PSF



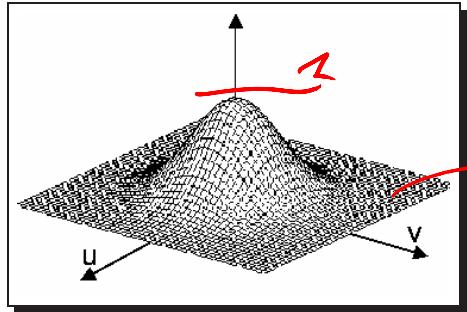
\geq

$$\frac{x^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{y^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}$$

$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$



$$\sigma^2 \exp(-\pi(u^2 + v^2)/\sigma^2)$$

(1/16)	1	2	1
1	4	2	
1	2	1	

\times

(1/4)	1	1
1	1	

$=$

(1/16)	1	2	1
1	4	2	
1	2	1	

\times

(1/4)	1	2	1
2	4	2	
1	2	1	

$=$

(1/16)	1	2	1
2	4	2	
1	2	1	

FILTRAGE SPATIALE AUTRES FILTRES PASSE-BAS

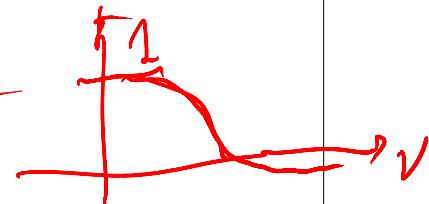
Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binôme de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$. Le filtre 2D est

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \end{matrix}$$

$$\star \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$\frac{1}{256}$	1	4	6	4	1
	4	16	24	16	4
	6	24	36	24	6
	4	16	24	16	4
	1	4	6	4	1



$\approx (\sin \pi / 2)^2$

Filtre Pyramidal

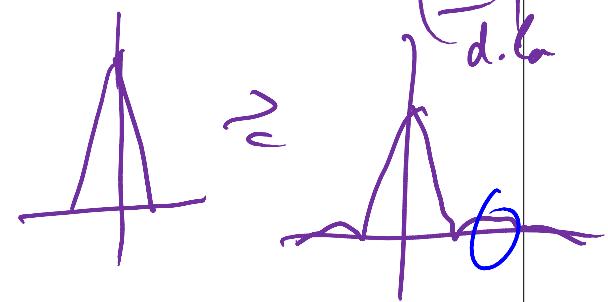
$\frac{1}{81}$	1	2	3	2	1
	2	4	6	4	2
	3	6	9	6	3
	2	4	6	4	2
	1	2	3	2	1



$\approx (\sin \pi / 4)^2$

Filtre Conique

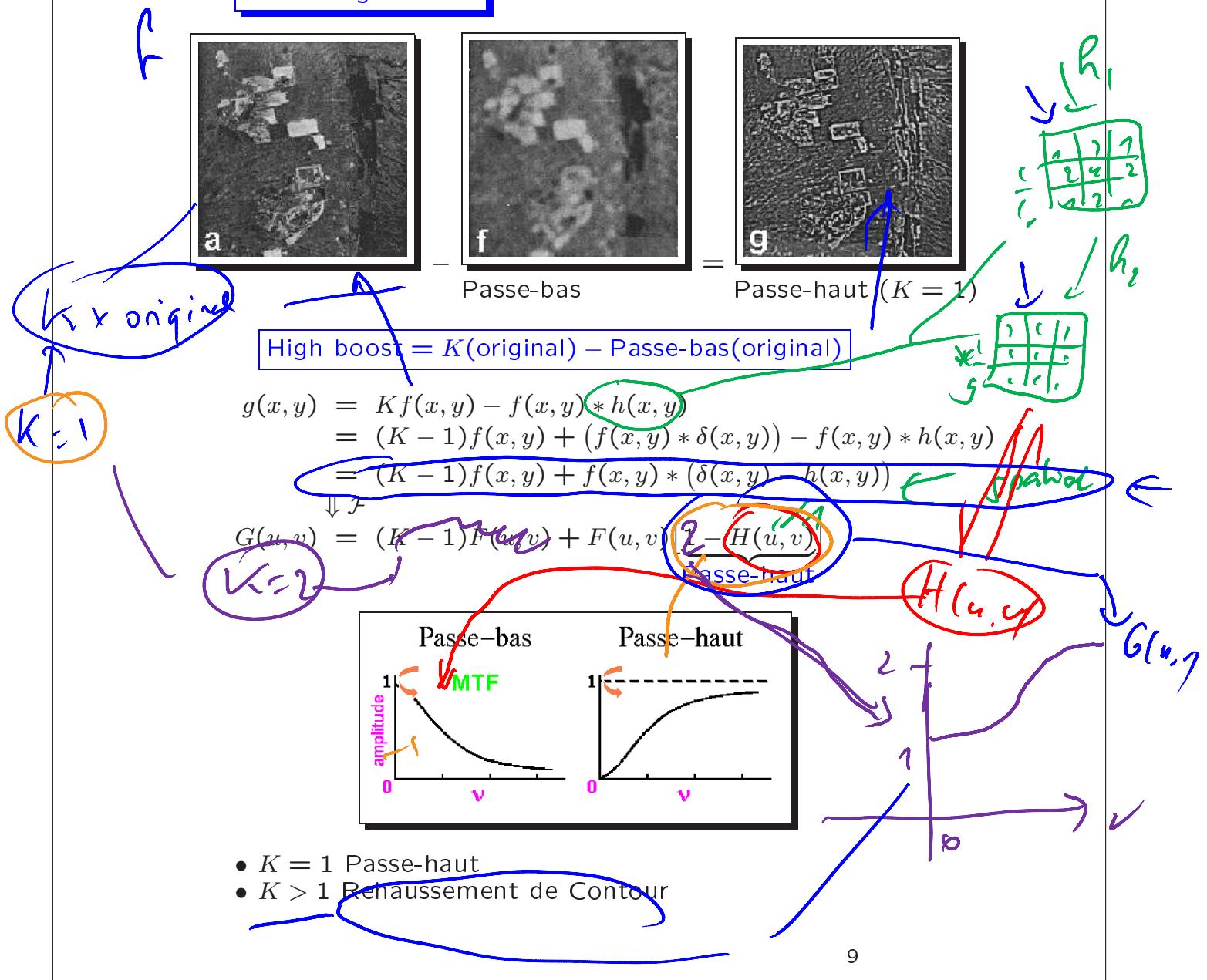
$\frac{1}{25}$	0	0	1	0	0
	0	2	2	2	0
	1	2	5	2	1
	0	2	2	2	0
	0	0	1	0	0



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"



$$\iint \delta(x,y) dx dy = 1 \quad I(x,y) * \delta(x,y) = I(x,y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \delta(x,y) = \boxed{I}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT - OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3×3 -

$$\delta(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

filtrage
masquage
PSF

- Filtre 5×5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

FAT

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

Détection de Point

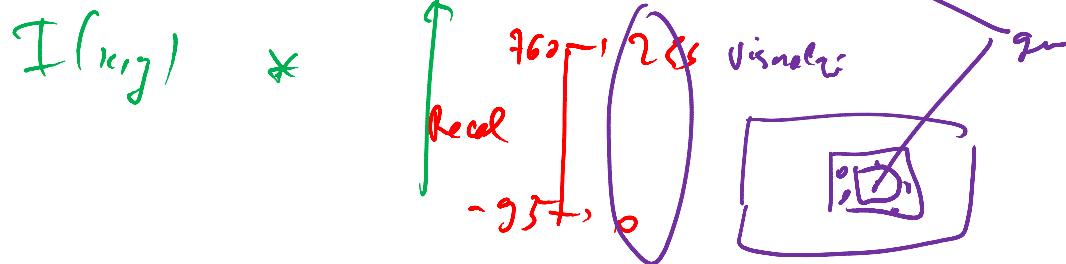
Convolution avec

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

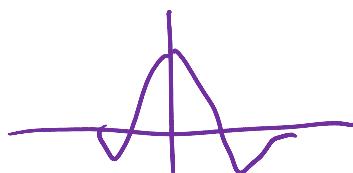
- Grande valeur positive → point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative → point noir sur fond blanc

- Exemple -

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 100 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & 760 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \end{bmatrix}$$



PSF



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

$$z = f(x, y)$$

Le Gradient

- Soit $f(x, y)$, alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

modul du gradient

- Magnitude du Gradient

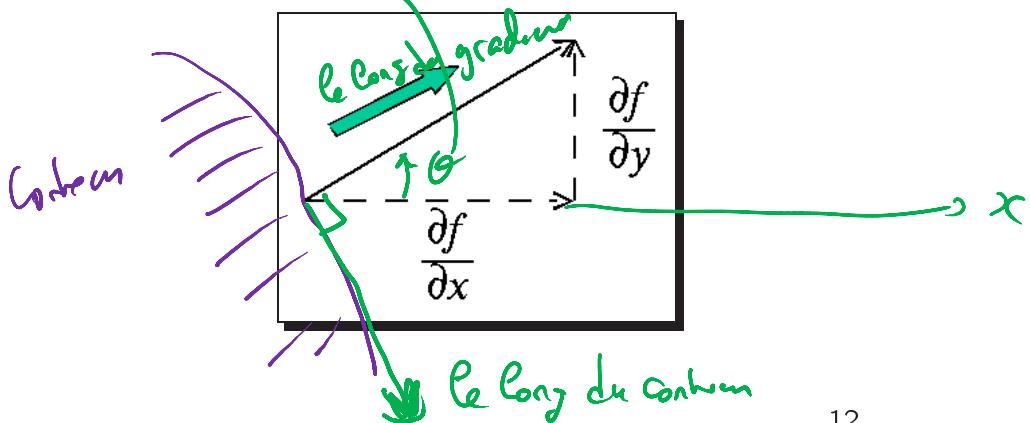
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan \left(\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x} \right)$$



FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

total

total

Approximation du Gradient (en x)

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1 \blacktriangleright$ Masque de convolution \blacktriangleright

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1 \blacktriangleright$ Masque de convolution \blacktriangleright

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution \blacktriangleright

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

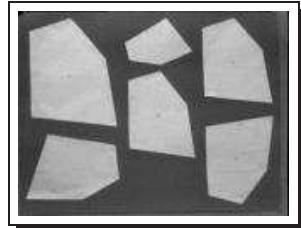
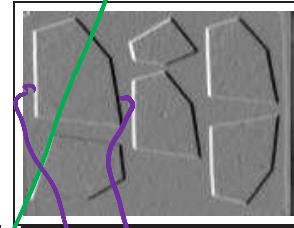
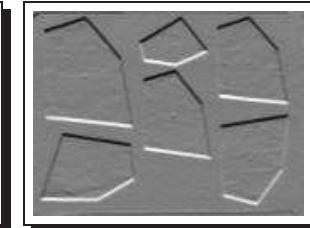


Image original



Gradient en x



Gradient en y

$$i_{(x,y)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 251 - 60$$

real

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

13

7

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x - 1, y - 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x - 1, y) - f(x, y - 1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

1	0
0	-1

et

0	1
-1	0

► Sensible au bruit

Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

et

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

1			Gx
1	-1	0	1
1			

et

-1			
0			
1	1	1	1

Filtre Gaussien + Gradient = Filtre de Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

et

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

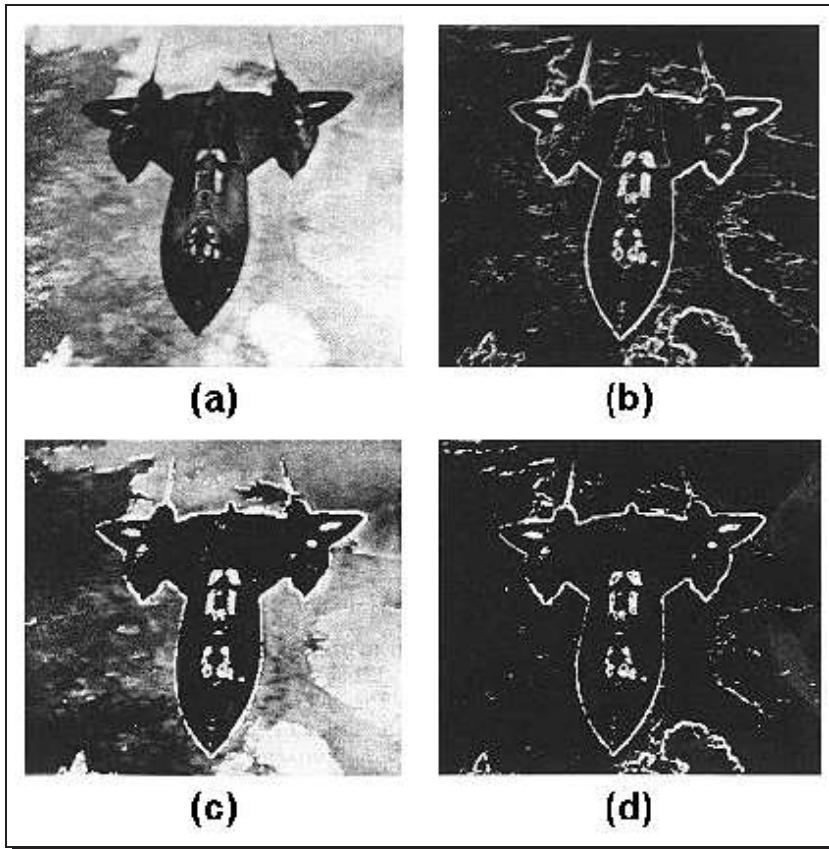
g_{xx}

1	2	1
2	4	2
1	2	1

1	-1	0	1
2	-2	0	2
1	-1	0	1

FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

Exemple

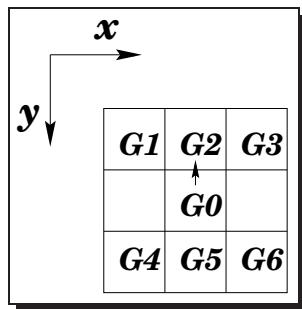


- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient $> 10\% I_{max}$ ($= 25$) ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient $< 25\% I_{max}$ ont été mis à 0 (image binaire)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

Décision Contour



- G_0 contour si $|G_0| >$ seuil

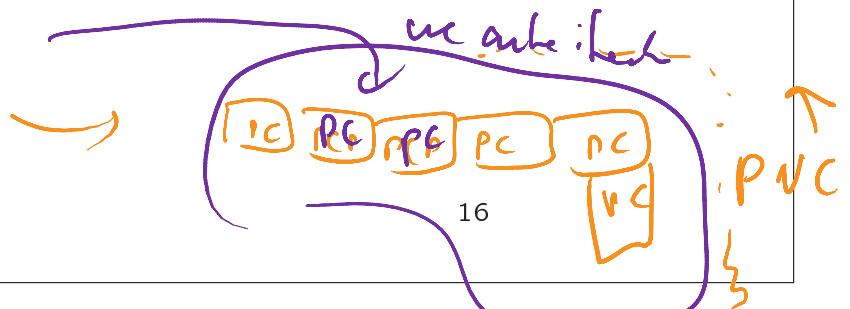
- G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$ ou G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$

- Seuillage par hystéresis

On définit deux seuils S_b (seuil bas) et S_h (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

Dérivée seconde

- Formule des différences finies -

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= f''(x, y) = f'(x+1, y) - f'(x, y) \\ &= [f(x+1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x-1, y)] \\ &= f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y)\end{aligned}$$

Convolution avec le masque $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

- Par convolution répétée -

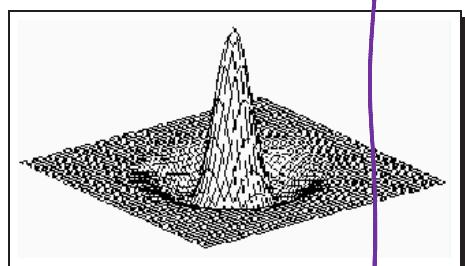
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



17

$$f(x) * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow R(x)$

$\downarrow \frac{R(x)}{x}$

$* \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow \frac{xR(x)}{x^2}$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$

FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

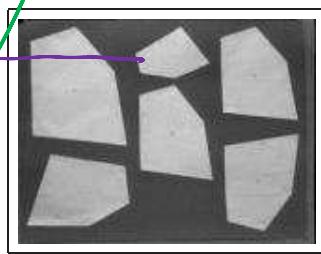
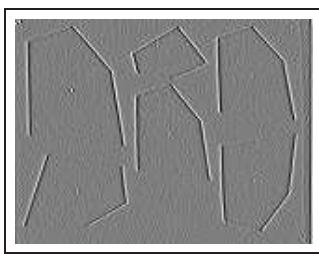
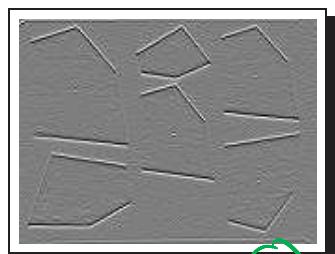


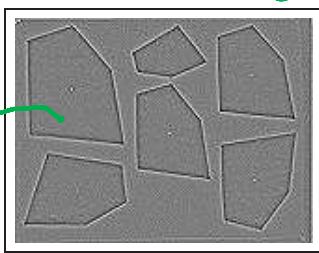
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

derivée scalaire
en $i(x,y)$

1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée

$$i(x,y)$$

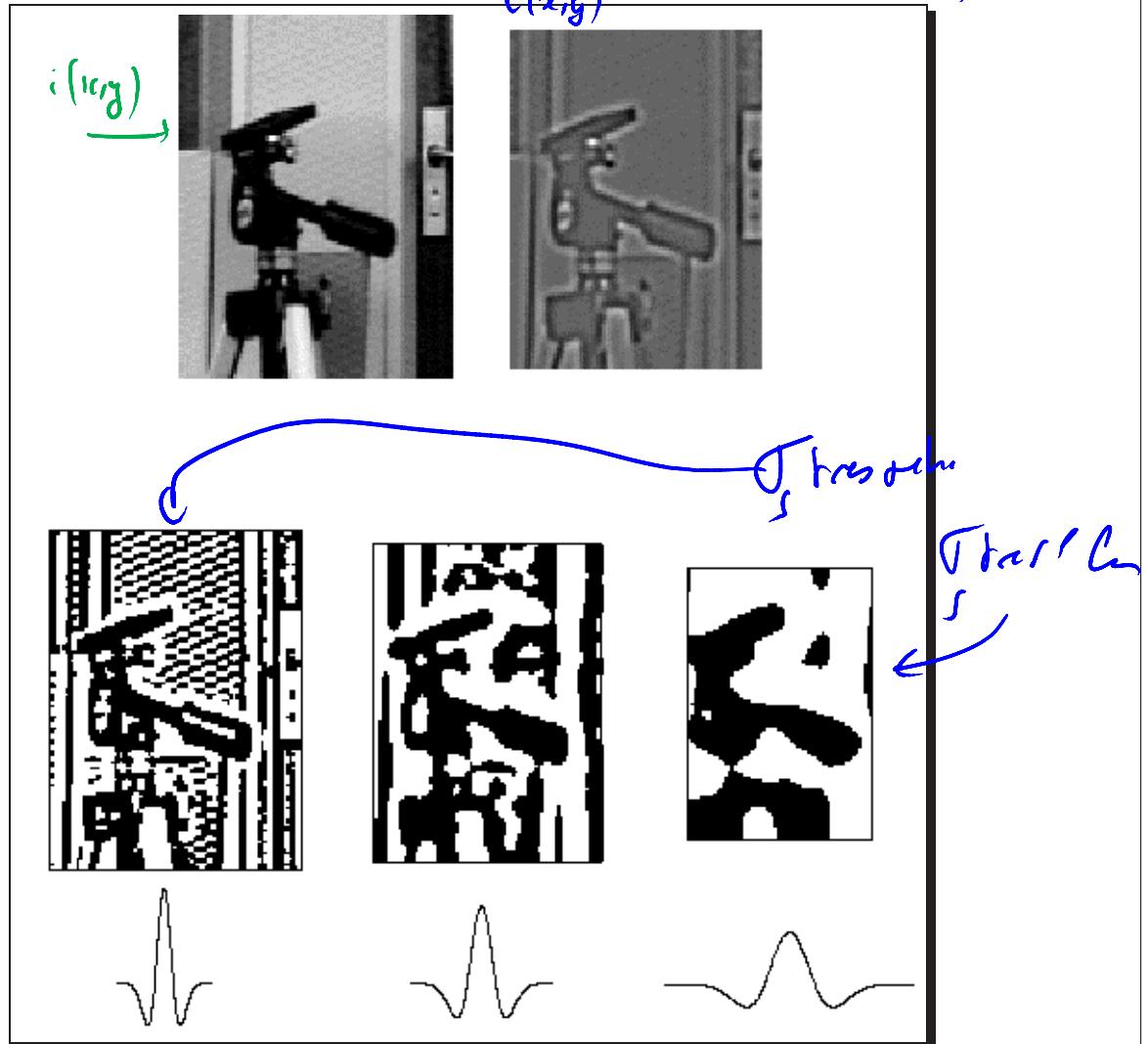
$$g(x,y)$$

$$\rho(x,y)$$

$$i(x,y) \geq I(u,v)$$

$$g(x,y) \geq G(u,v)$$

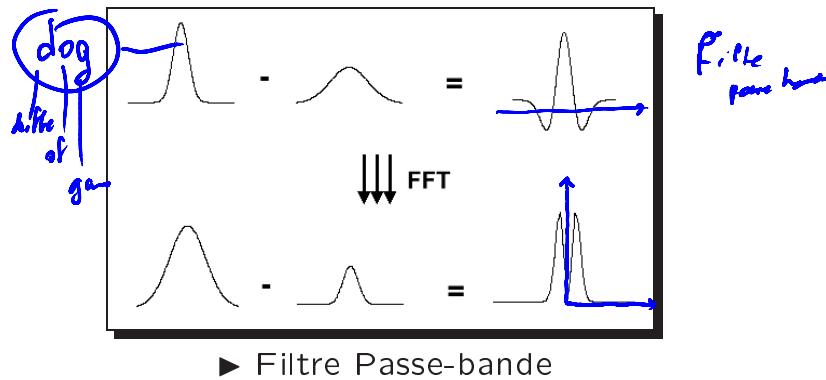
$$\rho(x,y) \geq L(u,v)$$



FILTRAGE SPATIALE

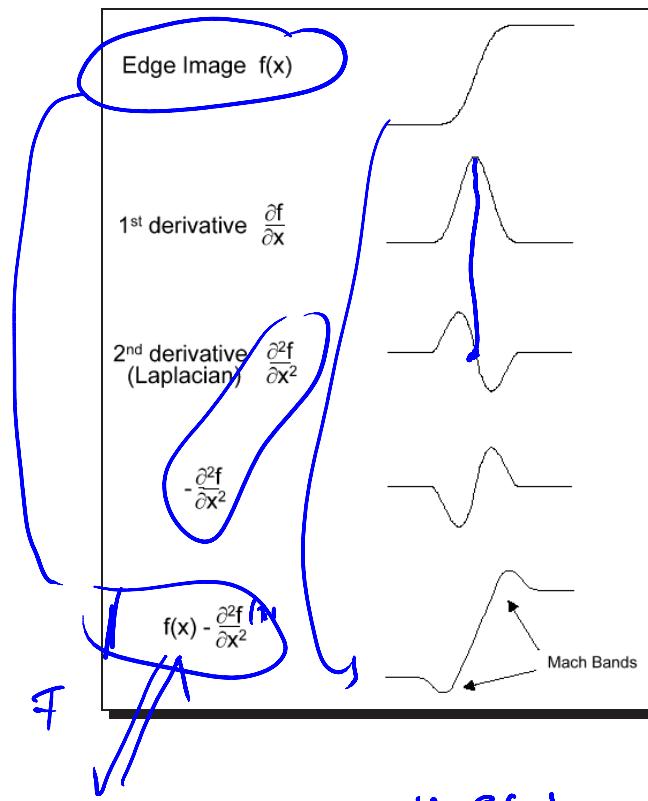
FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth \approx Différence de deux Gaussienne



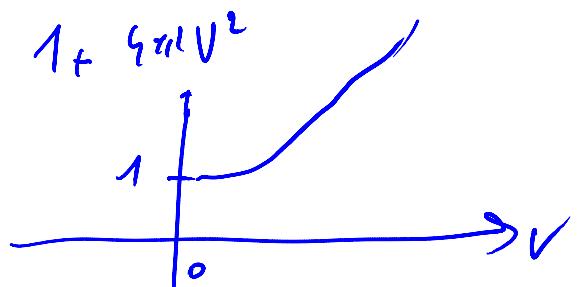
► Filtre Passe-bande

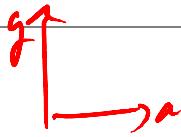
Rehaussement des contours avec le Laplacien



20

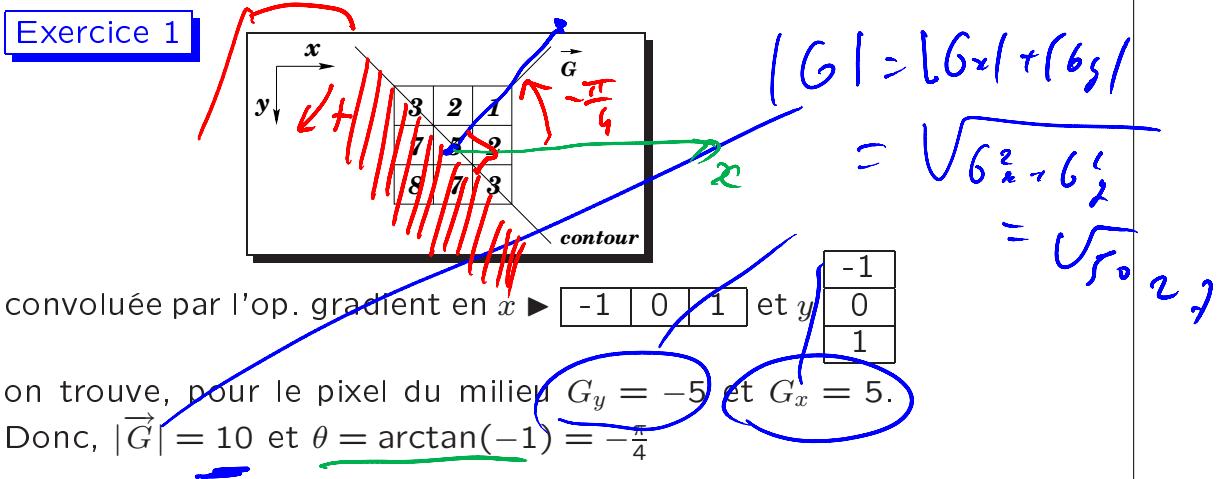
$$\begin{aligned} F(v) &= (e^{2\pi j v})^2 f(v) \\ &= f(v) \cdot [1 - (2\pi j v)^2] \end{aligned}$$





FILTRAGE SPATIALE EXERCICE

Exercice 1



Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur

de convolution

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre séparable \rightarrow

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [-1 \ 3 \ -1]$$

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x) \\ &= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2 \cos(2\pi u) \end{aligned}$$

