



DIRO  
IFT 3205

# TRAITEMENT DU SIGNAL

## FILTRAGE SPATIAL

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

# FILTRAGE SPATIALE

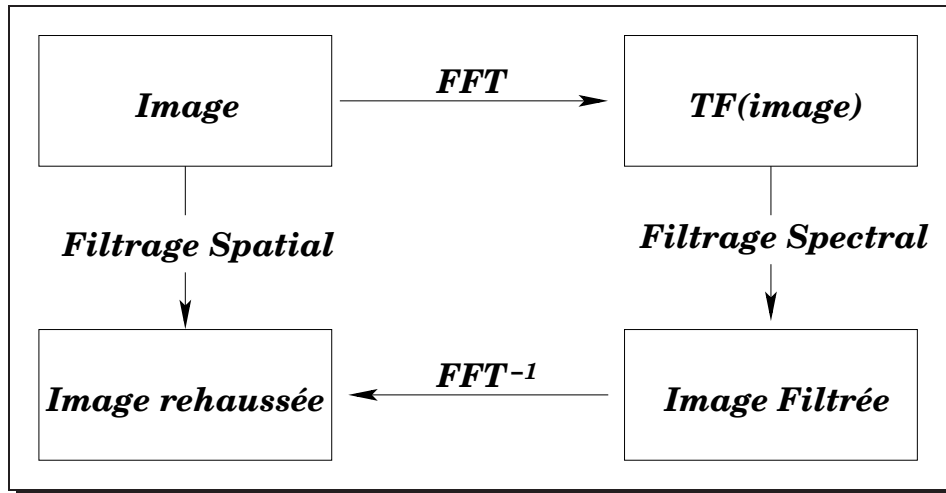
## SOMMAIRE

Introduction .....	2
Convolution Discrète 2D -Rappel- .....	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas) .....	6
Filtre Gaussien (Passe-bas) .....	7
Autres Filtres Passe-bas .....	8
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique- .....	9
Filtre Passe-haut -Gradient- .....	12
Filtre Passe-haut -Laplacien- .....	17
Filtre de Marr-Hildreth .....	19
Exercices .....	21

# FILTRAGE SPATIALE

## INTRODUCTION (1)

### Principe de Filtrage Spatial/Fréquentiel



### Théorème de Convolution -Rappel-

$$f(x, y) * g(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u, \nu) \cdot G(u, \nu)$$
$$f(x, y) \cdot g(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u, \nu) * G(u, \nu)$$

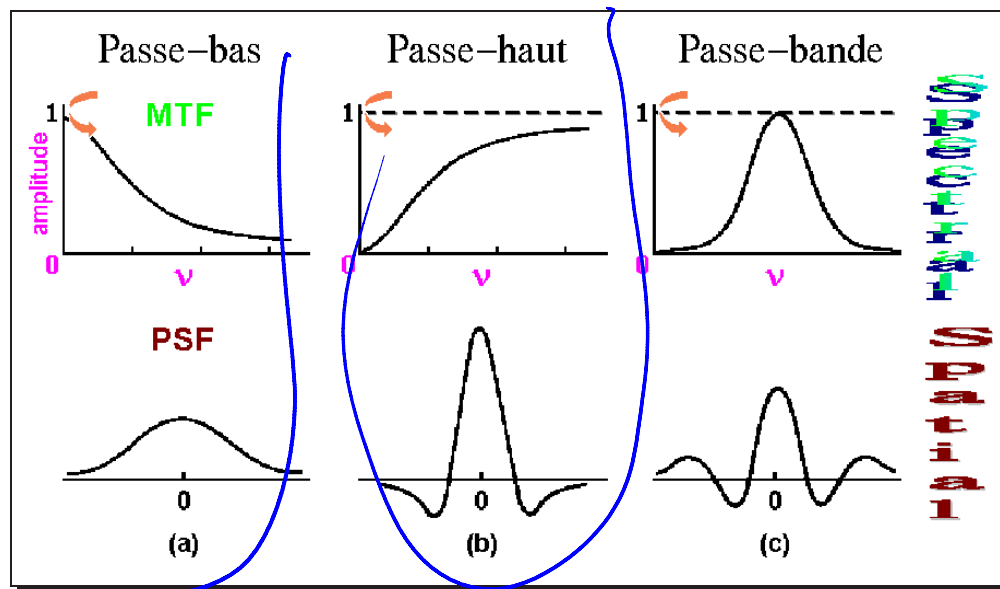
donc, si  $f(x, y)$  est l'image à filtrer (ou à rehausser) et  $g(x, y)$ , le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{f(x, y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

# FILTRAGE SPATIAL

## INTRODUCTION (2)

### Trois Types de Filtrage



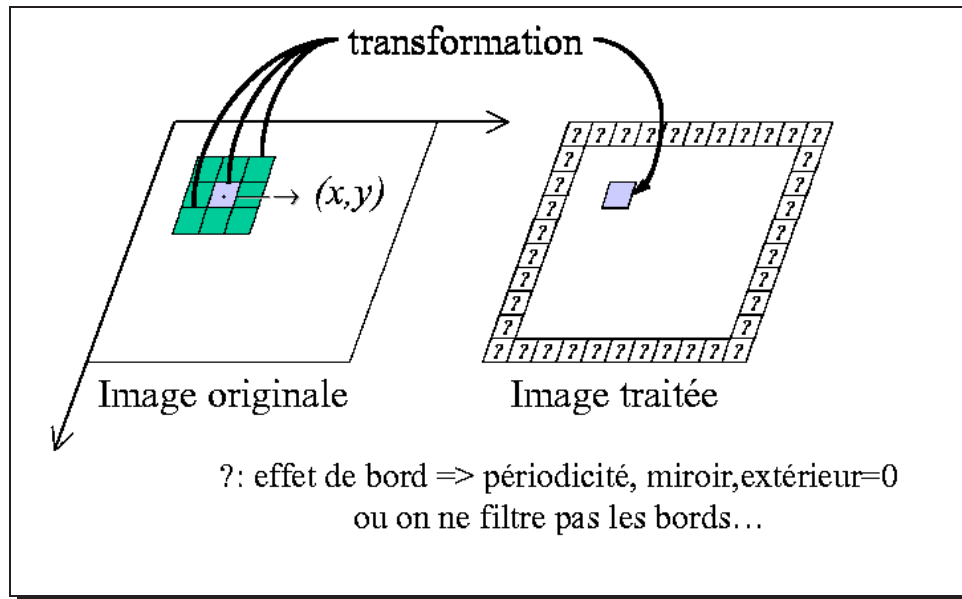
- **PSF** : Point Spread Function  
(ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function  
(ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

# FILTRAGE SPATIALE

## CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (1)

### Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point  $(x, y)$



### Exemple

		16	0	16		
		16	16	16		
		16	16	16		

$\ast (1/16)$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

=

		1	2	2	2	1
		3	7	8	7	3
		4	11	14	11	4
		3	9	12	9	3
		1	3	4	3	1

# FILTRAGE SPATIALE

## CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (2)

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

### Remarque

- Généralement le masque est de dimension ( $DF$ ) impair et symétrique et dans ce cas

$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x + i, y + j) \text{filtre}(i, j)$$

<b><i>Filtre(i, j)</i></b>		
<b><i>w1</i></b>	<b><i>w2</i></b>	<b><i>w3</i></b>
<b><i>w4</i></b>	<b><i>w5</i></b>	<b><i>w6</i></b>
<b><i>w7</i></b>	<b><i>w8</i></b>	<b><i>w9</i></b>

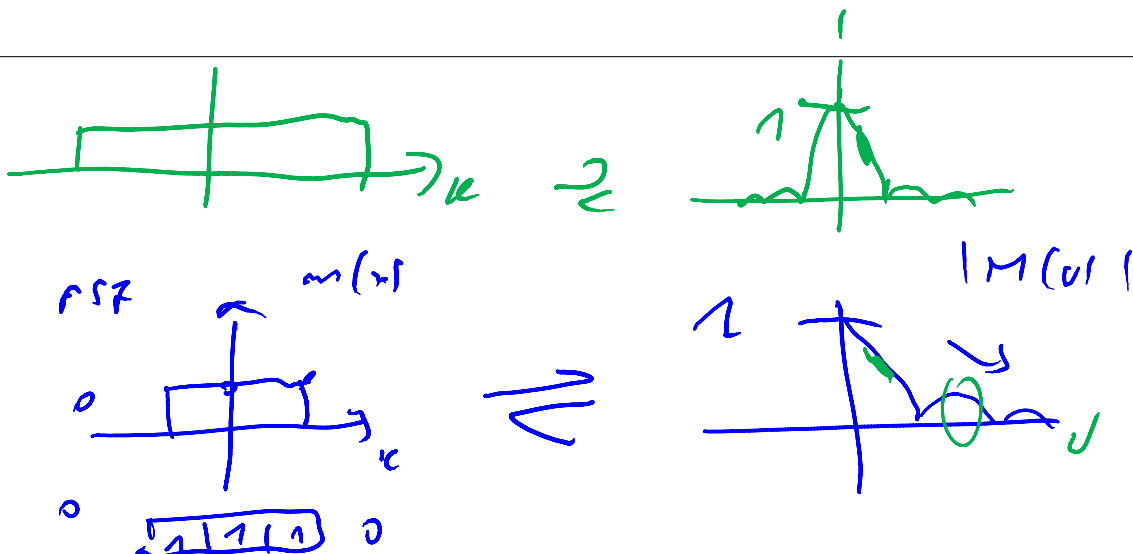
}
***DF=3***

***Filtre(0,0)=w5***

$$\begin{aligned}
 g(x, y) = & w_1 f(x - 1, y - 1) + w_2 f(x, y - 1) + w_3 f(x + 1, y - 1) \\
 & + w_4 f(x - 1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x + 1, y) \\
 & + w_7 f(x - 1, y + 1) + w_8 f(x, y + 1) + w_9 f(x + 1, y + 1)
 \end{aligned}$$

- Afin de conserver la moyenne de l'image  $f(x, y)$ , la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e.,  $\sum_i w_i = 1$ )

5

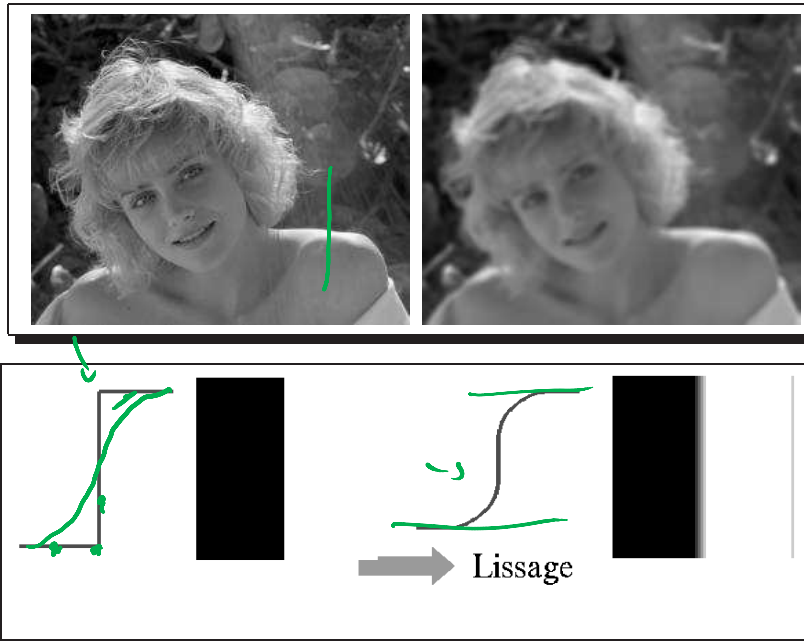


# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

$1/9 *$			$1/25 *$				
$1/9 *$			$1/25 *$				
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
<b>Filtre 3x3</b>			<b>Filtre 5x5</b>				

### Exemple

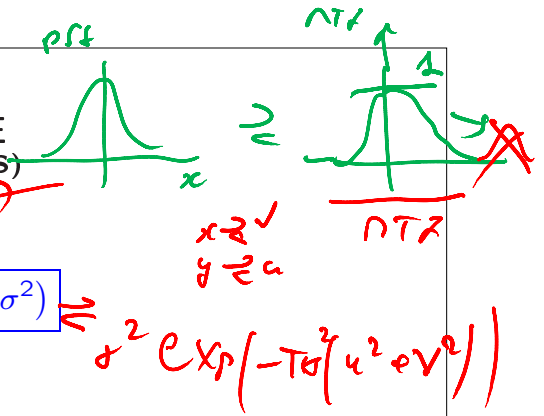


► Filtre Passe-bas : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

$$e^{-\pi x^2} \approx e^{-\pi v^2}$$

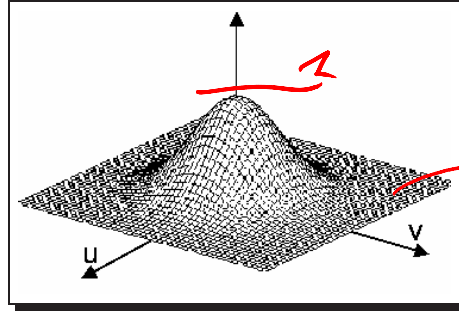
$$f(ax) \approx \left(\frac{1}{|a|}\right) f\left(\frac{v}{a}\right)$$

# FILTRAGE SPATIALE FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)



$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \exp(-\pi \sigma^2 (u^2 + v^2))$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}$$



# FILTRAGE SPATIALE

## AUTRES FILTRES PASSE-BAS

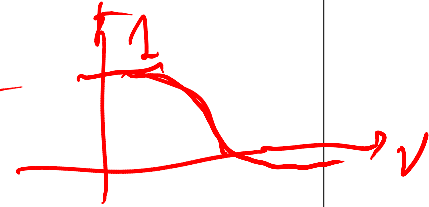
### Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur  $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ . Le filtre 2D est

1  
1 1  
1 2 1  
1 3 3 1  
1 4 6 4 1

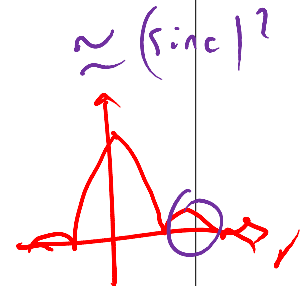
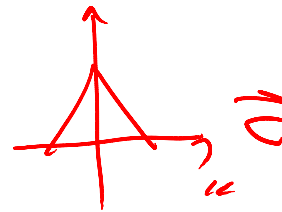
1  
4  
6  
4  
1

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1



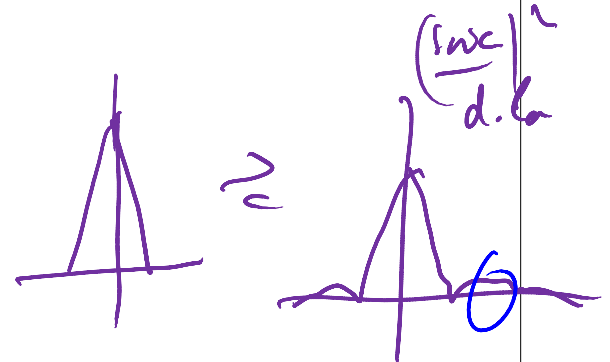
### Filtre Pyramidal

1	2	3	2	1
2	4	6	4	2
3	6	9	6	3
2	4	6	4	2
1	2	3	2	1



### Filtre Conique

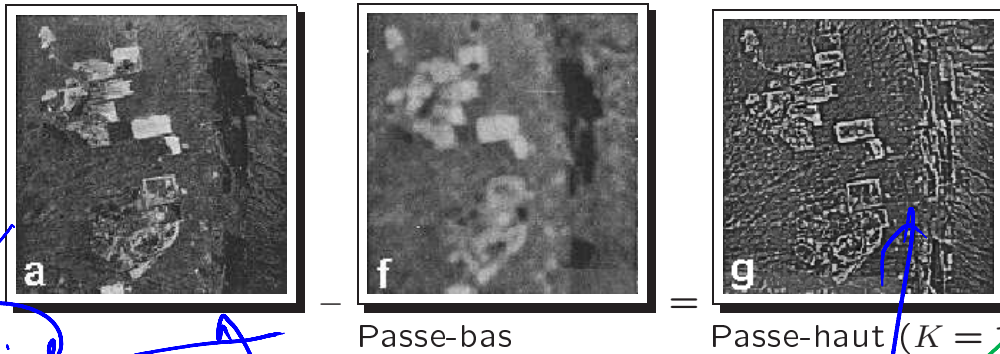
0	0	1	0	0
0	2	2	2	0
1	2	5	2	1
0	2	2	2	0
0	0	1	0	0



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"



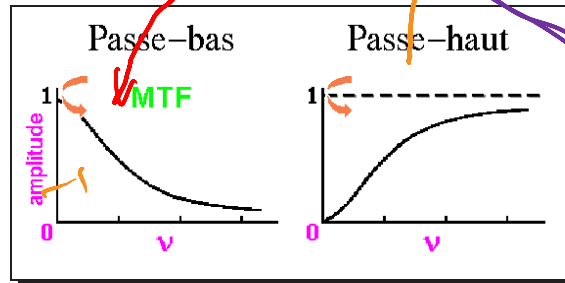
Passe-bas

Passe-haut ( $K = 1$ )

High boost =  $K(\text{original}) - \text{Passe-bas}(\text{original})$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= Kf(x, y) - f(x, y) * h(x, y) \\ &= (K - 1)f(x, y) + (f(x, y) * \delta(x, y)) - f(x, y) * h(x, y) \\ &= (K - 1)f(x, y) + f(x, y) * (\delta(x, y) - h(x, y)) \end{aligned}$$

$$G(u, v) = (K - 1)F(u, v) + F(u, v) [2 - H(u, v)]$$



- $K = 1$  Passe-haut
- $K > 1$  Renforcement de Contour

$$\iint \delta(x, y) dx dy = 1 \quad \mathcal{I}(\delta(x, y) * \delta(x, y)) = \mathcal{I}(\delta(x, y))$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \delta(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT - OP. MATHÉMATIQUE- (2)

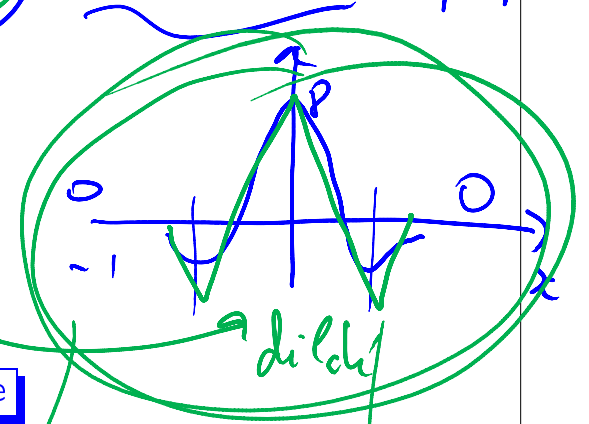
- Filtre 3 x 3 -

$$\delta(x,y) - h(x,y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Après masque PSF

- Filtre 5 x 5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



### Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

FAT

# FILTRAGE SPATIAL

## FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

### Détection de Point

Convolution avec

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

- Grande valeur positive ➤ point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ➤ point noir sur fond blanc

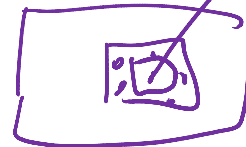
### - Exemple -

5	5	5	5	5		-1	-1	-1		0	0	-95	-95	-95
5	5	5	100	5	*	-1	8	-1	=	0	0	-95	760	-95
5	5	5	5	5		-1	-1	-1		0	0	-95	-95	-95

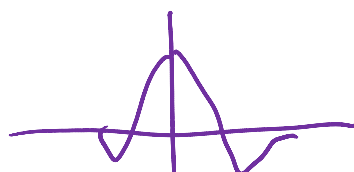
$I(x,y)$  \*

Real

960, 288 visualiz

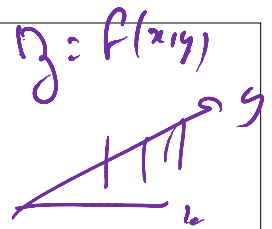


PSF



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)



### Le Gradient

- Soit  $f(x, y)$ , alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

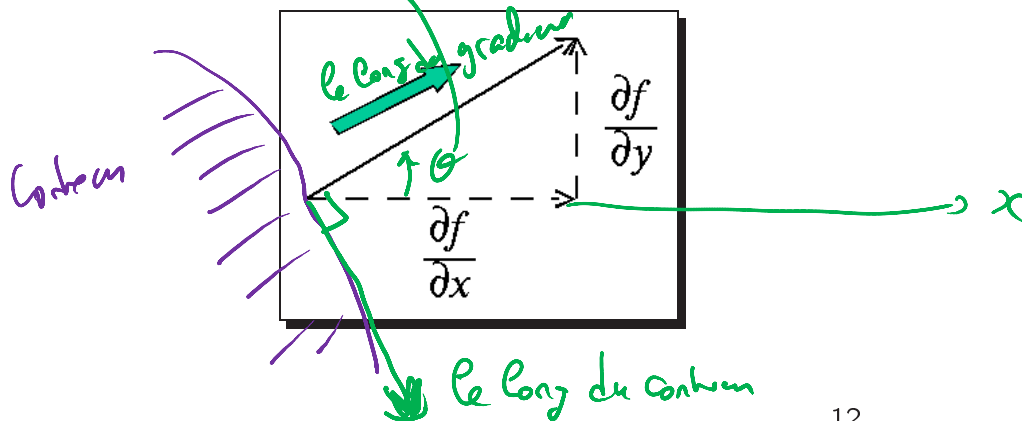
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x}\right)$$



autre

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

22

### Approximation du Gradient (en x)

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta x, y)}{\Delta x}$$

$\Delta x = 1 \rightarrow$  Masque de convolution  $\rightarrow$ 

1	-1
---	----

 ou 

-1	1
----	---

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}$$

$\Delta x = 1 \rightarrow$  Masque de convolution  $\rightarrow$ 

1	0	-1
---	---	----

### Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution  $\rightarrow$ 

1
-1

 ou 

-1
1

 ou 

-1
0
1

 ou 

1
0
-1

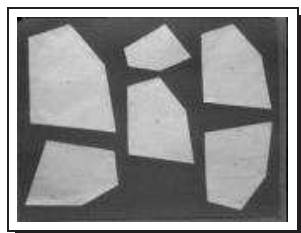
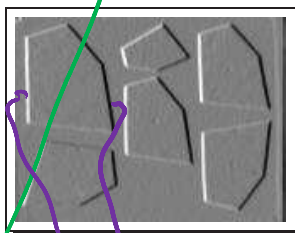
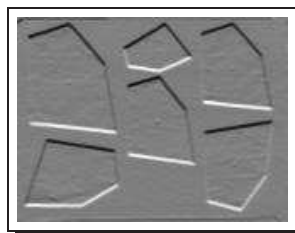


Image original



Gradient en x



Gradient en y

$i(x,y) \times$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$   
+

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
-  
Real

$G_x$   $G_y$

$|G| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$

7

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

### Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x-1, y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x-1, y) - f(x, y-1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

1	0
0	-1

et

0	1
-1	0

► Sensible au bruit

### Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

et

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

1	-1	0	1
1			
1			

et

-1	1	1	1
0			
1			

Filtre Gaussien + Gradient =

Filtre de Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

et

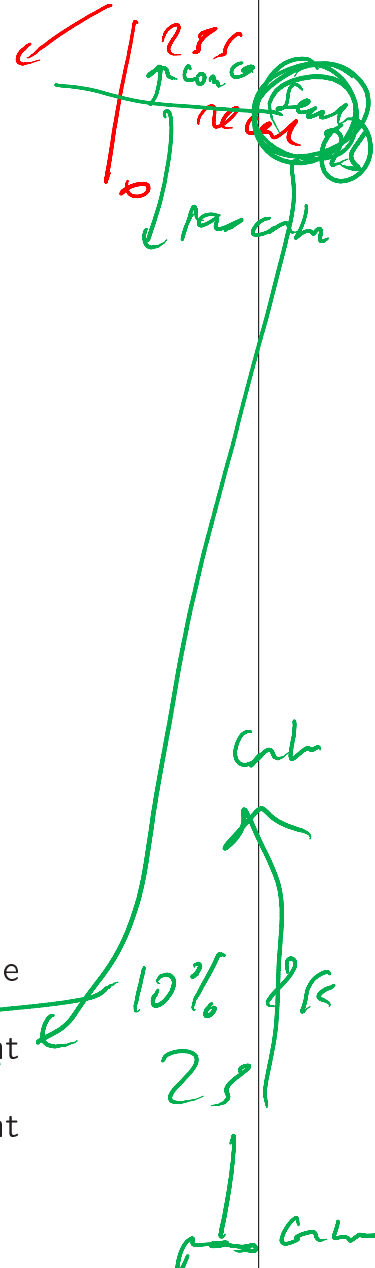
-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

LE  
ENT- (4)

$6x \quad 6y$

$|G| = \sqrt{6^2 + 6^2}$

## Example



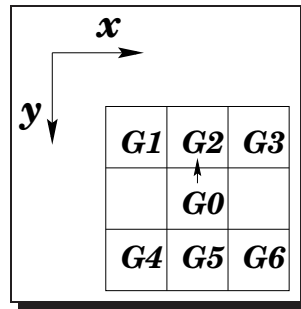
- 10% 8K  
25  
1  
6



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

### Décision Contour

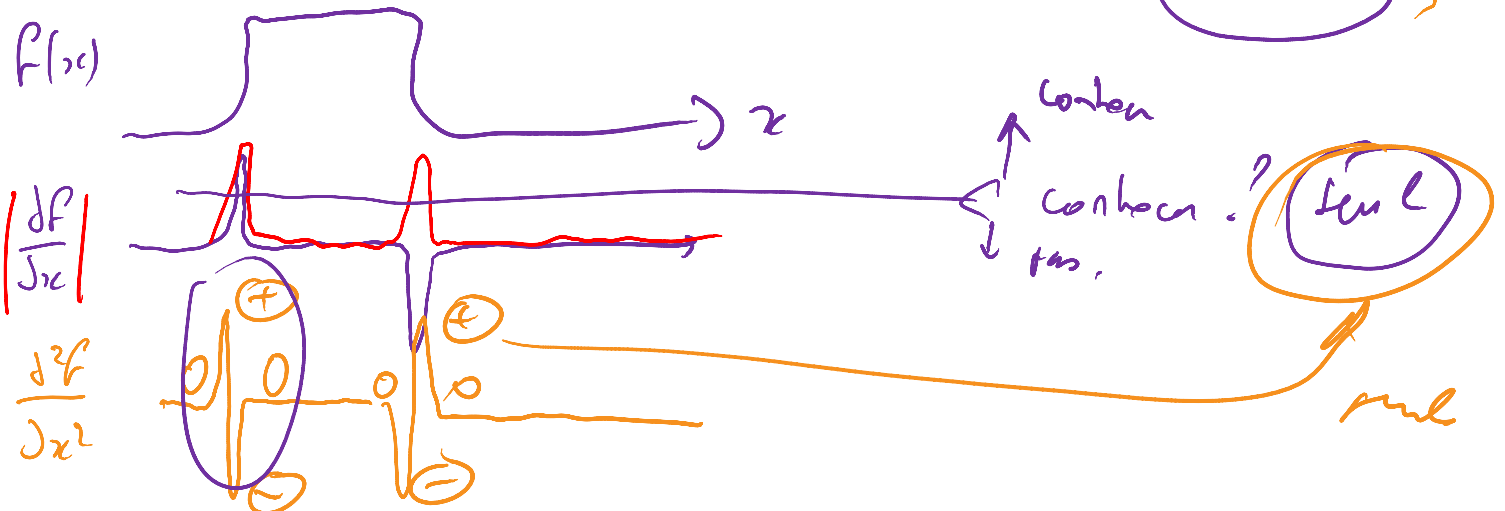
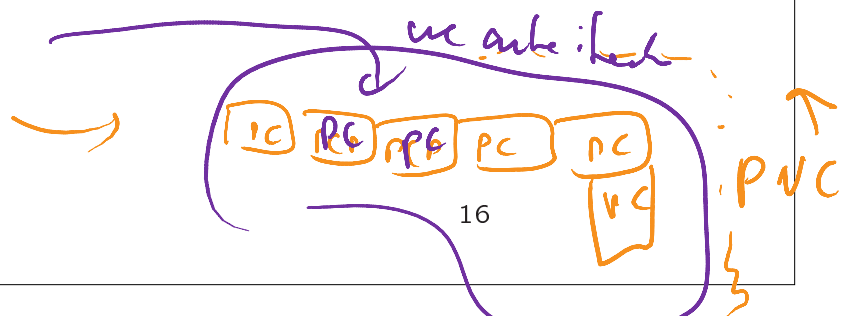


- $G_0$  contour si  $|G_0| > \text{seuil}$
- $G_0$  contour si  $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$  ou  $G_0$  contour si  $\begin{cases} G_2 < G_0 < G_5 \\ G_1 < G_0 < G_6 \\ G_3 < G_0 < G_4 \end{cases}$
- Seuillage par hystérésis

On définit deux seuils  $S_b$  (seuil bas) et  $S_h$  (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire



# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT - LAPLACIEN- (1)

### Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= f''(x, y) = f'(x+1, y) - f'(x, y) \\ &= [f(x+1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x-1, y)] \\ &= f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y)\end{aligned}$$

Convolution avec le masque  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

- Par convolution répétée -

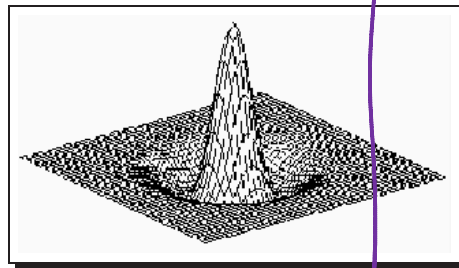
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

### Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



17

Handwritten notes and calculations:

- $f(x) * \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\downarrow \mathcal{R}(u)$
- $\downarrow \mathcal{R}$
- $\mathcal{F}^2 f(x)$
- $\mathcal{F}^2 \mathcal{R}(u)$
- $\mathcal{F}^2 \mathcal{R}$
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

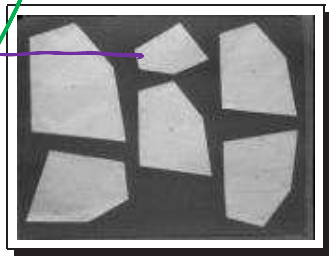
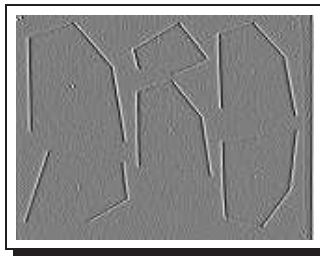
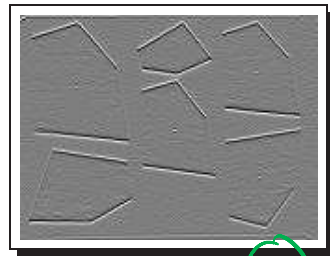


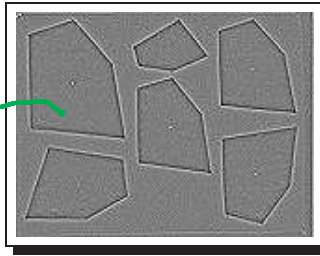
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

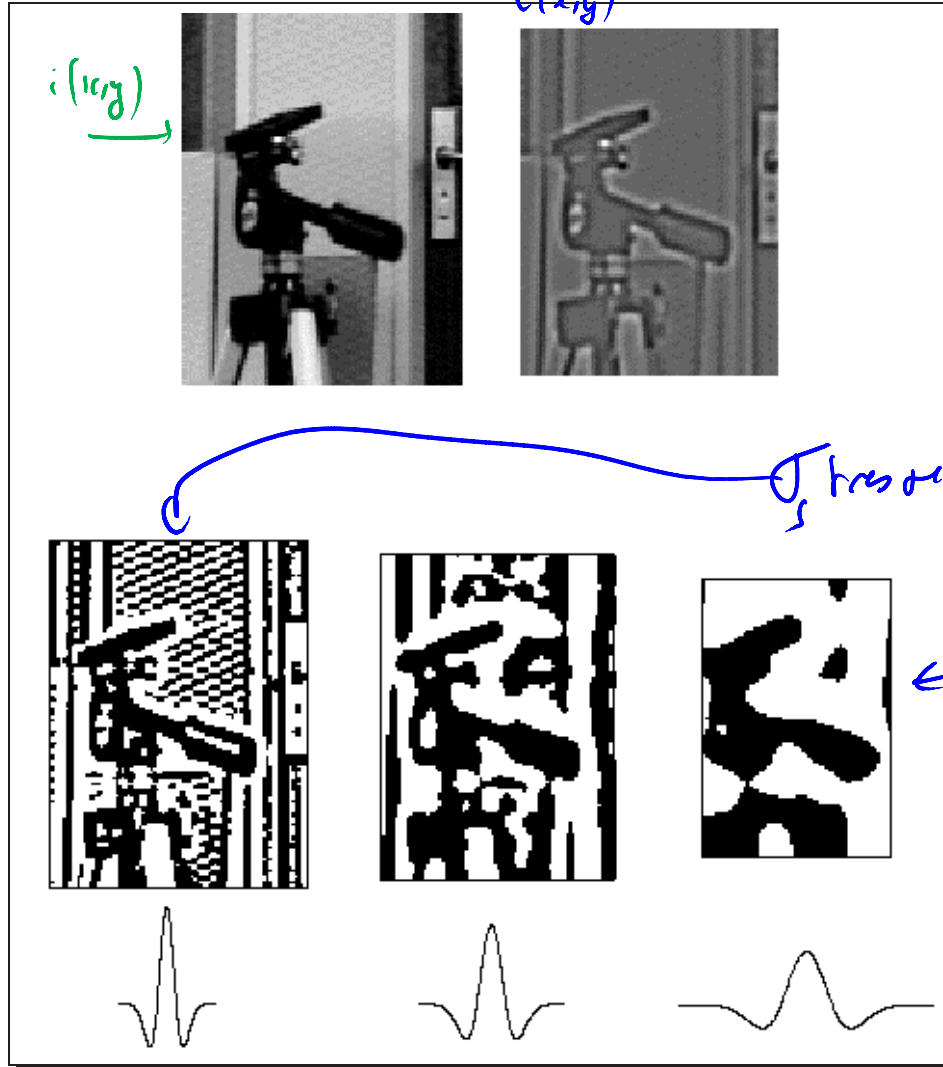
more to work  
fxf

# FILTRAGE SPATIALE

## FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le Laplacien de l'image filtrée

derivée seconde  
en x et y



$$i(x,y) \approx I(u,v)$$

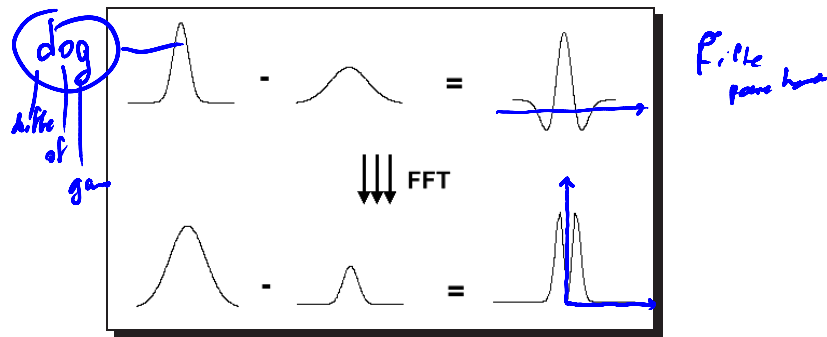
$$g(x,y) \approx G(u,v)$$

$$p(x,y) \approx L(u,v)$$

# FILTRAGE SPATIALE

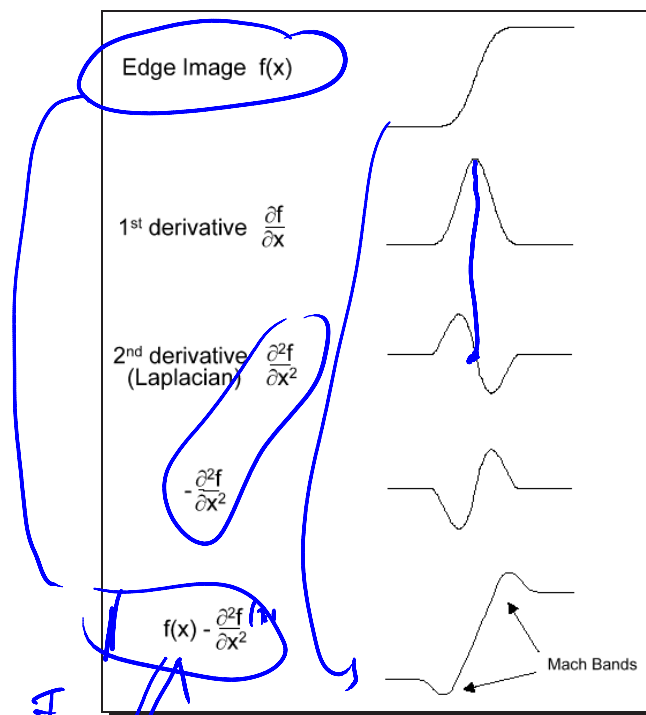
## FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth  $\approx$  Différence de deux Gaussienne



► Filtre Passe-bande

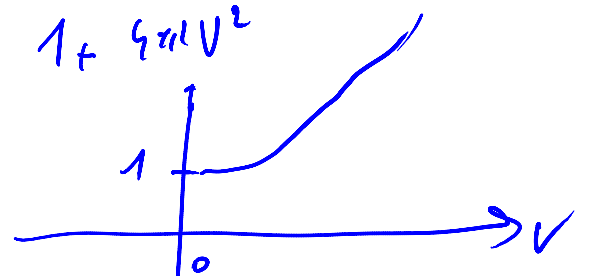
Rehaussement des contours avec le Laplacien



20

$$F(u) - (2\pi j u)^2 F(u)$$

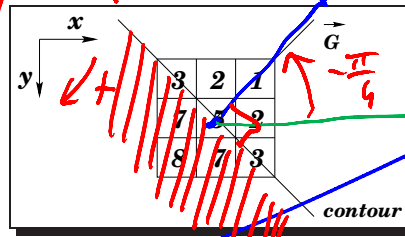
$$= F(u) \cdot \underbrace{[1 - (2\pi j u)^2]}_{1 + 4\pi^2 u^2}$$



g  
a

# FILTRAGE SPATIALE EXERCICE

## Exercice 1



$$|G| = |G_x| + |G_y|$$

$$= \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{72}$$

convoluée par l'op. gradient en  $x \rightarrow$ 

-1	0	1
----	---	---

 et  $y$ 

-1	0	1
----	---	---

on trouve, pour le pixel du milieu  $G_y = -5$  et  $G_x = 5$ .  
Donc,  $|\vec{G}| = 10$  et  $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

## Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur  
de convolution 

1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

.

Filtre séparable  $\rightarrow$ 

-1
3
-1

-1	3	-1
----	---	----

$$H(u) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi jux) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi jux)$$

$$= -\exp(2\pi ju) + 3 - \exp(-2\pi ju) = 3 - 2\cos(2\pi u)$$

