



DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL RESTAURATION

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

RESTAURATION

SOMMAIRE

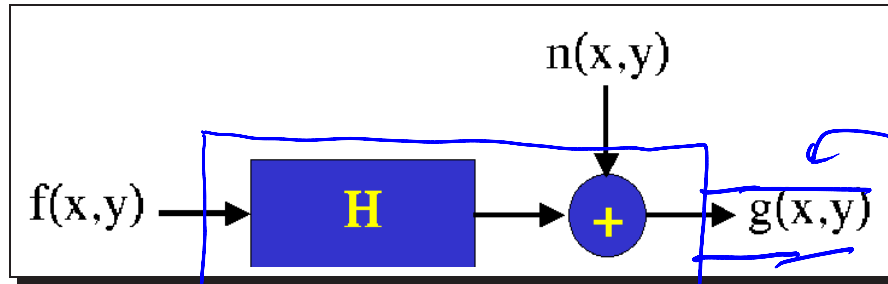
Modèle de Dégradation	2
Estimation du Modèle de Flou	5
Filtrage Inverse	8
La Restauration : Problème Inverse Mal Posé .	10
Filtre de Wiener	11
Restauration Interactive	14

RESTAURATION

MODÈLE DE DÉGRADATION (1)

Modèle de Dégradation

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$



- $f(x, y)$ Image avant dégradation (ou image idéale)
- $n(x, y)$ Bruit supposé additif
- $g(x, y)$ Image dégradée (ou à restaurer)

Restauration ► Retrouver $f(x, y)$ à partir de $g(x, y)$

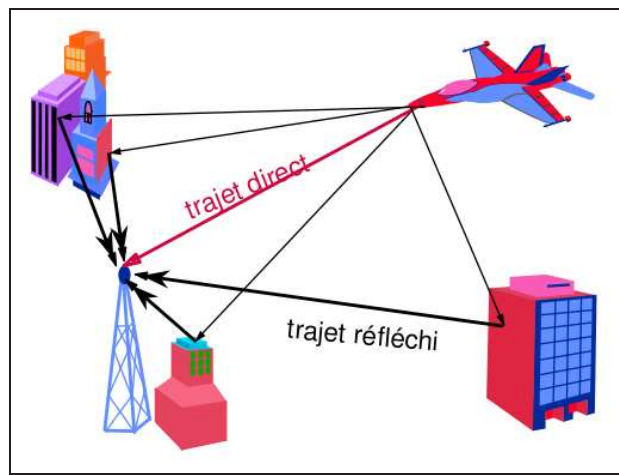
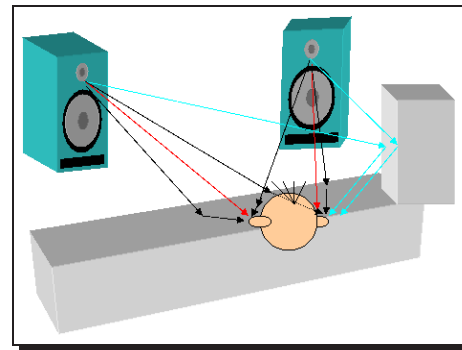
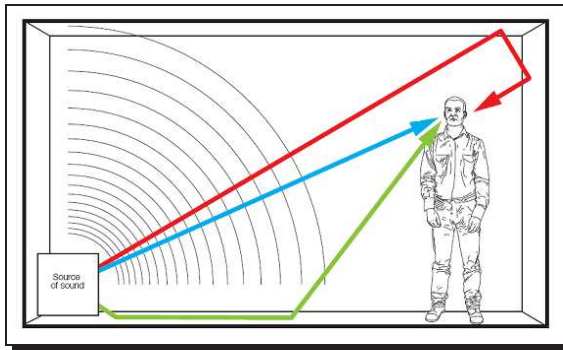
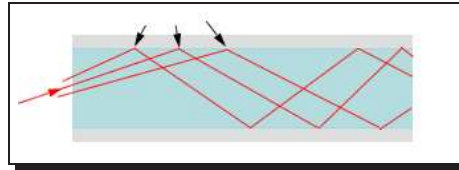
- connaissant les caractéristiques du bruit $n(x, y)$?
- connaissant $H()$?

RESTAURATION

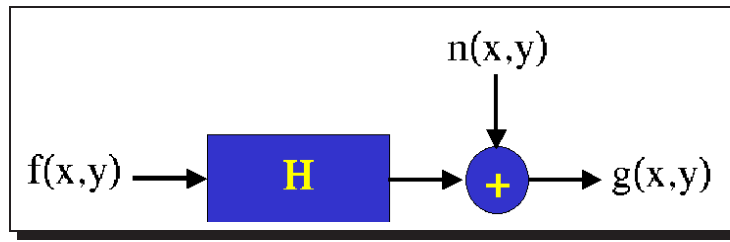
MODÈLE DE DÉGRADATION (2)

Exemple de Flou en 1D

Le Flou est créé par des canaux de transmission engendrant des trajets multiples (et donc de la réverbération et des échos)



RESTAURATION MODÈLE DE DÉGRADATION (3)



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

Modèle LINÉAIRE de Dégradation
(H invariant en position)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ F^{-1} & F \end{matrix}$$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

$$h(x, y)$$

Réponse du système à une impulsion de Dirac

Comment trouver $h(x, y)$?

- 1 Réponse du système à une impulsion de Dirac
- 2 Identification de la réponse du système à une source ponctuelle
- 3 Identification du flou basé sur les zéros du domaine fréquentiel
- 4 Filtrage Homomorphique

DSP

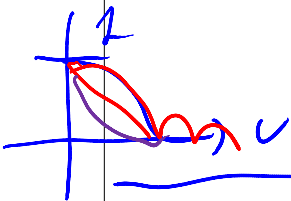
$|N(u, \nu)|$

#

Filtre de flou
masque de convolution

PSF ←

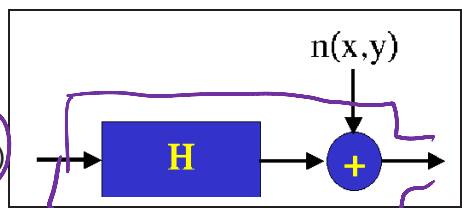
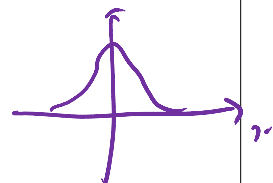
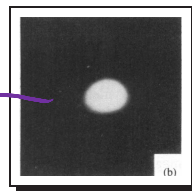
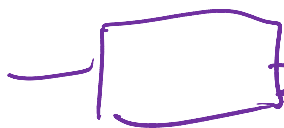
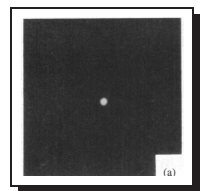
↑↑



RESTAURATION

ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (1)

1 Réponse du système à une impulsion de Dirac



$$h(x, y) \approx h(x, y) * \delta(x, y) + n(x, y)$$

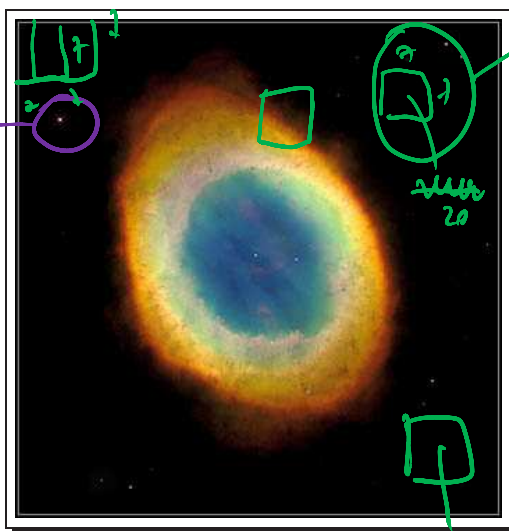
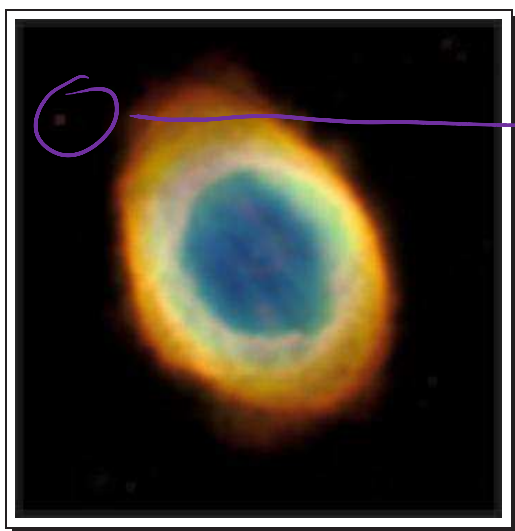
(On peut éliminer le bruit en moyennant par exemple)

$$h(x, y) + n_1(x, y)$$

$$h(x, y) + n_2(x, y)$$

$$\vdots$$

2 Réponse du système à une source ponctuelle



$$h(x, y) \neq 0$$

var: {
pour tous les
pixels
valeur du
hist

5
20
20

$$E \cdot f(u, v) = E'$$

$$f(u, v) = \frac{E'}{E} = \alpha$$

RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (2)

3 Identification du flou basé sur les zéros fréquentielles

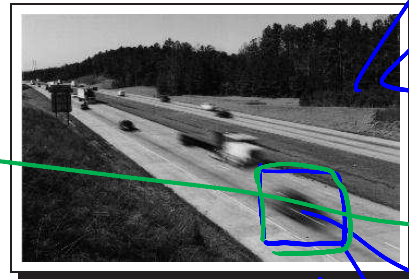
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

Si on suppose une forme paramétrique connue pour la PSF (et donc pour sa réponse fréquentielle), $H(u, v)$ peut être identifié en trouvant les zéros de $G(u, v)$

a- Flou rectiligne causé par du mouvement

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, -\infty \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{2d} & y = 0, -d \leq x \leq d \end{cases}$$



► Zéros sur des lignes perpendiculaires à la direction du mouvement et espacés de $1/2d$

b- Erreur de mise au point de lentille circulaire

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \end{cases}$$

► Zéros se trouvant sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodiques dont le premier zéro est à la fréquence numérique $0.61/r$

$$\pi \left(\frac{x}{d} \right) \approx \frac{\sin \pi v d}{\pi v d}$$

$$v = \frac{1}{d}$$

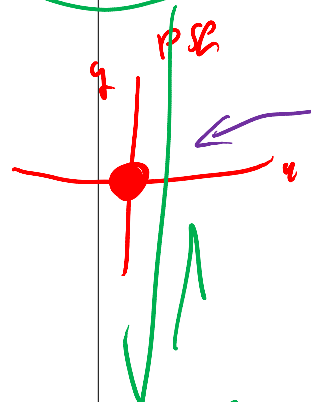
$$-0.5$$

$$v = \frac{1}{d}$$

$$0 = 0 \times 9$$

$$k = \frac{8}{6}$$

$$h(x, y) = \frac{1}{\pi r^2}$$

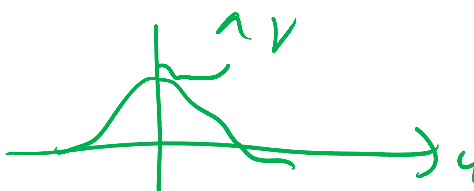
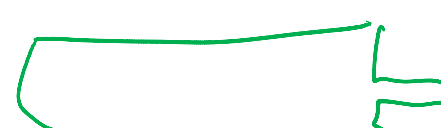
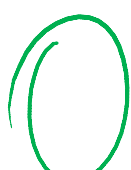


$$H(u, v)$$

$$h(x, y)$$

$$PSF$$

restoration d'images



RESTAURATION

ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (3)

c- Flou uniforme 2D

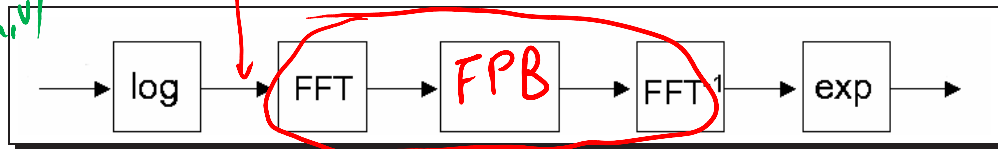
$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

- Zéros espacés de n/L en u et v

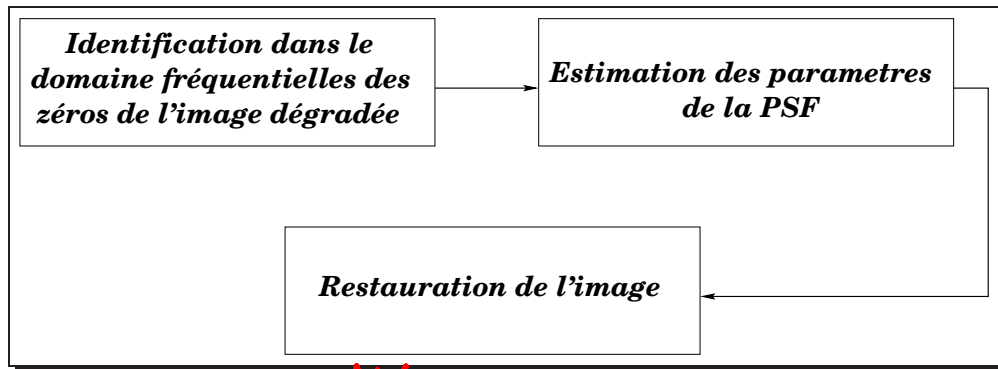
—— Problèmes des méthodes a-b-c ——

- Requiert une forme paramétrique pour la PSF
- Requiert une PSF créant des zéros dans le domaine fréquentiel (PSF Gaussienne ► aucun zéro)

d- Filtrage Homomorphique



Bloc Diagramme Estimation-Restauration



RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (1)

Handwritten notes and diagrams:

- Top left: A small grid diagram with axes x and y , and a label $h(x,y)$.
- Top right: A handwritten equation $F(u,v) = \frac{0}{0}$.
- Center: The main equation $g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$ is written. Below it, the Fourier transform is shown: $G(u,v) = H(u,v) F(u,v) + N(u,v)$. The term $F(u,v)$ is circled in green.
- Below the main equation, the inverse Fourier transform is derived: $\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} - \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$. The denominator $H(u,v)$ is circled in green.
- Below the inverse Fourier transform, a note states: $F(u,v) \text{ si } N(u,v)=0$.
- Bottom left: A handwritten diagram showing a 2D frequency spectrum $H(u,v)$ with axes u and v . A point $u = \frac{1}{d}$ is marked on the u -axis.
- Right side: A handwritten diagram showing a block labeled "de bruit" with an input $g(x,y)$ and an output $f(x,y)$. The input is labeled "bruit" and the output is labeled "gale".

Problèmes

- $H(u,v)$ peut s'annuler pour certaines fréquences
- $G(u,v)$ et $H(u,v)$ peuvent s'annuler simultanément
- le bruit $N(u,v)$ n'est jamais nul



Image Originale

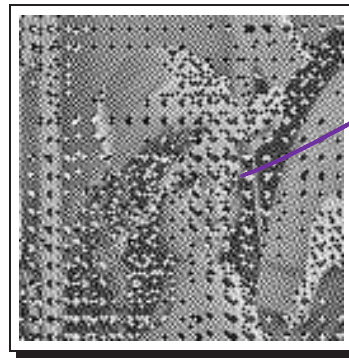
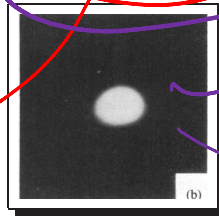
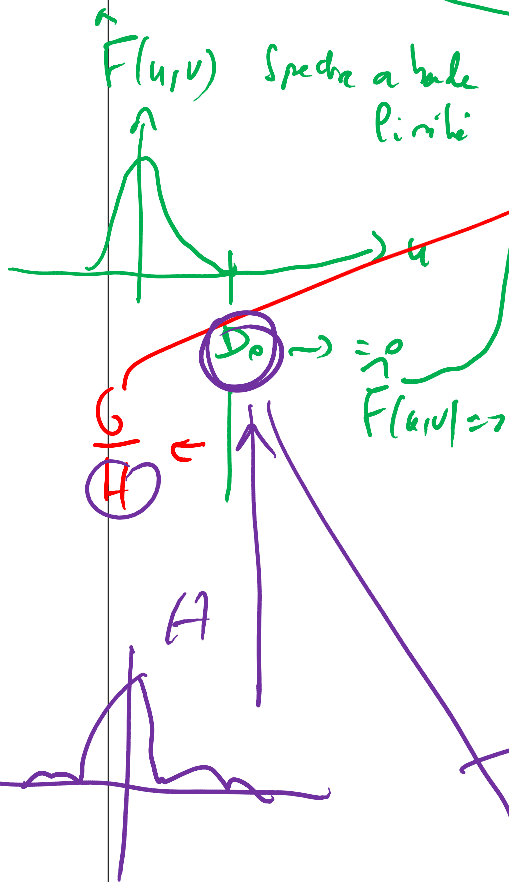


Image restaurée par Filtrage Inverse

RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (2)

Solutions

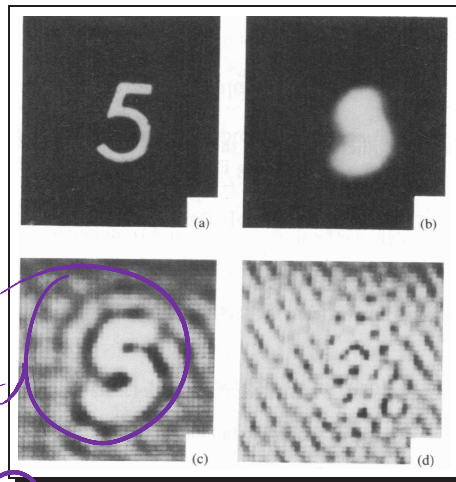
- Si $|H(u, \nu)|$ petit $\hat{F}(u, \nu) = G(u, \nu)$ (ou 0) sinon G/H
- Au delà d'une certaine fréquence de coupure D_0
 - ▶ $\hat{F}(u, \nu) = 0$ sinon $G(u, \nu)/H(u, \nu)$



$h(x, y)$

$f(x, y)$

$g(x, y)$



D_0 bien choisi D_0 trop grand

Remarque

$$\frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} = \frac{H^*(u, \nu) G(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}$$

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{(A + jB)(C - jD)}{(C + jD)(C - jD)} = \frac{N}{C^2 + D^2}$$

9

RESTAURATION

LA RESTAURATION : PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbf{F}^{-1} \parallel \mathbf{F} \\ \downarrow \end{array}$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

$$F(u, v) = \frac{0}{0}$$

► Problème inverse mal posé *multiple soln*

La solution de ce problème n'est pas unique et une faible variation sur l'image $g(x, y)$ (un bruit) \Leftrightarrow de grandes variations sur la solution

Solutions pour rendre le problème bien posé

- Exploiter les connaissances statistiques et spectrales de l'image et du bruit (filtre de Wiener, etc.) $\rightarrow T O n = 1$

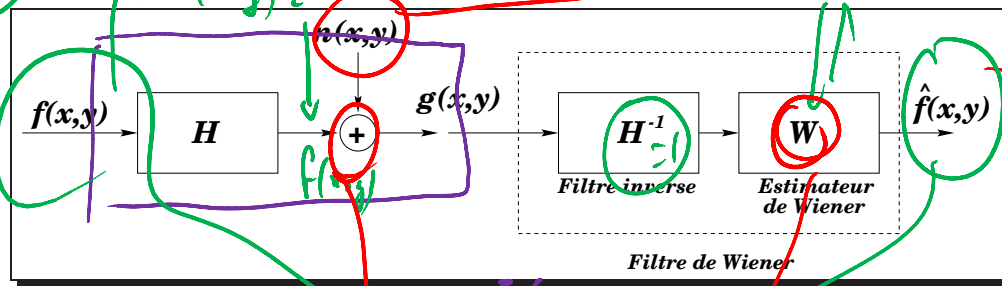
- Modéliser et Exploiter des connaissances *a priori* que l'on a sur l'image et exploiter une solution que l'on sait être pas trop éloignée du résultat désiré (Algorithmes itératifs de Landweber, Tichonov-Miller, etc.) \rightarrow Itt

On contraint la solution de ce problème

Avantage des algorithmes itératifs

- Ne requiert pas l'implémentation d'une division
- Le processus de restauration peut être contrôlé et visualisé à chaque itération

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (1)



► Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_{\hat{f}} \{ \| \hat{f}(x, y) - f(x, y) \|^2 \}$$

- Supposons que $H(u, \nu) = 1$, on montre que la réponse impulsionnelle $w(x, y)$ qui conduit à ce résultat est

$$A_{gf}(x, y) = (w * A_g)(x, y)$$

$$\begin{matrix} F^{-1} \\ \parallel \\ F \end{matrix}$$

$$W(u, \nu) = \frac{P_{gf}(u, \nu)}{P_g(u, \nu)}$$

$$= \frac{PF}{PF + P_n}$$

- Signal et bruit non corrélés, on montre que

$$P_g = P_f + P_n \quad \text{et} \quad P_{gf} = P_f$$

où P_f et P_n désigne la DSP du signal et du bruit

Nota

$A_g = g(x, y) * g(-x, -y)$ (Autocorrélation de $g(x, y)$)

$F(A_g) = |G(u, \nu)|^2 = P_g(u, \nu)$ (spectre de puissance de g)

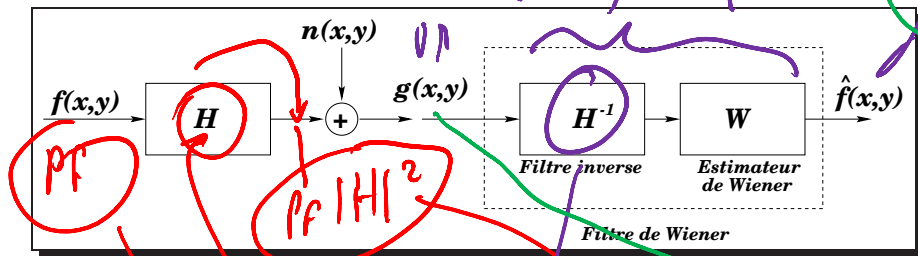
$|F(A_{gf})|^2 = P_{gf}(u, \nu)$ (Spectre d'interaction entre g et f)

$$G(u, \nu) \cdot G^*(u, \nu) = |G(u, \nu)|^2 = P_g(u, \nu)$$

$$P_g = P_f + P_n$$

$$P_f = P_g - P_n$$

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (2)



$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)}$$

En considérant maintenant que $H(u, \nu) \neq 1$, on trouve,

$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + \frac{P_n(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}} = \frac{P_f(u, \nu) |H(u, \nu)|^2}{P_f(u, \nu) |H(u, \nu)|^2 + P_n(u, \nu)}$$

Fonction de transfert du filtre de Wiener

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]$$

Remarques

- $P_n(u, \nu) / P_f(u, \nu)$ peut être approximé par une constante ou une fonction choisie adéquatement
- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \rightarrow$ Filtrage inverse

Nota

$$H[P_n(u, \nu)] = P_n |H|^2$$

$$\textcircled{3} \frac{\sigma^2}{P_g} = \sigma_n^4$$

$$\textcircled{2} \frac{\sigma^2}{|G(u, \nu)|^2}$$

$$P_f |H|^2$$

$$\textcircled{1} \frac{\sigma^2}{|F(u, \nu)|^2}$$

$$\textcircled{0} 10^{-3}$$

$$f(x, y)$$

$$P_f = |F(u, \nu)|^2$$

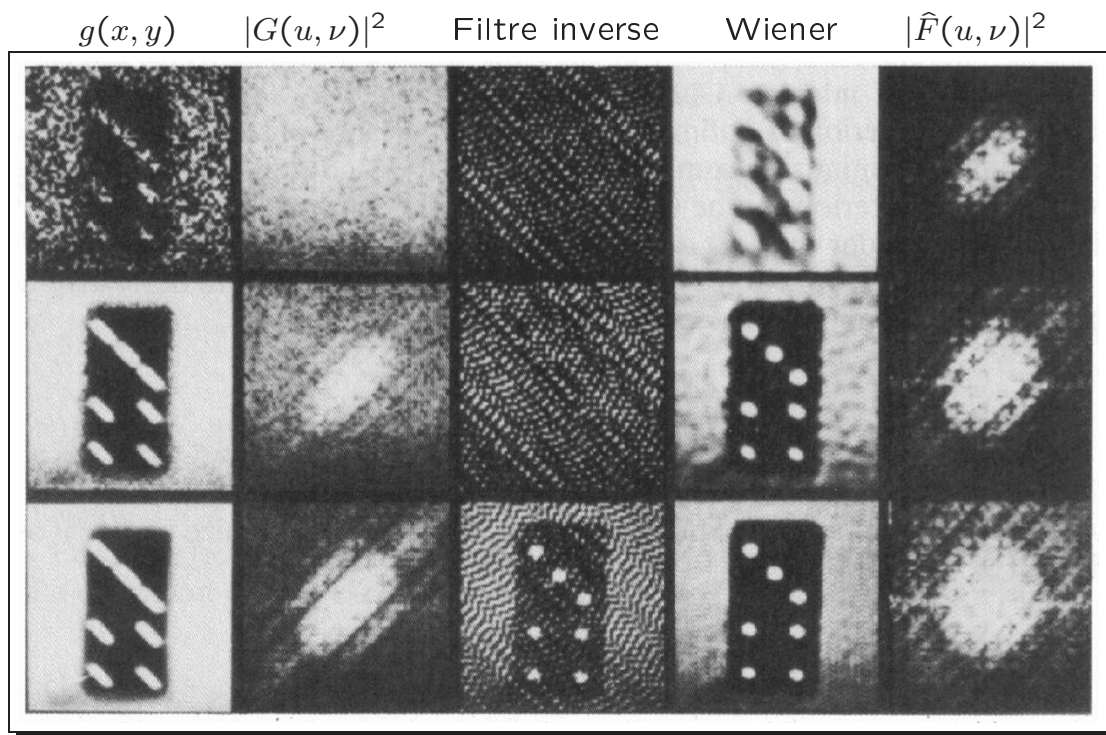
$$H$$

12

RESTAURATION

FILTRE DE WIENER (3)

Exemples



Remarques

- Meilleur que le filtrage inverse
- Limité lorsque le flou est important

RESTAURATION

RESTAURATION INTERACTIVE

Restauration du spectre de puissance de l'image

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{P_f(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)} \right]^{1/2}$$

- Remarques -

- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0$ ► Filtrage inverse
- Donne en général de meilleurs résultats car $G(u, \nu) \neq 0$ lorsque $H(u, \nu)$ l'est, à la différence de Wiener.

Filtres de moyenne géométrique

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \right]^\alpha \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \beta \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]^{1-\alpha}$$

α et β sont des paramètres positifs

- Remarques -

- Pour $\alpha = 1$ ou $\beta = 0$ ► Filtre inverse
- Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ ► Filtre de Wiener
- Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$ ► Restauration du spectre de puissance de l'image (moyenne géométrique entre filtre inverse et Wiener)