Cours IFT6266,
Apprentissage statistique pour la gestion de portefeuille

- **Gestion de portefeuille**

  Un gestionnaire de portefeuille prend une séquence de décisions concernant des placements dans différents actifs financiers possibles. L'idéal serait de placer tout son argent dans l'actif financier dont le prix va augmenter le plus, mais il est impossible de prédire ces variations exactement: on peut seulement espérer prédire la distribution de ces variations. À chaque instant de décision le gestionnaire a accès à des informations courantes sur les actifs et sur d'autres données qui peuvent être pertinentes. Étant donné l'incertitude sur ces variations futures, le gestionnaire doit tenir compte non seulement des variations espérées mais aussi du risque encouru.

- **Formalisation du problème de gestion de portefeuille**

  On va supposer une séquence discrète $1, 2, \ldots,$ de points de décision, et N actifs financiers. Si $p_{ti} \geq 0$ est le prix de l'actif i au temps t, alors on appelle *rendement* R_{ti} la variation de prix $R_{ti} = p_{ti}/p_{t-1,i} - 1$ et *log-rendement* r_{ti} la variation géométrique $r_{ti} = \log(p_{ti}/p_{t-1,i})$. On notera $r_t = (r_{t1}, \ldots, r_{tN})$. Soit w_{ti} la fraction de l'avoir du gestionnaire que celui-ci décide d'investir au temps t dans l'actif i, donc $\sum_{i=1}^{N} w_{ti} = 1$, et soit n_{ti} le nombre (pas nécessairement un entier, pas nécessairement positif) d'unités de l'actif i détenus au temps t dans le portefeuille. Soit V_t la valeur totale du portefeuille au temps t. On a donc

$$V_t = \sum_i n_{ti} p_{ti}$$

  et

$$w_{ti} = \frac{n_{ti} p_{ti}}{V_t}$$

  où on a donc que

$$\sum_i w_{ti} = 1.$$

  Au moment de la décision de placement on a donc investi $w_{ti} V_t$ dollars dans l'actif i. La valeur de cette partie du portefeuille augmente donc par le ratio $p_{t+1,i}/p_{t,i}$. Donc avant de faire un changement dans le nombre de parts,

$$\begin{aligned}
V_{t+1} &= \sum_i n_{ti} p_{t+1,i} \\
&= \sum_i n_{ti} p_{t+1,i} \frac{p_{t,i}}{p_{t,i}} \\
&= \sum_i V_t w_{ti} \frac{p_{t+1,i}}{p_{t,i}} \\
&= V_t \sum_i w_{ti} (R_{t+1,i} + 1) \\
&= V_t (\sum_i w_{ti} R_{t+1,i}) + 1
\end{aligned}$$

  Si on définit le rendement du portefeuille comme celui de n'importe quel autre actif

$$Q_{t+1} = \frac{V_{t+1}}{V_t} - 1$$

on obtient donc que

$$Q_{t+1} = \sum_i w_{ti} R_{t+1,i}$$

est donc une combinaison linéaire des rendements des actifs individuels, avec pondérations w_{ti}. Plus généralement on pourra écrire V_{t+1} comme une fonction de V_t, w_t, p_{t+1}, p_t et possiblement d'autres informations (comme l'écart entre le prix vendeur et le prix acheteur et les frais de transactions sur chaque actif).

Il est aussi possible que le gestionnaire "investisse" dans des "paris" (les contrats à terme: une promesse d'achat ou de vente à une date future). Dans ce cas le gestionnaire doit fournir une partie de son capital en garantie, et il gagnera de l'intérêt dessus. Le signe du pari indique si on s'engage à acheter ou vendre un bien sous-jacent. Le montant mis en garantie est toujours positif et donc il peut être différent (inférieur en valeur absolue, et/ou de signe opposé) au montant parié (notion de **marge** et de **levier**). Si le pari est proportionnel à $n_{ti} p_{ti} \times$ levier sur l'actif i, alors le montant investi (donné en garantie) est $|n_{ti} p_{ti}|$. Le profit fait est proportionnel à w_{ti}levier$R_{ti} + |w_{ti}| R_t^f$), où R_t^f est le taux d'intérêt (aussi appelé *taux sans risque*) et R_{ti} indique le changement de prix du contrat à terme sur les marchés.

Pour prendre une décision de placement on a accès à des informations résumées dans le vecteur x_t. On voudrait donc estimer $P(V_{t+1}|x_t, w_t)$, la valeur future de notre portefeuille, qui dépend des informations disponibles x_t et des décisions w_t.

Pour pouvoir prendre cette décision il faudrait aussi savoir quelles distributions de V_{t+1} nous plaisent plus. Soit U une fonctionelle d'utilité qui prend une loi sur V_{t+1} en argument et retourne un scalaire qu'on voudrait aussi grand que possible (afin de définir un ordre total entre les différentes distributions de V_{t+1}). Alors on voudrait choisir w_t qui maximise $U(P(V_{t+1} = .|x_t, w_t, V_t))$, où $P(V_{t+1} = .|x_t, w_t, V_t)$ dénote la fonction de densité complète (conditionnelle), pas seulement une valeur de la densité.

- **Exemple simple**

  On va considérer un exemple simple dans lequel il n'y a pas de frais de transactions et $U = E[Q_{t+1}] - \frac{a}{2} Var[Q_{t+1}]$, où a est une constante (l'aversion au risque) qui contrôle le compromis entre rendement espéré et incertitude sur le rendement. Dans ce cas, si connaissait le vecteur $E[R_{t+1}|x_t]$ et la matrice $Var[R_{t+1}|x_t]$, on pourrait choisir le w_t optimal de façon analytique. Dans le cas où l'on ne contraint pas les w_{ti} on obtient immédiatement que le w_t optimal est la solution de

  $$E[R_{t+1}|x_t] = a Var[R_{t+1}|x_t] w_t$$

  donc $w_t = \frac{1}{a} Var[R_{t+1}|x_t]^{-1} E[R_{t+1}|x_t]$.

  Exercice: trouver la solution quand on rajoute la contrainte $\sum_i w_{ti} = 1$.

  Malheureusement on ne connait pas cette espérance et cette covariance, mais on peut l'estimer. Par exemple on pourrait faire une régression linéaire multiple pour les estimer, ou bien l'on pourrait utiliser un estimateur plus sophistiqué, non-linéaire.

  Encore une autre possibilité est de considérer une fonction de décision $f(x_t)$ avec $w_t = f(x_t)$, et d'optimiser cette fonction de décision de façon que si on l'avait utilisée dans le passé l'utilité de la distribution empirique des Q_t eut été maximisée.

Dans les deux cas nous voulons estimer une fonction de manière à ce que sa valeur sur des cas **futurs** soit maximisée, mais nous avons seulement accès aux données passées pour choisir cette fonction.

- **Exemple encore plus simple**

  Si on ne réussit pas ou l'on ne veut pas estimer la matrice de covariance future, on pourrait se contenter d'une prédiction très simple, à savoir est-ce que le rendement de l'actif i va être positif ou négatif pour la prochaine période. Si il est positif on voudrait acheter de l'actif, sinon on voudrait en vendre (ou bien ne pas en avoir). Dans ce scénario très simple et certainement sous-optimal il suffit donc de prédire à quelle classe on devrait plutot associer le tuple (i, x_t), la classe des rendements positifs ou la classe des rendements négatifs (pour l'actif i, au temps t).

  Voici plusieurs types de méthodes qu'on pourrait utiliser pour faire cette classification. Ces méthodes construisent une *fonction discriminante* $f(x)$ à partir d'un vecteur de données $x \in \mathbf{R}^n$, de telle sorte qu'on choisira une classe si $f(x) \geq 0$ et l'autre si $f(x) < 0$. La fonction $f(x)$ nous indiquera comment classifier un nouvel exemple x. Pour choisir la fonction $f(.)$ on peut utiliser un *ensemble d'apprentissage* $D = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_l, y_l)\}$, qui contient des paires (x_i, y_i), avec x_i un vecteur d'entrée et y_i la classe désirée (e.g. +1 ou -1). On voudrait idéalement que $signe(f(x_i)) = y_i$ pour tous les i, mais on voudrait surtout que $signe(f(x)) = y$ pour de nouveaux exemples (x, y), avec une probabilité la plus grande possible.

  - **classifieur linéaire**: $f(x) = b + w'x$, un classifieur paramétrique dont les paramètres sont le "biais" scalaire b et le vecteur $w \in \mathbf{R}^n$. On pourrait choisir les paramètres qui minimise la moyenne d'un critère d'erreur mesuré sur chaque exemple.
  - **classifieur polynomial**: $f(x) = \sum_i a_i m_i(x)$, où $m_i(x)$ est un monôme (un produit dont les facteurs dont des éléments du vecteur x). Pour un polynôme d'ordre d on prendra tous les monômes différents qui contiennent au maximum d facteurs. C'est aussi un classifieur paramétrique dont on pourrait choisir les paramètres pour minimiser un certain critère d'erreur.
  - **classifieur par k-plus-proches voisins**: on trouve les exemples d'apprentissage dont les x_i sont les plus proches du x de test, et on choisir la classe majoritaire parmi ceux-ci. Donc

    $$f(x) = \sum_i y_i 1_{i \in \mathcal{N}(x)}$$

    où 1_e est 1 si e est vrai et 0 autrement, et $\mathcal{N}(x)$ contient les indices des k plus proches voisins de x dans D, i.e. pour lesquels $||x - x_i||$ est le plus petit.