

Modèles stochastiques

Révision de probabilité et de statistiques

1. Espace échantillon

Soit une expérience dont le résultat n'est pas prévisible avec certitude à l'avance (**expérience aléatoire**).

Supposons que nous connaissons à l'avance tous les résultats possibles pour constituer un ensemble dénoté **espace échantillon S** .

Exemples

a) Tirage d'une pièce de monnaie:

$$S = \{P, F\}$$

b) Lancement d'un dé:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

c) Lancement de deux dés:

$$S = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

2. Axiomes des probabilités

Considérons un sous-ensembles $E \subset S$ où S est un espace echantillon.

Exemple:

les différents sous-ensemble de S lors du lancement d'un dé:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Empériquement, si une expérience est continuellement répétée dans exactement les mêmes conditions, alors pour tout sous-ensemble $E \subset S$, la proportion du temps que le résultat est contenu dans le sous-ensemble E tend vers une valeur $P(E)$ qui devient constante à mesure que le nombre de répétitions augmente.

Considérons un sous-ensemble $E \subset S$ où S est un espace échantillon.

Empériquement, si une expérience est continuellement répétée dans exactement les mêmes conditions, alors pour tout sous-ensemble $E \subset S$, la proportion du temps que le résultat est contenu dans le sous-ensemble E tend vers une valeur $P(E)$ qui devient constante à mesure que le nombre de répétitions augmente.

P peut être vu comme une fonction qui associe une **probabilité** de réalisation $P(E)$ au sous-ensemble E , et cette fonction satisfait les axiomes suivants:

Axiome 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axiome 2: $P(S) = 1$

Axiome 3: Pour toute suite E_1, \dots, E_n de sous-ensembles mutuellement exclusifs

(i.e., $E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

Exemple:

Les différents sous-ensembles de S lors du lancement d'un dé:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{Axiome 1})$$

$$P(\varnothing) = 0 \quad (\text{Axiome 1})$$

$$P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1 \quad (\text{Axiome 2})$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) \quad (\text{Axiome 3})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Axiome 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axiome 2: $P(S) = 1$

Axiome 3: Pour toute suite E_1, \dots, E_n de sous-ensembles mutuellement exclusifs

(i.e., $E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

3. Probabilités conditionnelles

Considérons deux sous-ensembles E et F de l'espace échantillon S : $E, F \subset S$.
Nous désirons déterminer la probabilité conditionnelle que le résultat de l'expérience soit dans E étant donné que nous savons que le résultat est dans F

$$P(E|F).$$

Si le résultat est dans F , pour qu'il soit aussi dans E il faut que le résultat soit à la fois dans E et F ; i.e., dans EF .

De plus, puisque le résultat est dans F , alors l'espace échantillon où se trouve le résultat ($E|F$) est donc le sous-ensemble F .

Donc la probabilité de ($E|F$) est donc la probabilité de EF dans l'espace échantillon S relativement à la probabilité de F dans l'espace échantillon S :

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Exemple

Tirage d'une carte parmi 10 cartes numérotées 1 à 10: $S = \{1, \dots, 10\}$

Probabilité que la carte tirée soit le 10 (E) étant donné que le numero de la carte tirée est au moins égal à 5 (F): $P(E|F)$.

Problème est équivalent à déterminer la probabilité que la carte soit le 10 dans l'échantillon $F : \{5, \dots, 10\}$.

Donc
$$P(E|F) = \frac{1}{6}$$

Pour que la carte tirée soit à la fois dans E (carte est le 10) et dans F (numéro de la carte est au moins 5), est équivalent à exiger qu'elle soit dans E : $EF = E$.

$$P(EF) = P(E) = \frac{1}{10}$$

Également
$$P(F) = \frac{6}{10}$$

Problème est équivalent à déterminer la probabilité que la carte soit le 10 dans l'échantillon $F : \{5, \dots, 10\}$.

Donc
$$P(E|F) = \frac{1}{6}$$

Pour que la carte tirée soit à la fois dans E (carte est le 10) et dans F (numéro de la carte est au moins 5), est équivalent à exiger qu'elle soit dans $E : EF = E$.

$$P(EF) = P(E) = \frac{1}{10}$$

Également
$$P(F) = \frac{6}{10}$$

Ainsi
$$\frac{1}{6} = P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{6}$$

4. Variables aléatoires

Quand nous procédons à une expérience, souvent nous ne sommes pas intéressés à tous les détails de celle-ci, mais plutôt à une quantité numérique associée au résultat et qui correspond à une **variable aléatoire**.

Exemple: Considérons l'expérience du lancement de deux dés.

Ce qui nous intéresse est **la somme des faces des deux dés** que nous dénotons par la **variable aléatoire X** :

X variable entière prenant une valeur entre 2 et 12.

Puisque la valeur que prend une variable aléatoire est déterminée par le résultat d'une expérience, nous pouvons associer des probabilités aux valeurs de la variable aléatoire.

Quand nous procédons à une expérience, souvent nous ne sommes pas intéressés à tous les détails de celle-ci, mais plutôt à une quantité numérique associée au résultat et qui correspond à une **variable aléatoire**.

Exemple: Considérons l'expérience du lancement de deux dés.

Ce qui nous intéresse est **la somme des faces des deux dés** que nous dénotons par la **variable aléatoire X** :

X variable entière prenant une valeur entre 2 et 12.

$$P(X = 2) = P(\{1, 1\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(\{1, 2\}, \{2, 1\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{4, 2\}, \{5, 1\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{6, 6\}) = \frac{1}{36}$$

5. Variable aléatoire discrète

Lorsque la variable aléatoire peut prendre un nombre dénombrable de valeurs, alors la variable aléatoire est discrète.

Considérons une variable aléatoire discrète X pouvant prendre une des valeurs x_1, x_2, \dots

La fonction de probabilité $p(a)$ de X est définie comme suit:

$$p(a) = P(X = a).$$

La fonction $p(a)$ prend une valeur positive pour un nombre dénombrable de valeurs de a :

$$p(x_i) = P(X = x_i) > 0 \quad 1 = 1, 2, \dots$$

Puisqu'elle doit prendre une des valeurs alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$$

Lorsque la variable aléatoire peut prendre un nombre dénombrable de valeurs, alors la variable aléatoire est discrète.

Considérons une variable aléatoire discrète X pouvant prendre une des valeurs x_1, x_2, \dots

La **fonction de probabilité** $p(a)$ de X est définie comme suit:

$$p(a) = P(X = a).$$

La **fonction de distribution cumulative** $F(a)$ de X est définie comme suit:

$$F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i).$$

Exemple: Variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs 1, 2, ou 3, où

$$p(1) = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{1}{3}, \quad p(3) = \frac{1}{6}$$

La fonction de distribution cumulative est de la forme

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq a < 2 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq a \end{cases}$$

Considérons une variable aléatoire discrète X pouvant prendre une des valeurs x_1, x_2, \dots

La **fonction de probabilité** $p(a)$ de X est définie comme suit:

$$p(a) = P(X = a).$$

La **fonction de distribution cumulative** $F(a)$ de X est définie comme suit:

$$F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i).$$

Voici 3 exemples de variables aléatoires discrètes qui sont souvent rencontrées.

5.1 Variable aléatoire de Bernoulli

Considérons une expérience dont le résultat est soit un succès ou un insuccès:

$X = 1$ si le résultat est un succès

$X = 0$ si le résultat est un insuccès.

Dénotons la probabilité que le résultat soit un succès par \bar{p} où

$$0 < \bar{p} < 1.$$

La fonction de probabilité de la **variable aléatoire de Bernoulli** est alors:

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - \bar{p}$$

$$p(1) = P(X = 1) = \bar{p}$$

5.2 Variable aléatoire binomiale

Considérons une expérience où n essais sont complétés indépendamment, chaque essai pouvant être un succès avec une probabilité de \bar{p} ou un insuccès avec une probabilité de $(1 - \bar{p})$.

Si X représente le nombre de succès parmi les n essais, alors X est une variable aléatoire binomiale avec les paramètres (n, \bar{p}) .

La fonction de probabilité de la variable aléatoire binomiale est alors:

$$p(i) = \binom{n}{i} \bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

La fonction de probabilité de la **variable aléatoire binomiale** est alors:

$$p(i) = \binom{n}{i} \bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)} \quad i = 1, \dots, n$$

où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Puisque nous supposons que les n essais sont indépendants, alors toute séquence où nous retrouvons i succès et $(n-i)$ insuccès a une probabilité de $\bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)}$.

La valeur de la probabilité découle du fait qu'il y a $\binom{n}{i}$ séquences différentes où nous retrouvons i succès et $(n-i)$ insuccès.

5.3 Variable aléatoire Poisson

Considérons une variable aléatoire X prenant les valeurs discrètes $0, 1, 2, \dots$

X est une **variable aléatoire de Poisson** avec le paramètre λ , si pour un $\lambda > 0$,

$$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Les valeurs $p(i)$ définissent bien une fonction de probabilité puisque

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Cette variable aléatoire de Poisson joue un rôle très important dans la théorie des files d'attente.

6. Variable aléatoire continue

Considérons maintenant les variables aléatoires pouvant prendre un nombre non dénombrable de valeurs.

Nous disons que X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction $f(x)$ non négative définie pour toutes les valeurs réelles $x \in (-\infty, \infty)$ telle que pour toute paire de points a et b

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

La fonction $f(x)$ est la **fonction de densité de probabilité**

Notons que

$$P(X \in (-\infty, \infty)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$$

Considérons maintenant les variables aléatoires pouvant prendre un nombre non dénombrable de valeurs.

Nous disons que X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction $f(x)$ non négative définie pour toutes les valeurs réelles $x \in (-\infty, \infty)$ telle que pour toute paire de points a et b

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

La fonction $f(x)$ est la **fonction de densité de probabilité**

La **fonction de distribution cumulative** $F(a)$ de X est définie comme suit:

$$F(a) = P(X \in (-\infty, a]) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

La fonction $f(x)$ est la **fonction de densité de probabilité**

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

La **fonction de distribution cumulative** $F(a)$ de X est définie comme suit:

$$F(a) = P(X \in (-\infty, a)) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Si nous prenons la dérivée de chaque côté de la fonction cumulative de distribution cumulative $F(a)$

$$\frac{d}{da} F(a) = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^a f(x) dx = f(a)$$

Ainsi, la fonction de densité de probabilité est la dérivée de la fonction cumulative de distribution.

La fonction $f(x)$ est la **fonction de densité de probabilité**

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

La **fonction de distribution cumulative** $F(a)$ de X est définie comme suit:

$$F(a) = P(X \in (-\infty, a)) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Une interprétation plus intuitive de la fonction de densité de probabilité est obtenue comme suit:

$$P\left(a - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \int_{a - \frac{\varepsilon}{2}}^{a + \frac{\varepsilon}{2}} f(x) dx \approx \varepsilon f(a)$$

pour ε petit.

Ainsi la probabilité que X soit contenue dans un intervalle de longueur ε autour d'un point a est approximativement égale à $\varepsilon f(a)$.

Il s'ensuit que $f(a)$ mesure à quel point la variable aléatoire pourrait se trouver près de a .

Voici 2 exemples de variables aléatoires continues qui sont souvent rencontrées.

6.1 Variable aléatoire exponentielle

Considérons la variable aléatoire continue X ayant la **fonction de densité de probabilité** suivante pour une valeur $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors X est une **variable aléatoire exponentielle** avec paramètre λ .

La **fonction cumulative de distribution** F est de la forme:

$$F(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a}, \quad a \geq 0.$$

Notons que:

$$F(\infty) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \infty} = 1.$$

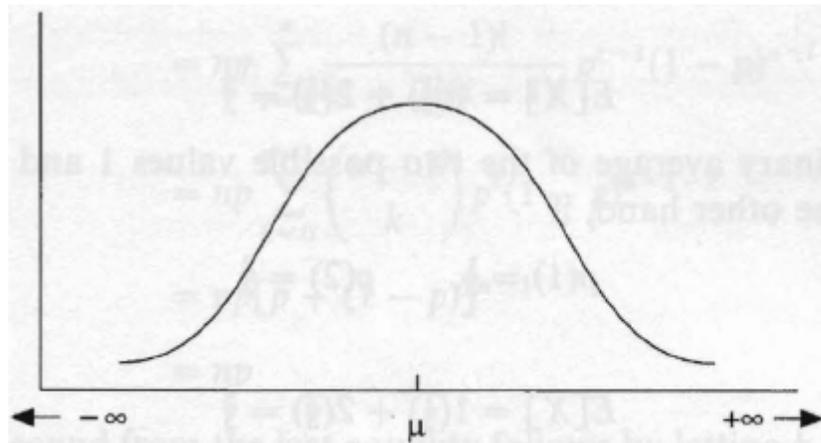
6.2 Variable aléatoire normale

Considérons la variable aléatoire continue X ayant la **fonction de densité de probabilité** suivante pour des paramètres μ et σ^2 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Alors X est une **variable aléatoire normale avec paramètres μ et σ^2** .

La courbe de la fonction de densité est symétrique par rapport à μ .



7. Espérance mathématique (moyenne) d'une variable discrète

Pour une variable X aléatoire discrète dont les valeurs possibles sont x_1, x_2, \dots

l'espérance mathématique (moyenne) est définie comme suit

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

En somme, l'espérance mathématique (moyenne) de X est la somme pondérée de toutes les valeurs possibles que X peut prendre, chaque valeur étant pondérée par la probabilité que X la prenne.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Exemple: Considérons l'expérience du lancement de deux dés.

X = la somme des faces des deux dés

X variable entière prenant une valeur entre 2 et 12.

$$P(X = 2) = P(\{1,1\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(\{1,2\}, \{2,1\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{1,5\}, \{2,4\}, \{3,3\}, \{4,2\}, \{5,1\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{6,6\}) = \frac{1}{36}$$

$$E[X] = 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{2}{36} + \dots + 6 \frac{5}{36} + \dots + 12 \frac{1}{36} = 7$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Exemples:

a) Tirage d'une pièce de monnaie:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si pile} \\ 1 & \text{si face} \end{cases}$$

$$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = 0 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Lancement d'un dé:

$X =$ valeur sur la face du dé étant 1,2,3,4,5, ou 6

$$P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6$$

$$E[X] = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6}21 = 3.5$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

7.1 Variable aléatoire de Bernoulli

Considérons une expérience dont le résultat est soit un succès ou un insuccès:

$X = 1$ si le résultat est un succès

$X = 0$ si le résultat est un insuccès.

Dénotons la probabilité que le résultat soit un succès par \bar{p} où

$$0 < \bar{p} < 1.$$

La fonction de probabilité de la **variable aléatoire de Bernoulli** est alors:

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - \bar{p}$$

$$p(1) = P(X = 1) = \bar{p}$$

$$E[X] = 0(1 - \bar{p}) + 1\bar{p} = \bar{p}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

7.2 Variable aléatoire binomiale

Si X représente le nombre de succès parmi les n essais, alors X est une variable aléatoire binomiale avec les paramètres (n, \bar{p}) .

La fonction de probabilité de la variable aléatoire binomiale est alors:

$$p(i) = \binom{n}{i} \bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^n ip(i) \\ &= \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} \bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{in!}{i!(n-i)!} \bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \bar{p}^i (1 - \bar{p})^{(n-i)} \\ &= n\bar{p} \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \bar{p}^{(i-1)} (1 - \bar{p})^{(n-i)} \end{aligned}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^n ip(i) \\ &= \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{in!}{i!(n-i)!} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{(n-i)} \\ &= n\bar{p} \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \bar{p}^{(i-1)} (1-\bar{p})^{(n-i)} \\ &= n\bar{p} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k)!(n-1-k)!} \bar{p}^k (1-\bar{p})^{(n-1-k)} \\ &= n\bar{p} [\bar{p} + 1 - \bar{p}]^{n-1} \\ &= n\bar{p} \end{aligned}$$

en prenant $k = i - 1$

7.3 Variable aléatoire Poisson

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Considérons une variable aléatoire X prenant les valeurs discrètes $0, 1, 2, \dots$

X est une **variable aléatoire de Poisson** avec le paramètre λ , si pour un $\lambda > 0$,

$$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{(i-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(i-1)}}{(i-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

$$\text{puisque } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

8. Espérance mathématique (moyenne) d'une variable continue

Pour une variable X aléatoire continue ayant une fonction de densité de probabilité $f(x)$, l'espérance mathématique (moyenne) est définie comme suit

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

8.1 Variable aléatoire exponentielle

Considérons la variable aléatoire exponentielle X avec paramètre λ ayant la fonction de densité de probabilité suivante

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx && \text{(intégration par parties)} \\ &= 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Intégration par partie:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} (-x) (-\lambda e^{-\lambda x}) dx \\ &= (-x)(e^{-\lambda x}) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-1)(e^{-\lambda x}) dx \\ &= 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

8.2 Variable aléatoire normale

Considérons la variable aléatoire normale X ayant la **fonction de densité de probabilité** suivante pour des paramètres μ et σ^2 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx && \text{(remplaçant } x \text{ par } (x-\mu) + \mu \text{ pour avoir)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \mu \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right) \\ &= 0 + \mu 1 = \mu \end{aligned}$$