

Simplex method convergence

Convergence when the problem is non degenerate

- Non degeneracy assumption:
all the basic variables are strictly positive at each iteration
- **Theorem**: Consider a linear programming problem in standard form.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{Subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & c, x \in R^n, b \in R^m \\ & A \quad m \times n \text{ matrix} \end{aligned}$$

If the matrix A is of full rank, and if the non degeneracy assumption is verified, then the simplex algorithm terminates in a finite number of iterations.

- **Proof:**

Since the rank of matrix A is equal to m , then each basic feasible solution includes m basic variables strictly positive (non degeneracy assumption).

But there is a finite number of ways to select m columns among the n columns of A to specify an $m \times m$ sub matrix of A :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

But the feasible basis of A are a subset of these. Then

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

is an upper bound on the number of feasible basis of A .

- The influence of pivoting on the objective function during an iteration of the simplex

basic var.	x_1	x_2	...	x_{j_r}	...	x_{j_1}	...	x_s	...	x_{j_m}	...	x_n	$-Z$
x_{j_1}	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	...	0	...	1	...	\bar{a}_{1s}	...	0	...	\bar{a}_{1n}	0
x_{j_r}	\bar{a}_{r1}	\bar{a}_{r2}	...	1	...	0	...	\bar{a}_{rs}	...	0	...	\bar{a}_{rn}	0
x_{j_m}	\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}	...	0	...	0	...	\bar{a}_{ms}	...	1	...	\bar{a}_{mn}	0
$-Z$	\bar{c}_1	\bar{c}_2	...	\bar{c}_{j_r}	...	\bar{c}_{j_1}	...	\bar{c}_s	...	\bar{c}_{j_m}	...	\bar{c}_n	1

Dividing row r
by \bar{a}_{rs}

$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$

$\times \bar{c}_s$

Subtract from

$$-\bar{z} \rightarrow -\tilde{z} = -\bar{z} - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} > -\bar{z}$$

since $\bar{c}_s < 0$, $\bar{a}_{rs} > 0$, et $\bar{b}_r > 0$ under the non degeneracy ass.

$$-\bar{z} \rightarrow -\tilde{z} = -\bar{z} - c_s \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} > -\bar{z}$$

since $\bar{c}_s < 0$, $\bar{a}_{rs} > 0$, et $\bar{b}_r > 0$ under the non degeneracy ass.


Then $\tilde{z} < \bar{z}$ and the value of the objective function decreases strictly at each iteration.


Consequently, the same basic feasible solution cannot repeat during the completion of the simplex algorithm.


Since the number of basic feasible solution is bounded, it follows that the simplex algorithm must be completed in a finite number of iterations.


**An exemple of a problem
where
the simplex algorithm cycles**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	1	0


	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0	0	0
 x_6	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	1	0



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
 x_1	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0	0
 x_2	$\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0	0
x_7	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	0	1
$-z$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	1	0

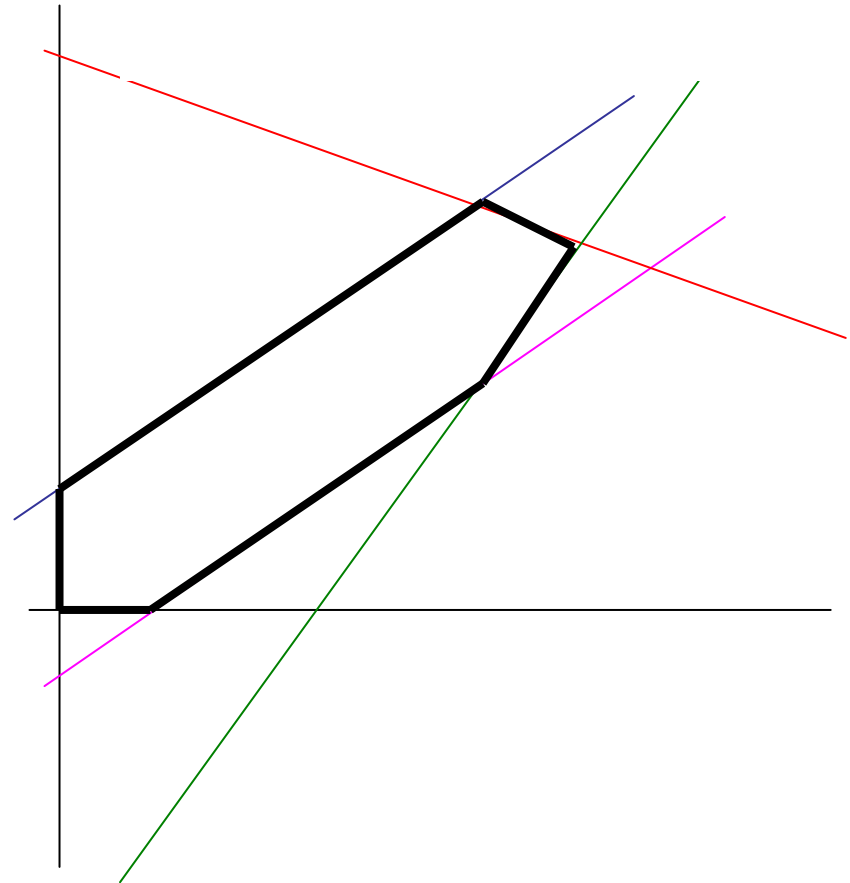
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
x_7	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	0	1
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0	0	0
 x_4	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0	1	0

↑

Graphic illustration of degeneracy

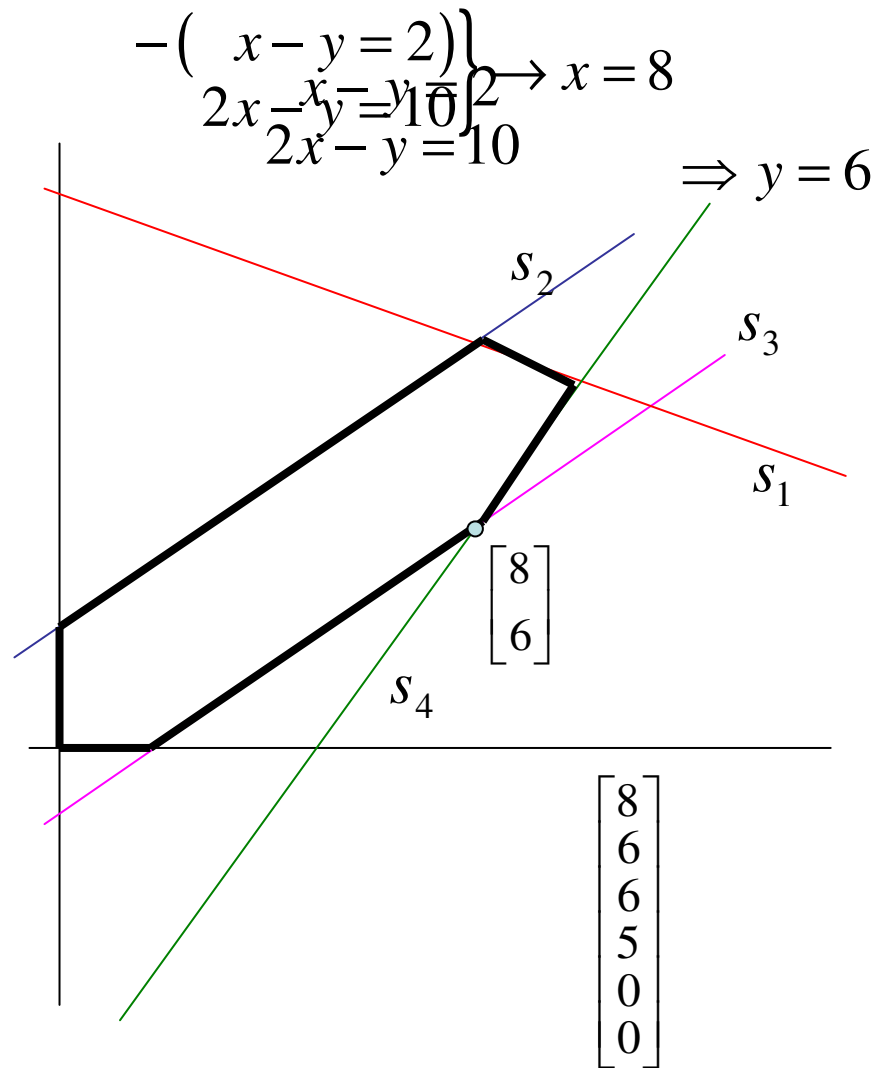
Min $-3x - 2y$
s. t. $x + 2y \leq 26$
 $x + y \leq 3$
 $x - y \leq 2$
 $2x - y \leq 10$
 $x, y \geq 0$



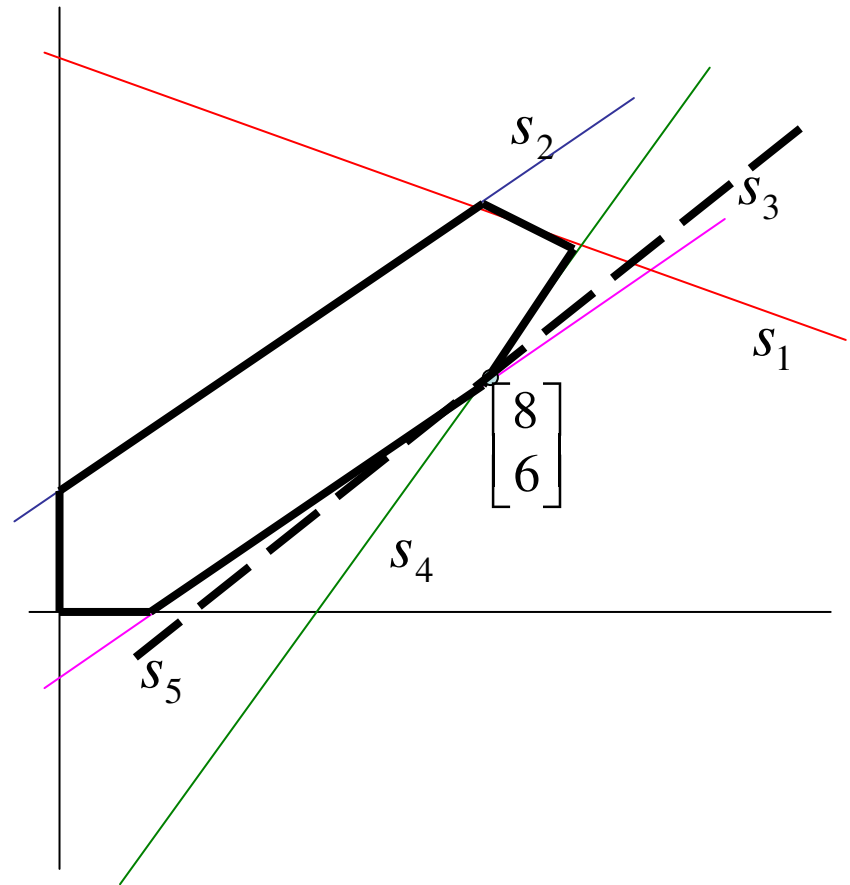
Graphic illustration of degeneracy

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \quad -3x - 2y \\
 \text{s. t.} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 26 \\ -x + y \leq 3 \\ x - y \leq 2 \\ 2x - y \leq 10 \end{cases} \\
 x, y \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \quad -3x - 2y \\
 \text{s. t.} \quad \begin{cases} x + 2y + s_1 = 26 \\ -x + y + s_2 = 3 \\ x - y + s_3 = 2 \\ 2x - y + s_4 = 10 \end{cases} \\
 x, y, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
 \end{array}$$

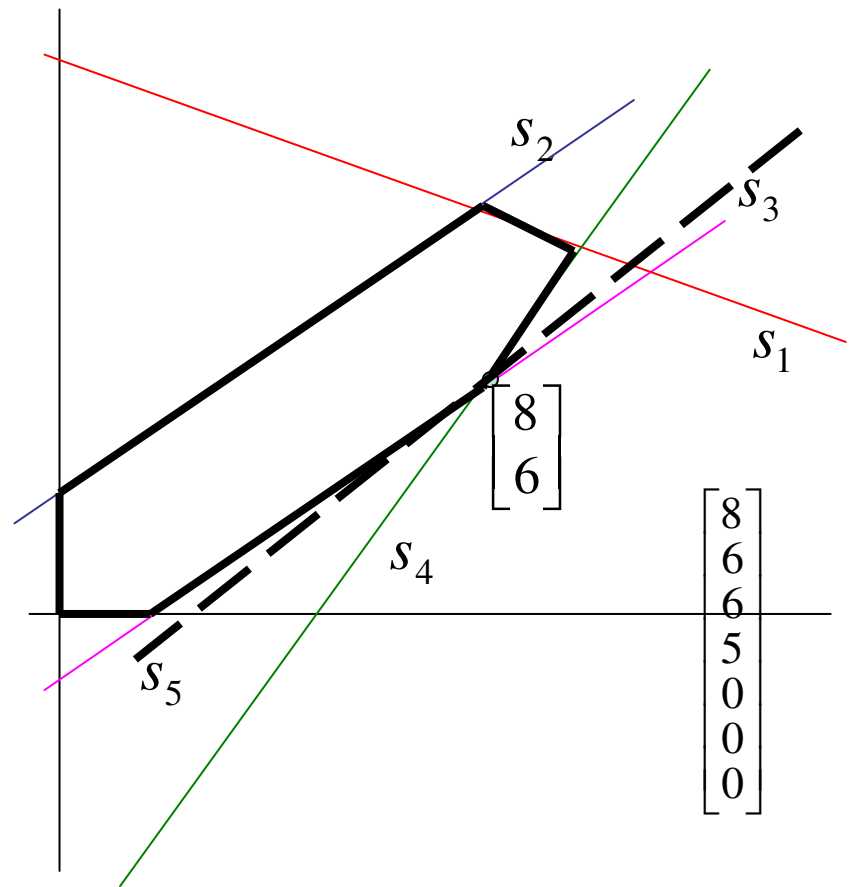


$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & -3x - 2y \\
 \text{s. t.} & x + 2y \leq 26 \\
 & -x + y \leq 3 \\
 & x - y \leq 2 \\
 & \underline{2x - y \leq 10} \\
 & \underline{6x - 5y \leq 18} \\
 & \underline{x, y \geq 0}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & -3x - 2y \\
 \text{s. t.} & x + 2y \leq 26 \\
 & -x + y \leq 3 \\
 & x - y \leq 2 \\
 & 2x - y \leq 10 \\
 & 6x - 5y \leq 18 \\
 & x, y \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & -3x - 2y \\
 \text{s. t.} & x + 2y + s_1 = 26 \\
 & -x + y + s_2 = 3 \\
 & x - y + s_3 = 2 \\
 & 2x - y + s_4 = 10 \\
 & 6x - 5y + s_5 = 18 \\
 & x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0
 \end{array}$$



Bland's criteria to preserve convergence even when degenerary exists

Entering criterion: The entering variable x_s is the non basic variable having the smallest index among those with a negative relative cost ; i.e.,

$$s = \text{Min}_{j=1,\dots,n} \left\{ j : \bar{c}_j < 0 \right\}.$$

Leaving criterion: The leaving variable x_{j_r} (x_{j_r} being the basic variable in the r^{th} row of the tableau) is the basic variable having the smallest index among those candidate the leave; i.e.,

$$j_r = \text{Min}_{l=1,\dots,m} \left\{ j_l : \bar{a}_{ls} > 0, \frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{ls}} = \text{Min}_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} \right\}.$$

Leaving criterion: The leaving variable x_{j_r} (x_{j_r} being the basic variable in the r^{th} row of the tableau) is the basic variable having the smallest index among those candidate the leave; i.e.,

$$j_r = \text{Min}_{l=1, \dots, m} \left\{ j_l : \bar{a}_{ls} > 0, \frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{ls}} = \text{Min}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} \right\}.$$


Important remark:


When

$$\frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{ls}} = \text{Min}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$


is reached for several indices l , then the variable x_{j_r} selected according to Bland's criterion becomes the leaving variable taking the value 0. But the other variables x_{j_l} where the Min is reached remains basic but their values becomes also equal to 0, inducing degeneracy.


	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	1	0


	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0	0	0
 x_6	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	1	0




	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0	0
 x_2	$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0	0
x_7	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	0	1
$-z$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	1	0



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
 x_7	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	0	1
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	1	0



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$\rightarrow x_4$	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{250}$	0	$\frac{1}{250}$
x_1	1	-168	0	0	$-\frac{100}{125}$	$\frac{300}{125}$	$\frac{2}{125}$	0	$\frac{1}{125}$
$-z$	0	36	0	0	$-\frac{175}{125}$	$\frac{275}{125}$	$\frac{1}{125}$	1	$\frac{1}{125}$

↑

Bland's proof of the simplex convergence

Théorème 4.2: En utilisant les critères d'entrée et de sortie de Bland, l'algorithme du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations.

Preuve. (Preuve par contradiction) Supposons qu'au contraire pour un certain problème, l'algorithme ne soit pas complété en un nombre fini d'itérations. Or étant donné qu'il existe un nombre fini de solutions de base réalisables, il s'ensuit que certaines solutions de base réalisables sont répétées au cours de la résolution avec l'algorithme du simplexe; i.e., l'algorithme cycle.

Preuve. (Preuve par contradiction) Supposons qu'au contraire pour un certain problème, l'algorithme ne soit pas complété en un nombre fini d'itérations. Or étant donné qu'il existe un nombre fini de solutions de base réalisables, il s'ensuit que certaines solutions de base réalisables sont répétées au cours de la résolution avec l'algorithme du simplexe; i.e., l'algorithme cycle. Considérons une solution de base d'une itération quelconque. Alors ou bien cette solution réalisable est optimale, ou bien nous décelons que le problème n'est pas borné inférieurement, ou bien les critères d'entrée et de sortie de Bland déterminent de façon unique l'élément du tableau sur lequel le pivot est complété.

Considérons une solution de base d'une itération quelconque. Alors ou bien cette solution réalisable est optimale, ou bien nous décelons que le problème n'est pas borné inférieurement, ou bien les critères d'entrée et de sortie de Bland déterminent de façon unique l'élément du tableau sur lequel le pivot est complété.

Par conséquent si l'algorithme cycle, alors le cycle des solutions de base réalisables qui sont répétées est unique.

Dénotons par $\Gamma \in \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des variables d'entrée au cours des itérations du cycle. Donc si $j \notin \Gamma$, alors x_j demeure une variable de base au cours de toutes les itérations du cycle ou elle demeure un variable hors base au cours de toutes les itérations du cycle. En somme son statut ne change pas au cours des itérations du cycle.

Par conséquent si l'algorithme cycle, alors le cycle des solutions de base réalisables qui sont répétées est unique.

Dénotons par $\Gamma \in \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des variables d'entrée au cours des itérations du cycle. Donc si $j \notin \Gamma$, alors x_j demeure une variable de base au cours de toutes les itérations cycle ou elle demeure un variable hors base au cours de toutes les itérations du cycle. En somme son statut ne change pas au cours de itérations du cycle.

Dénotons également

$$g = \underset{j \in \Gamma}{\text{Max}} \{j\},$$

et utilisons l'indice supérieur $'$ pour désigner les éléments du tableau du simplexe à l'itération où x_g devient variable d'entrée.

Dénotons également

$$g = \operatorname{Max}_{j \in \Gamma} \{j\},$$

et utilisons l'indice supérieur ' pour désigner les éléments du tableau du simplexe à l'itération où x_g devient variable d'entrée.

x_1	x_2	\dots	x_g	\dots	x_n	$-z$	
\bar{a}'_{11}	\bar{a}'_{12}	\dots	\bar{a}'_{1g}	\dots	\bar{a}'_{1n}	0	\bar{b}'_1
\bar{a}'_{21}	\bar{a}'_{22}	\dots	\bar{a}'_{2g}	\dots	\bar{a}'_{2n}	0	\bar{b}'_2
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
\bar{a}'_{m1}	\bar{a}'_{m2}	\dots	\bar{a}'_{mg}	\dots	\bar{a}'_{mn}	0	\bar{b}'_m
\bar{c}'_1	\bar{c}'_2	\dots	\bar{c}'_g	\dots	\bar{c}'_n	1	$-\bar{z}'$

Dénotons par $h^T \in R^{n+1}$ la dernière ligne du tableau:

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right].$$

x_1	$x_2 \dots$	$x_g \dots$	x_n	$-z$	
\bar{a}'_{11}	$\bar{a}'_{12} \dots$	$\bar{a}'_{1g} \dots$	\bar{a}'_{1n}	0	\bar{b}'_1
\bar{a}'_{21}	$\bar{a}'_{22} \dots$	$\bar{a}'_{2g} \dots$	\bar{a}'_{2n}	0	\bar{b}'_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\bar{a}'_{m1}	$\bar{a}'_{m2} \dots$	$\bar{a}'_{mg} \dots$	\bar{a}'_{mn}	0	\bar{b}'_m
\bar{c}'_1	$\bar{c}'_2 \dots$	$\bar{c}'_g \dots$	\bar{c}'_n	1	$-\bar{z}'$

Dénotons par $h^T \in R^{n+1}$ la dernière ligne du tableau:

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right].$$

Puisque x_g est la variable d'entrée, il découle du critère d'entrée que toutes les variables ayant un indice plus petit que g ont un coût relatif plus grand ou égal à 0. De plus puisque $g = \text{Max}_{j \in \Gamma} \{j\}$

alors

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad h_j = \bar{c}'_j \geq 0 \quad \forall j \in \Gamma, j \neq g. \quad (2.1)$$

$x_1 \quad x_2 \dots x_g \dots x_n - z$		
$\bar{a}'_{11} \quad \bar{a}'_{12} \dots \bar{a}'_{1g} \dots \bar{a}'_{1n} \quad 0$	\bar{b}'_1	$\begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & A & & \vdots \\ & & & & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_g & \dots & c_n & 1 \end{bmatrix}$
$\bar{a}'_{21} \quad \bar{a}'_{22} \dots \bar{a}'_{2g} \dots \bar{a}'_{2n} \quad 0$	\bar{b}'_2	
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	\vdots	
$\bar{a}'_{m1} \quad \bar{a}'_{m2} \dots \bar{a}'_{mg} \dots \bar{a}'_{mn} \quad 0$	\bar{b}'_m	
$\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \dots \bar{c}'_g \dots \bar{c}'_n \quad 1$	$-\bar{z}'$	

Dénotons par $h^T \in R^{n+1}$ la dernière ligne du tableau:

$$h^T = \begin{bmatrix} \bar{c}'_1 & \bar{c}'_2 & \dots & \bar{c}'_g & \dots & \bar{c}'_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque le tableau précédent a été obtenu du tableau original à l'aide d'une suite de pivots, il s'ensuit que le vecteur h^T est une combinaison linéaire des lignes de cette matrice et qu'il appartient donc à l'espace engendré par les lignes de cette dernière.

Puisque x_g est variable d'entrée à une certaine itération du cycle, elle doit être variable de sortie à une autre itération du cycle.

Utilisons l'indice supérieur " pour désigner le tableau du simplexe associé à cette itération.

Dénotons par

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, \dots, x_{j_m} \quad \text{où} \quad x_{j_r} = x_g$$

les variables de base à cette itération. Dénotons également par x_s

la variable d'entrée identifiée avec le critère de Bland. Ainsi

\bar{a}_{rs}'' est l'élément de pivot.

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots			\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots			\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

Définissons un vecteur $v \in R^{n+1}$ à partir des éléments dans la colonne de la variable d'entrée x_s dans le tableau précédent:

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Par rapport au tableau illustré plus haut le vecteur v prend la forme

$$v^T = [0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$$

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n - z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n} \quad 0$	\bar{b}''_1
\vdots	$[0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$	\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn} \quad 0$	\bar{b}''_r
\vdots	$[0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$	\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn} \quad 0$	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n \quad 1$ $[0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$	$-\bar{z}''$

Le produit scalaire du vecteur v avec chaque ligne du tableau précédent est égal à 0. Ainsi v est perpendiculaire à chaque vecteur ligne du tableau.

Par rapport au tableau illustré plus haut le vecteur v prend la forme

$$v^T = [0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$$

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

$$\left[\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & A & \vdots \\ & & & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & 1 \end{array} \right]$$

Puisque le tableau précédent a été obtenu du tableau original à l'aide d'une suite de pivots, il s'ensuit que le vecteur v est perpendiculaire aux lignes de cette matrice et qu'il est donc orthogonal à l'espace engendré par les lignes de cette dernière.

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = \sum_{l=1}^{n+1} h_l v_l = 0.$$

Notons d'abord que

$$h_{n+1} v_{n+1} = 1 \cdot \bar{c}''_s < 0.$$

Par conséquent, il doit exister au moins un indice j ($1 \leq j \leq n$)

tel que
$$h_j v_j > 0.$$

Or

si $h_j \neq 0$, alors x_j est une variable hors base dans le tableau d'indice supérieur '.

si $v_j \neq 0$, alors x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur '', ou $j = s$.

$$h^T = \left[\vec{c}'_1 \quad \vec{c}'_2 \quad \dots \quad \vec{c}'_g \quad \dots \quad \vec{c}'_n \quad 1 \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

Or

si $h_j \neq 0$, alors x_j est une variable hors base dans le tableau d'indice supérieur '.

si $v_j \neq 0$, alors x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur '', ou $j = s$.

Donc l'indice j doit appartenir à Γ et alors

$$j \leq g.$$

Mais puisque

$$h_g = \vec{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad v_g = \bar{a}''_{rs} > 0,$$

il s'ensuit que $j < g$.

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

Mais puisque

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad v_g = \bar{a}''_{rs} > 0,$$

il s'ensuit que $j < g$.

Il découle donc de (2.1)

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad h_j = \bar{c}'_j \geq 0 \quad \forall j \in \Gamma, j \neq g. \quad (2.1)$$

que $h_j > 0$

et ainsi $v_j > 0$.

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

$$v_j > 0.$$

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

Soit $j = j_p$ tel que $\bar{a}''_{ps} = v_j > 0$.

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ''.

Soit $j = j_p < g$ tel que $\bar{a}''_{ps} = v_j > 0$.

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots			\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots			\vdots
x_{j_p}	$\bar{a}''_{p1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{ps} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{pn}$	0	\bar{b}''_p
\vdots			\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

Au cours des itérations du cycle, chaque variable conserve la même valeur.

En effet, si à une itération du cycle une variable d'entrée augmentait d'une valeur positive, alors la valeur de la fonction économique diminuerait strictement et alors l'algorithme ne pourrait cycliser.

En particulier,

$$x_j = 0 \quad \forall j \in \Gamma$$

au cours de toutes les itérations du cycle.

Par conséquent $x_{j_p} = \bar{b}_p'' = 0$.

En somme, nous venons d'établir les deux faits suivants:

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

Soit $j = j_p < g$ tel que $\bar{a}''_{ps} = v_j > 0$.

et que $x_{j_p} = \bar{b}''_p = 0$.

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots			\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots			\vdots
x_{j_p}	$\bar{a}''_{p1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{ps} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{pn}$	0	0
\vdots			\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

Ainsi cette variable x_{j_p} aurait dû être variable de sortie à l'itération ” selon le critère de sortie de Bland.

En somme, nous venons d'établir les deux faits suivants:

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

Soit $j = j_p < g$ tel que $\bar{a}_{ps}'' = v_j > 0$.

et que $x_{j_p} = \bar{b}_p'' = 0$.

Ainsi cette variable x_{j_p} aurait dû être variable de sortie à l'itération ” selon le critère de sortie de Bland.

Ceci est une contradiction au fait que nous ayons retenu plutôt x_g comme variable de sortie.

Donc en utilisant les critères d'entrée et de sortie de Bland, l'algorithme du simplexe ne peut cycler. La décroissance stricte de la valeur de la fonction économique au cours des itérations où il n'y a pas dégénérescence nous assure que l'algorithme du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations. \square