

1. Introduction

Introduction

- **Modélisation**

Utilisation d'un ensemble de relations mathématiques pour refléter **le plus adéquatement possible** une situation réelle

Compromis entre l'**adéquation avec la réalité** et **la facilité de résoudre le modèle**

Modèle mathématique

- **Trois entités à identifier**
 - i) l'ensemble des **actions (activités)** qui s'offrent à l'agent de décision (**variables**)
 - ii) l'**objectif** visé exprimé sous la forme d'une fonction mathématique (**fonction économique**)
 - iii) Les **règles** définissant la nature du système à l'étude exprimées en termes de relations mathématiques (**contraintes**)

Résolution

- **Trois entités à identifier**

- i) l'ensemble des **actions** (**activités**) qui s'offrent à l'agent de décisions (**variables**)
- ii) l'**objectif** visé exprimé sous la forme d'une fonction mathématique (**fonction économique**)
- iii) Les **contraintes** définissant la nature du système à l'étude exprimées en termes de relations mathématiques (**contraintes**)

- **Résolution du modèle**

Utiliser une procédure (algorithme, méthode) pour déterminer

les valeurs des variables représentant l'amplitude de l'utilisation des diverses actions

pour optimiser la fonction économique (atteindre l'objectif)

en respectant les contraintes imposées

Modèle linéaire

Deux propriétés particulières:

1. **Additivité des variables:** l'effet global des **actions** prises (**variables**) est égale à la somme des effets particuliers de chacune des **actions** (**variables**).
Il n'y a pas d'effet croisé des actions
2. **Les variables prennent toujours des valeurs non négatives**

Exemple 1: problème de diète

- 3 types de grains disponibles pour nourrir le troupeau: g_1 , g_2 , g_3
- Chaque kg de grain contient des quantités de 4 éléments nutritifs: ENA, ENB, ENC, END
- La quantité hebdomadaire requise de chaque élément nutritif est spécifiée
- Le prix au kg de chaque type de grains est spécifié.
- **Problème:** Déterminer la quantité de chaque grain (en kg) à utiliser pour établir une diète à coût minimum respectant la quantité requise de chaque élément nutritif

Données du problème

- 3 types de grains disponibles pour nourrir le troupeau: g_1 , g_2 , g_3
- Chaque kg de grain contient 4 éléments nutritifs: ENA, ENB, ENC, END
- La quantité hebdomadaire requise de chaque élément nutritif est spécifiée
- Le prix au kg de chaque type de grains est spécifié.

- Problème: Déterminer la quantité de chaque grain (en kg) à utiliser pour établir une diète à coût minimum respectant la quantité requise de chaque élément nutritif

Variables du problème

- 3 types de grains disponibles pour nourrir le troupeau: g1, g2, g3
- Chaque kg de grain contient 4 éléments nutritifs: ENA, ENB, ENC, END
- La quantité hebdomadaire requise de chaque élément nutritif est spécifiée
- Le prix au kg de chaque type de grains est spécifié.

- Problème: Déterminer la quantité de chaque grain (en kg) à utiliser pour établir une diète à coût minimum respectant la quantité requise de chaque élément nutritif

i) Activités ou actions du modèle

<u>Actions</u>	<u>variables</u>
# kg de g1	x_1
# kg de g2	x_2
# kg de g3	x_3

Fonction économique et contraintes

ii) Fonction économique

Coût de la diète par semaine =

$$41x_1 + 35x_2 + 96x_3$$

à minimiser

iii) Contraintes

ENA: $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 1250$

ENB: $1x_1 + 1x_2 \geq 250$

ENC: $5x_1 + 3x_2 \geq 900$

END: $0.6x_1 + 0.25x_2 + x_3 \geq 232.5$

	g1	g2	g3	quantité hebd.
ENA	2	3	7	1250
ENB	1	1	0	250
ENC	5	3	0	900
END	0.6	0.25	1	232.5
\$/kg	41	35	96	

Non négativité des variables:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Modèle mathématique

ii) Fonction économique

Coût de la diète par semaine =

$$41x_1 + 35x_2 + 96x_3$$

à minimiser

iii) Contraintes

$$\text{ENA: } 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 1250$$

$$\text{ENB: } 1x_1 + 1x_2 \geq 250$$

$$\text{ENC: } 5x_1 + 3x_2 \geq 900$$

$$\text{END: } 0.6x_1 + 0.25x_2 + x_3 \geq 232.5$$

Non négativité des variables:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\min z = 41x_1 + 35x_2 + 96x_3$$

Sujet à

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 1250$$

$$1x_1 + 1x_2 \geq 250$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 900$$

$$0.6x_1 + 0.25x_2 + x_3 \geq 232.5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Exemple 2: problème d'entreposage

- Entreposage d'une commodité pour vente future.
- Problème s'échelonnant sur 3 périodes successives.
- À chaque période, nous pouvons acheter et/ou vendre, et les prix unitaires d'achat et de vente sont les mêmes

Période t	Prix unitaire (\$)
1	4
2	9
3	6

- Coût unitaire d'entreposage = \$1 par période.
- Capacité de l'entrepôt = 60 unités.
- 30 unités disponibles initialement
- **Problème:** Déterminer pour chaque période les quantités à acheter, à vendre et à entreposer pour maximiser les profits au cours des 3 périodes.

Données du problème

- Entreposage d'une commodité pour vente future.
- Problème s'échelonnant sur 3 périodes successives.
- À chaque période, nous pouvons acheter et/ou vendre, et les prix unitaires d'achat et de vente sont les mêmes

<u>Période t</u>	<u>Prix unitaire (\$)</u>
1	4
2	9
3	6

- Coût unitaire d'entreposage = \$1/ période.
- Capacité de l'entrepôt = 60 unités.
- 30 unités disponibles initialement
- **Problème:** Déterminer pour chaque période les quantités à acheter, à vendre et à entreposer pour maximiser les profits au cours des 3 périodes.

Variables du problème

- Entreposage d'une commodité pour vente future.
- Problème s'échelonnant sur 3 périodes successives.
- À chaque période, nous pouvons acheter et/ou vendre, et les prix unitaires d'achat et de vente sont les mêmes

Période t	Prix unitaire (\$)
1	4
2	9
3	6

- Coût unitaire d'entreposage = \$1/période.
- Capacité de l'entrepôt = 60 unités.
- 30 unités disponibles initialement
- **Problème:** Déterminer pour chaque période les quantités à acheter, à vendre et à entreposer pour maximiser les profits au cours des 3 périodes.

i) Activités ou actions du modèle

Actions variables
à chaque période t

Acheter	x_{t1}
Entreposer	x_{t2}
Vendre	x_{t3}

Fonction économique

À chaque période t	
Acheter	x_{t1}
Entreposer	x_{t2}
Vendre	x_{t3}

- Entreposage d'une commodité pour vente future.
- Problème s'échelonnant sur 3 périodes successives.
- À chaque période, nous pouvons acheter et/ou vendre, et les prix unitaires d'achat et de vente sont les mêmes

Période t	Prix unitaire (\$)
1	4
2	9
3	6

- Coût unitaire d'entreposage = \$1/période.
- Capacité de l'entrepôt = 60 unités.
- 30 unités disponibles initialement
- **Problème:** Déterminer pour chaque période les quantités à acheter, à vendre et à entreposer pour maximiser les profits au cours des 3 périodes.

ii) Fonction économique

Revenu net

$$-4x_{11} - x_{12} + 4x_{13} \quad (\text{période 1})$$

$$-9x_{21} - x_{22} + 9x_{23} \quad (\text{période 2})$$

$$-6x_{31} - x_{32} + 6x_{33} \quad (\text{période 3})$$

à maximiser

Contraintes

À chaque période t	
Acheter	x_{t1}
Entreposer	x_{t2}
Vendre	x_{t3}

- Entreposage d'une commodité pour vente future.
- Problème s'échelonnant sur 3 périodes successives.
- À chaque période, nous pouvons acheter et/ou vendre, et les prix unitaires d'achat et de vente sont les mêmes

Période t	Prix unitaire (\$)
1	4
2	9
3	6

- Coût unitaire d'entreposage = \$1/période.
- Capacité de l'entrepôt = 60 unités.
- 30 unités disponibles initialement
- **Problème:** Déterminer pour chaque période les quantités à acheter, à vendre et à entreposer pour maximiser les profits au cours des 3 périodes.

ii) Contraintes

Deux contraintes pour chaque période

période 1:

$$x_{12} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$\underbrace{30 + x_{11}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{12} + x_{13}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

période 2:

$$x_{22} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$\underbrace{x_{12} + x_{21}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{22} + x_{23}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

période 3:

$$x_{32} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$\underbrace{x_{22} + x_{31}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{32} + x_{33}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

Contraintes

À chaque période t	
Acheter	x_{t1}
Entreposer	x_{t2}
Vendre	x_{t3}

- Entreposage d'une commodité pour vente future.
- Problème s'échelonnant sur 3 périodes successives.
- À chaque période, nous pouvons acheter et/ou vendre, et les prix unitaires d'achat et de vente sont les mêmes

Période t	Prix unitaire (\$)
1	4
2	9
3	6

- Coût unitaire d'entreposage = \$1/période.
- Capacité de l'entrepôt = 60 unités.
- 30 unités disponibles initialement
- **Problème:** Déterminer pour chaque période les quantités à acheter, à vendre et à entreposer pour maximiser les profits au cours des 3 périodes.

ii) Contraintes

période 1:

$$x_{12} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$\underbrace{30 + x_{11}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{12} + x_{13}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

période 2:

$$x_{22} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$\underbrace{x_{12} + x_{21}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{22} + x_{23}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

période 3:

$$x_{32} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$\underbrace{x_{22} + x_{31}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{32} + x_{33}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

Variables non-négatives:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$$

Contraintes

À chaque période t	
Acheter	x_{t1}
Entreposer	x_{t2}
Vendre	x_{t3}

ii) Contraintes

période 1:

$$x_{12} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$-x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{30 + x_{11}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{12} + x_{13}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

période 2:

$$x_{22} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$-x_{12} - x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x_{12} + x_{21}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{22} + x_{23}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

période 3:

$$x_{32} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$-x_{22} - x_{31} + x_{32} + x_{33} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x_{22} + x_{31}}_{\text{disponible}} = \underbrace{x_{32} + x_{33}}_{\text{disposée}} \quad (\text{équation de balance})$$

Variables non-négatives:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$$

Modèle

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_{11} - x_{12} + 4x_{13} - 9x_{21} - x_{22} + 9x_{23} \\ & - 6x_{31} - x_{32} + 6x_{33} \end{aligned}$$

Sujet à

$$x_{12} \leq 60$$

$$-x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$$

$$x_{22} \leq 60$$

$$-x_{12} - x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0$$

$$x_{32} \leq 60$$

$$-x_{22} - x_{31} + x_{32} + x_{33} = 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$$

Fonction économique

$$-4x_{11} - x_{12} + 4x_{13} \quad (\text{période 1})$$

$$-9x_{21} - x_{22} + 9x_{23} \quad (\text{période 2})$$

$$-6x_{31} - x_{32} + 6x_{33} \quad (\text{période 3})$$

à maximiser

Contraintes

période 1:

$$x_{12} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$-x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$$

période 2:

$$x_{22} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$-x_{12} - x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0$$

période 3:

$$x_{32} \leq 60 \quad (\text{capacité})$$

$$-x_{22} - x_{31} + x_{32} + x_{33} = 0$$

Variables non-négatives:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$$

Problème du restaurateur

- **Disponibilités du restaurateur:**
 - 30 oursins
 - 24 crevettes
 - 18 huîtres
- **Deux types d'assiettes de fruits de mer offertes par le restaurateur:**
 - à \$8 composée de 5 oursins, 2 crevettes et 1 huître
 - à \$6 composée de 3 oursins, 3 crevettes et 3 huîtres
- **Problème:** déterminer le nombre d'assiettes de chaque type à offrir pour que le restaurateur maximise son revenu en respectant les disponibilités de fruits de mer

Variables du problème

- **Disponibilités du restaurateur:**

30 oursins
24 crevettes
18 huîtres

- ii) **Activités ou actions du modèle**

<u>Actions</u>	<u>variables</u>
# ass. \$8	x
# ass. \$6	y

- **Deux types d'assiettes de fruits de mer offertes par le restaurateur:**

à \$8 composée de 5 oursins, 2 crevettes et 1 huître

à \$6 composée de 3 oursins, 3 crevettes et 3 huîtres

- **Problème:** déterminer le nombre d'assiettes de chaque type à offrir pour que le restaurateur maximise son revenu en respectant les disponibilités de fruits de mer

Fonction économique et contraintes

- **Disponibilités du restaurateur:**

30 oursins
24 crevettes
18 huîtres

- **Deux types d'assiettes de fruits de mer offertes par le restaurateur:**

à \$8 composée de 5 oursins, 2 crevettes et 1 huître

à \$6 composée de 3 oursins, 3 crevettes et 3 huîtres

- **Problème:** déterminer le nombre d'assiettes de chaque type à offrir pour que le restaurateur maximise son revenu en respectant les disponibilités de fruits de mer

- i) **Activités ou actions du modèle**

- ii) **Fonction économique**

revenu du restaurateur =

$$8x + 6y$$

à maximiser

- iii) **Contraintes**

oursins: $5x + 3y \leq 30$

crevettes: $2x + 3y \leq 24$

huîtres: $1x + 3y \leq 18$

non négativité des variables:

$$x, y \geq 0$$

Modèle mathématique

$$\begin{array}{l} \max \quad 8x + 6y \\ \text{Sujet à} \\ 5x + 3y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ 1x + 3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{array}$$

i) **Activités ou actions du modèle**

ii) **Fonction économique**

revenu du restaurateur =

$$8x + 6y$$

à maximiser

iii) **Contraintes**

oursins: $5x + 3y \leq 30$

crevettes: $2x + 3y \leq 24$

huîtres: $1x + 3y \leq 18$

non négativité des variables:

$$x, y \geq 0$$