



TRAITEMENT DU SIGNAL RESTAURATION

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

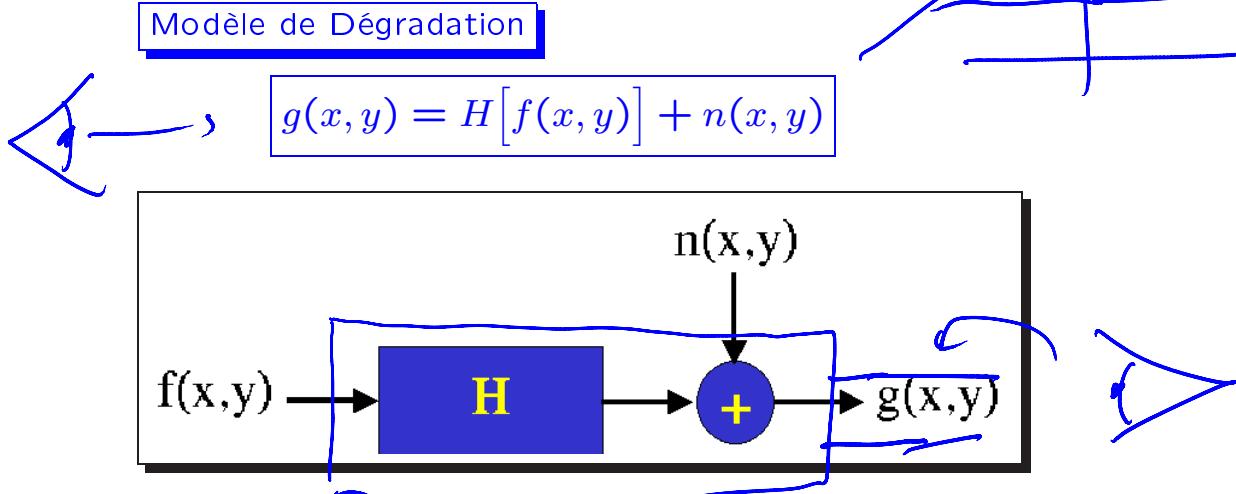
RESTAURATION

SOMMAIRE

Modèle de Dégradation	2
Estimation du Modèle de Flou	5
Filtrage Inverse	8
La Restoration : Problème Inverse Mal Posé .	10
Filtre de Wiener	11
Restauration Interactive	14

RESTAURATION

MODÈLE DE DÉGRADATION (1)



- $f(x, y)$ Image avant dégradation (ou image idéale)
- $n(x, y)$ Bruit supposé additif
- $g(x, y)$ Image dégradée (ou à restaurer)

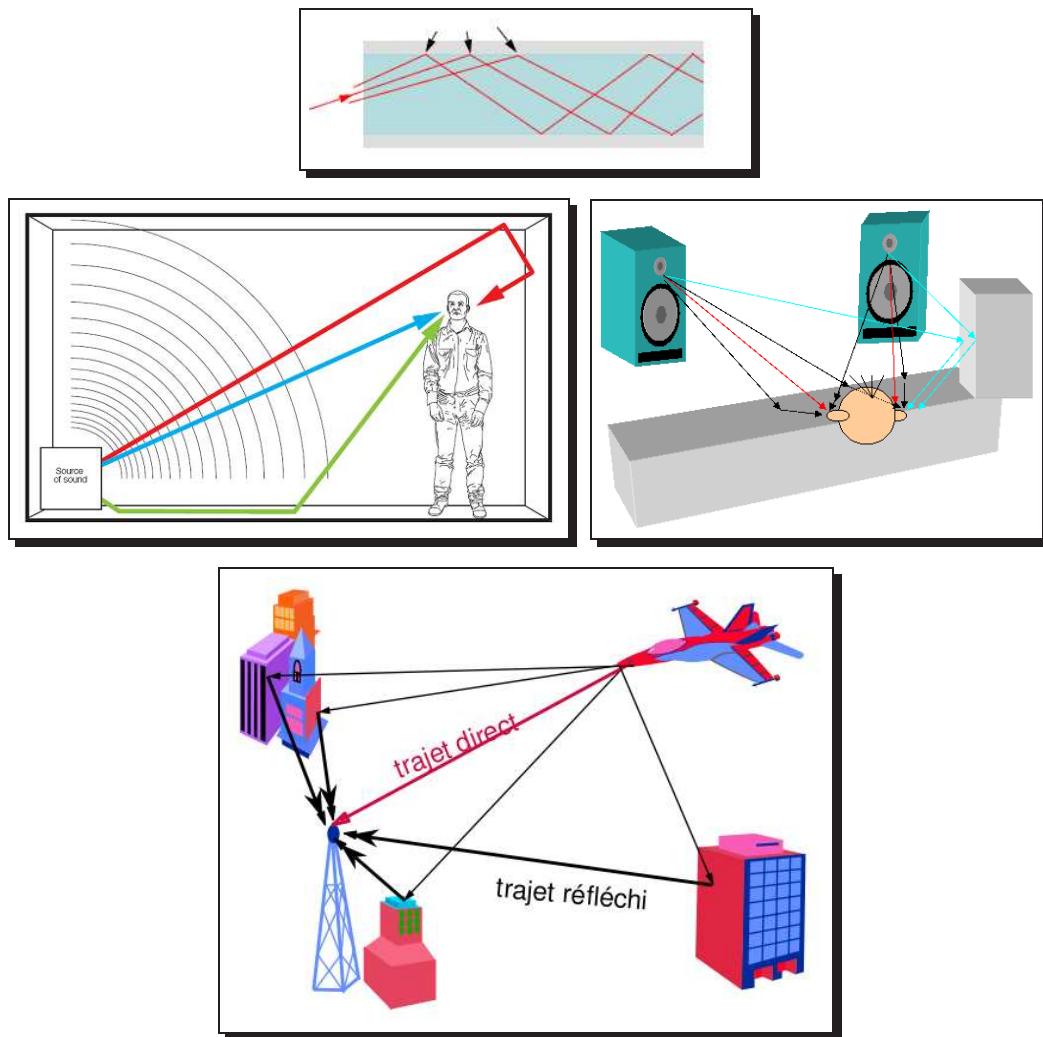
Restauration ▶ Retrouver $f(x, y)$ à partir de $g(x, y)$

- connaissant les caractéristiques du bruit $n(x, y)$?
- connaissant $H()$?

RESTAURATION MODÈLE DE DÉGRADATION (2)

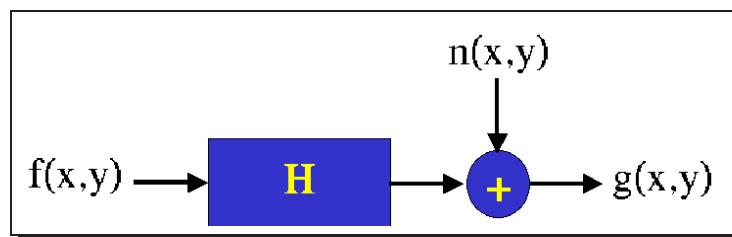
Exemple de Flou en 1D

Le Flou est créé par des canaux de transmission engendrant des trajets multiples (et donc de la réverbération et des échos)



RESTAURATION MODÈLE DE DÉGRADATION (3)

Altérité de flou
margin de corrélation
PSF



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

Modèle LINÉAIRE de Dégradation
(H invariant en position)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

$h(x, y)$

Réponse du système à une impulsion de Dirac



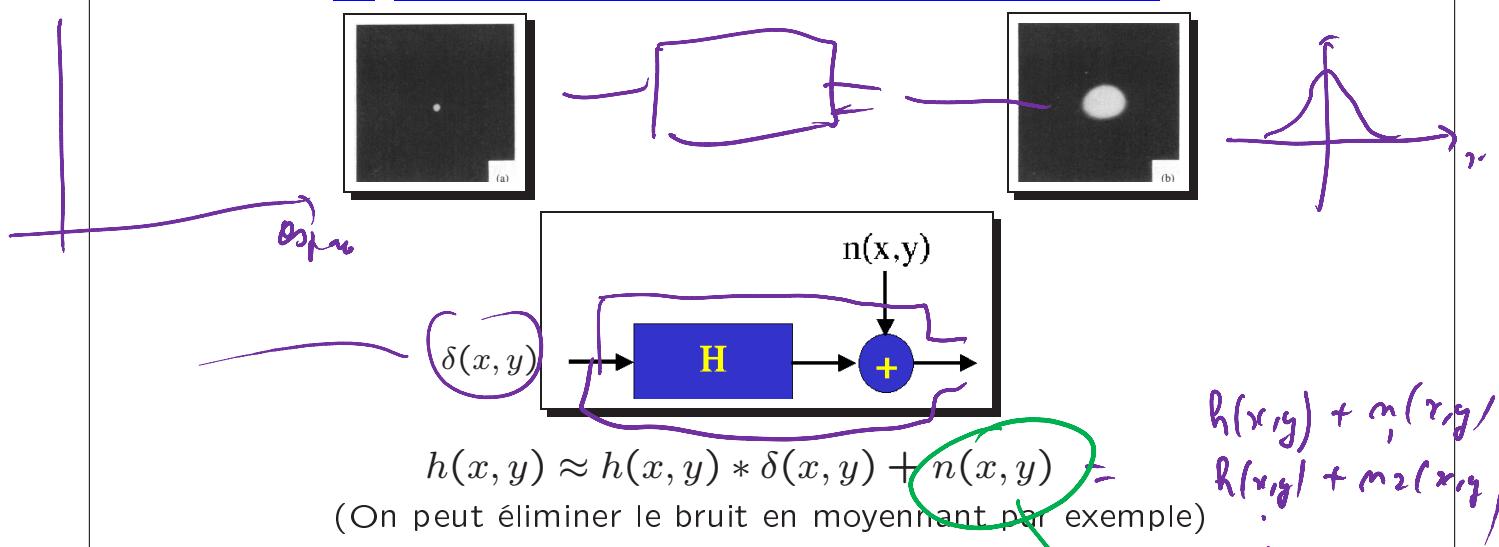
Comment trouver $h(x, y)$?

- 1 Réponse du système à une impulsion de Dirac
- 2 Identification de la réponse du système à une source ponctuelle
- 3 Identification du flou basé sur les zéros du domaine fréquentiel
- 4 Filtrage Homomorphique

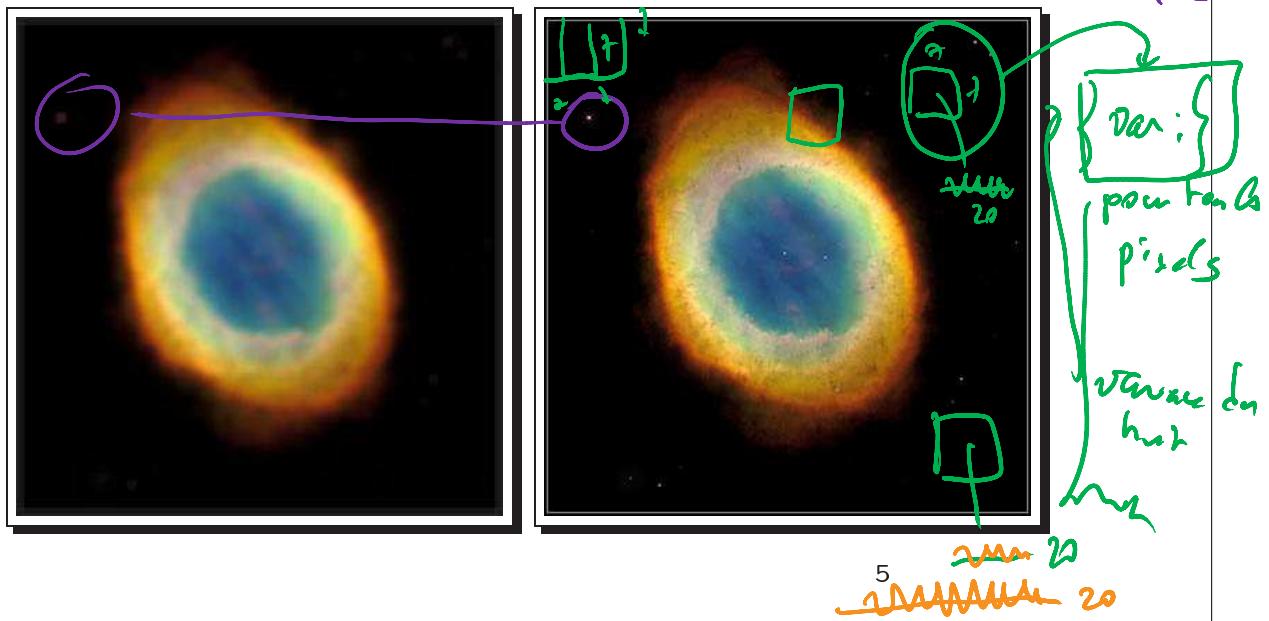
RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (1)

intervalle

1 Réponse du système à une impulsion de Dirac



2 Réponse du système à une source ponctuelle



$$E \cdot f(u, v) = E' \quad f(u, v) = \frac{E'}{E} = n$$

RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (2)

3 Identification du flou base sur les zéros fréquentielles

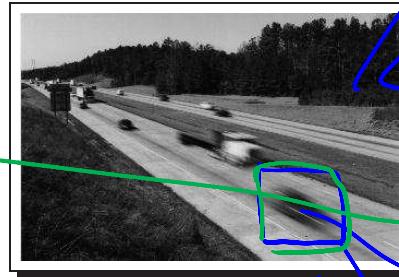
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

Si on suppose une forme paramétrique connue pour la PSF (et donc pour sa réponse fréquentielle), $H(u, v)$ peut être identifié en trouvant les zéros de $G(u, v)$

a- Flou rectiligne causé par du mouvement

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, -\infty \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{2d} & y = 0, -d \leq x \leq d \end{cases}$$



$$h(x, y) = \frac{1}{\pi r^2}$$

► Zéros sur des lignes perpendiculaires à la direction du mouvement et espacés de $1/2d$

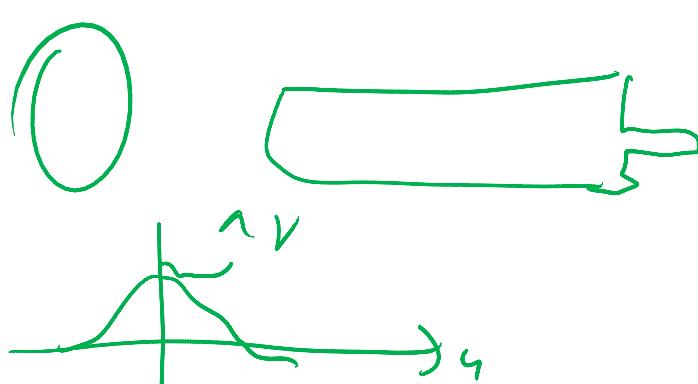
b- Erreur de mise au point de lentille circulaire

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \end{cases}$$

► Zéros se trouvant sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodiques, donc le premier zéro est à la fréquence numérique de $0.61/r$

6

restauration obtenue



RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (3)

c- Flou uniforme 2D

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

- Zéros espacés de n/L en u et v

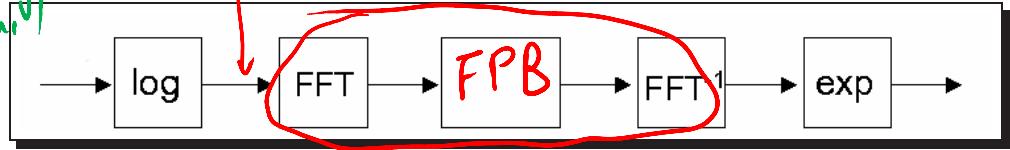
Fresnel
Fréquence

—— Problèmes des méthodes a-b-c ——

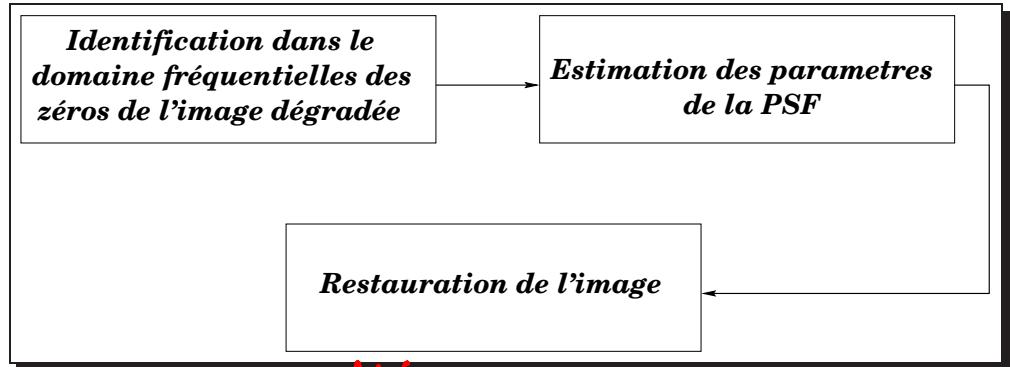
- Requiert une forme paramétrique pour la PSF
- Requiert une PSF créant des zéros dans le domaine fréquentiel (PSF Gaussienne ► aucun zéro)

d- Filtrage Homomorphique

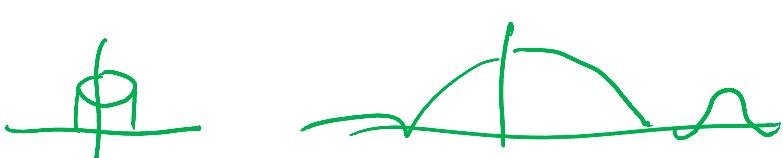
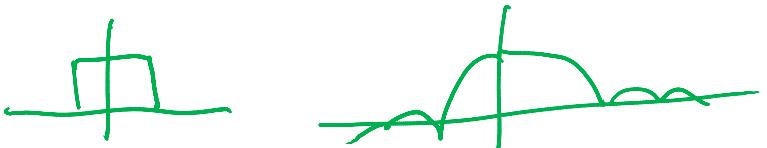
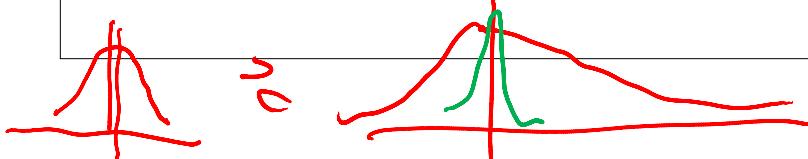
$$G(u, v) = H(u, v) \cdot f(u, v)$$



Bloc Diagramme Estimation-Restauration



7



$H(u, v)$
 \sqrt{f}
 $R(x, y)$

RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (1)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} - \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

Problèmes

- $H(u, v)$ peut s'annuler pour certaines fréquences
- $G(u, v)$ et $H(u, v)$ peuvent s'annuler simultanément
- le bruit $N(u, v)$ n'est jamais nul



Image Originale

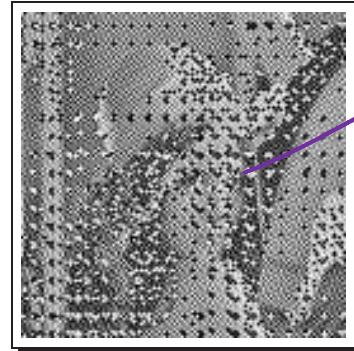
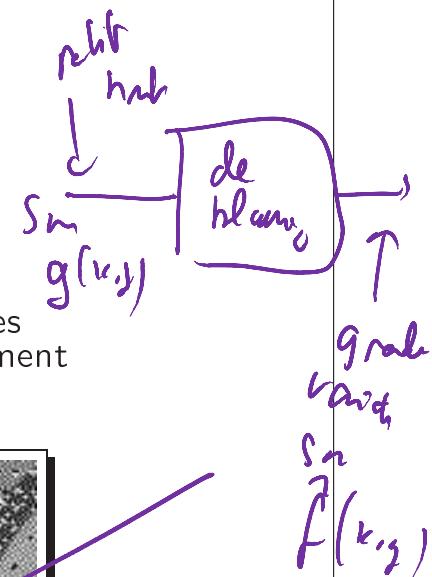


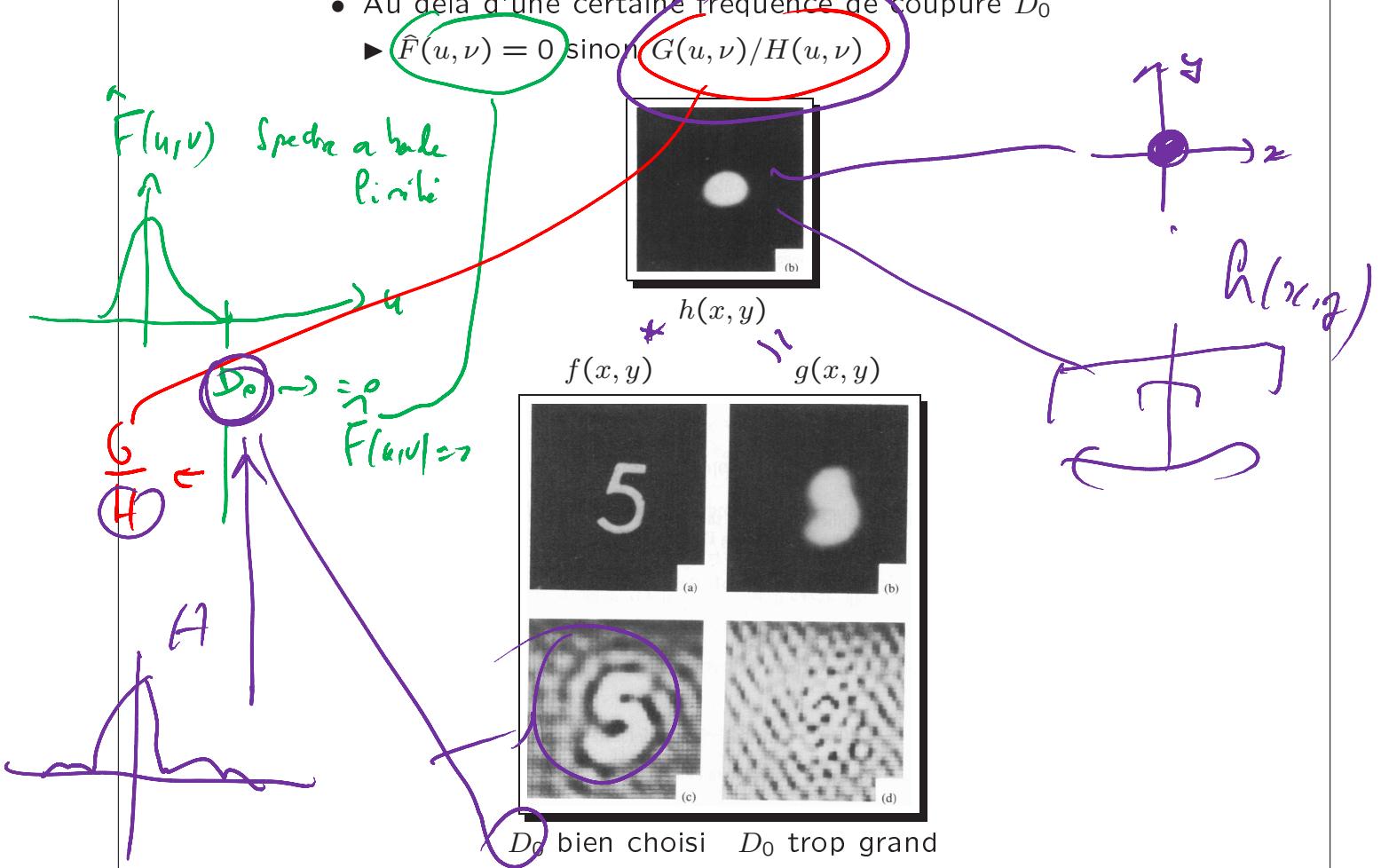
Image restorée par Filtrage Inverse



RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (2)

Solutions

- Si $H(u, \nu)$ petit $\hat{F}(u, \nu) = G(u, \nu)$ (ou 0) sinon G/H
- Au delà d'une certaine fréquence de coupure D_0
 - $\hat{F}(u, \nu) = 0$ sinon $G(u, \nu)/H(u, \nu)$



Remarque

$$\frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} = \frac{H^*(u, \nu) G(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}$$

$$\frac{A + j\beta}{C + jD} = \frac{(A + j\beta)(C - jD)}{(C + jD)(C - jD)} = \frac{N}{C^2 + D^2}$$

9

RESTAURATION

LA RESTAURATION : PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$f(u, v) = \frac{g}{h}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline F^{-1} & F \end{array}$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

► Problème inverse mal posé

multiple soln

La solution de ce problème n'est pas unique et une faible variation sur l'image $g(x, y)$ (un bruit)
 \Leftrightarrow de grandes variations sur la solution

Solutions pour rendre le problème bien posé

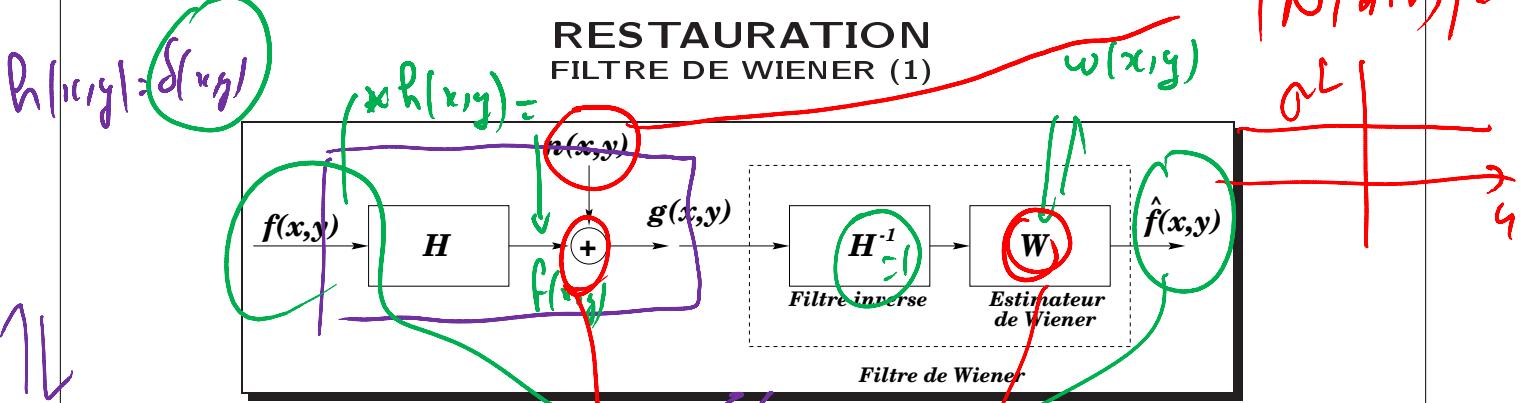
- Exploiter les connaissances statistiques et spectrales de l'image et du bruit (filtre de Wiener, etc.)
- Modéliser et Exploiter des connaissances *a priori* que l'on a sur l'image et exploiter une solution que l'on sait être pas trop éloignée du résultat désiré (Algorithmes itératifs de Landweber, Tichonov-Miller, etc.)

On contraint la solution de ce problème

Avantage des algorithmes itératifs

- Ne requiert pas l'implémentation d'une division
- Le processus de restauration peut être contrôlé et visualisé à chaque itération

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (1)



► Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x,y) = \arg \min_{\hat{f}} \{ \| \hat{f}(x,y) - f(x,y) \|^2 \}$$

- Supposons que $H(u, \nu) = 1$, on montre que la réponse impulsionnelle $w(x,y)$ qui conduit à ce résultat est

$$A_{gf}(x,y) = (w * A_g)(x,y)$$

$$W(u, \nu) = \frac{P_{gf}(u, \nu)}{P_g(u, \nu)} = \frac{PF}{PF + Pn}$$

- Signal et bruit non corrélés, on montre que

$$P_g = P_f + P_n \quad \text{et} \quad P_{gf} = P_f$$

où P_f et P_n désigne la DSP du signal et du bruit

Nota

$$A_g = g(x,y) * g(-x,-y) \quad (\text{Autocorrélation de } g(x,y))$$

$$|F(A_g)|^2 = P_g(u, \nu) \quad (\text{spectre de puissance de } g)$$

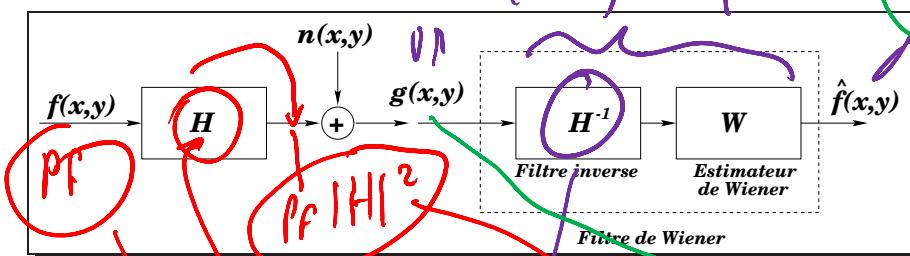
$$|F(A_{gf})|^2 = P_{gf}(u, \nu) \quad (\text{Spectre d'interaction entre } g \text{ et } f)$$

$$G(u, \nu) \cdot G^*(u_N) = |G(u, \nu)|^2 = P_g(u, \nu)$$

$$P_g = P_f + P_n$$

$$P_f = P_g \cdot P_n$$

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (2)



$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)}$$

En considérant maintenant que $|H(u, \nu)| \neq 1$, on trouve,

$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + \frac{P_n(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}} = \frac{P_f(u, \nu)|H(u, \nu)|^2}{P_f(u, \nu)|H(u, \nu)|^2 + P_n(u, \nu)}$$

Fonction de transfert du filtre de Wiener

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{|H(u, \nu)|} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]$$

Remarques

- $P_n(u, \nu)/P_f(u, \nu)$ peut être approximé par une constante ou une fonction choisie adéquatement
- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \rightarrow$ Filtrage inverse

Nota

$$H[P_n(u, \nu)] = P_n |H|^2$$

$$f(x, y)$$



$$P_f = |F(u, \nu)|^2$$

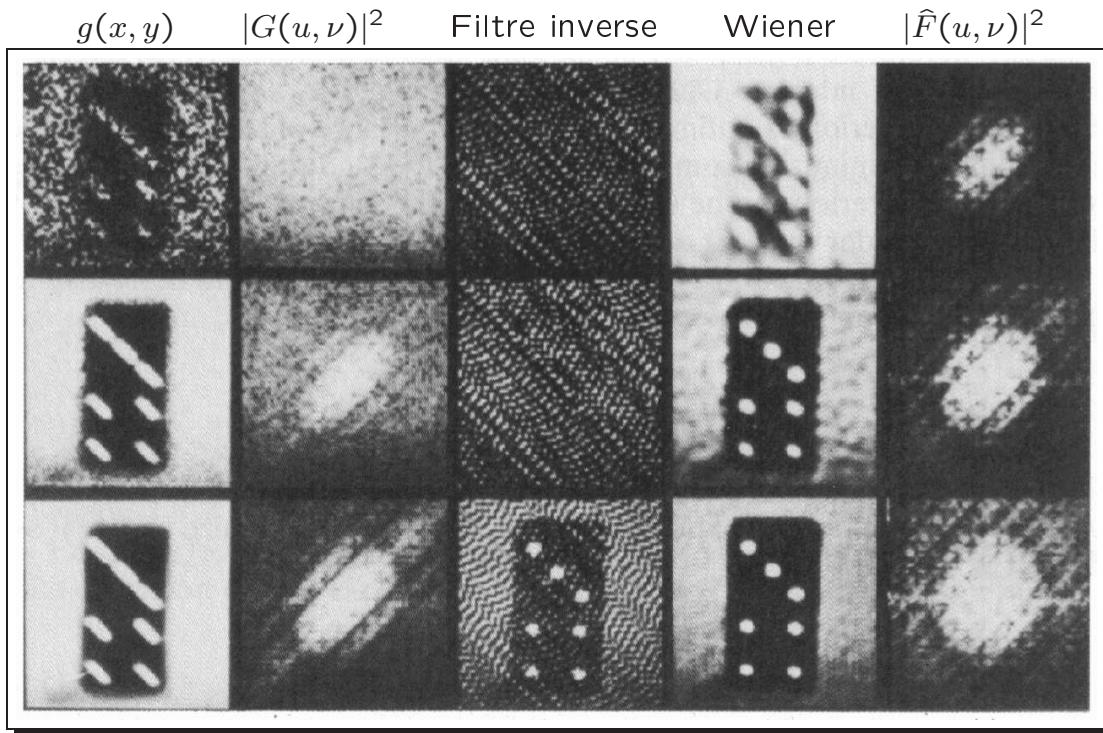
=

$$\frac{\sigma^2}{P_f |H|^2} |G(u, \nu)|^2$$

$$\frac{\sigma^2}{P_g + \sigma_m^2}$$

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (3)

Exemples



Remarques

- Meilleur que le filtrage inverse
- Limité lorsque le flou est important

RESTAURATION

RESTAURATION INTERACTIVE

Restauration du spectre de puissance de l'image

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{P_f(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)} \right]^{1/2}$$

- Remarques -

- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \blacktriangleright$ Filtrage inverse
- Donne en général de meilleur résultats car $G(u, \nu) \neq 0$ lorsque $H(u, \nu)$ l'est, à la différence de Wiener.

Filtres de moyenne géométrique

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \right]^\alpha \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \beta \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]^{1-\alpha}$$

α et β sont des paramètres positifs

- Remarques -

- Pour $\alpha = 1$ ou $\beta = 0 \blacktriangleright$ Filtre inverse
- Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1 \blacktriangleright$ Filtre de Wiener
- Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1 \blacktriangleright$ Restauration du spectre de puissance de l'image (moyenne géométrique entre filtre inverse et Wiener)