Modèles stochastiques

Chaînes de Markov discrètes

1. Processus stochastique discret

Suite de variables aléatoires $\{X_t\}, t \in T$

T est un ensemble d'entiers non-négatifs et

X_t représente une mesure d'une caractéristique au temps t

2. Processus stochastique discret avec un espace d'états fini

Processus stochastique décrivant l'évolution d'un système qui est modifié dans le temps.

Structure:

$M+1$ états mutuellement exclusifs: $0, 1, \ldots, M$

$X_t =$ état du système au temps t : $X_t \in \{0, 1, \ldots, M\}$

$\{X_t\} = \{X_0, X_1, \ldots\}$ représentation du statut du système dans le temps.

2. Processus stochastique discret avec une espace d'états fini

Processus stochastique décrivant l'évolution d'un système qui est modifié dans le temps.

Structure:

$M+1$ états mutuellement exclusifs: $0,1,\ldots,M$

X_t = état du système au temps t : $X_t \in \{0,1,\ldots,M\}$

$\{X_t\}=\{X_0,X_1,\ldots\}$ représentation du statut du système dans le temps.

Exemple de la météo

Évolution de la météo d'un jour à l'autre. Souvent la météo à un jour donné peut dépendre de la météo de la veille.

Observations sur les jours $t=0,1,\ldots$

États de la météo le jour t :

état 0: beau

état 1: pluie.

Dénotons

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{beau le jour } t \\ 1 & \text{pluie le jour } t. \end{cases}$$

Processus stochastique $\{X_t\}=\{X_0,X_1,\ldots\}$

3. Chaînes de Markov

Propriété markovienne est souvent une hypothèse souvent faite pour faciliter l'étude d'un processus stochastique $\{X_t\} = \{X_0, X_1, \ldots\}$.

Le processus stochastique $\{X_t\} = \{X_0, X_1, \ldots\}$ est une chaîne de Markov $($ou possède la propriété markovienne$)$ si

$$P\left(X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots X_t = i\right) = P\left(X_{t+1} = j \mid X_t = i\right).$$

Probabilité conditionnelle de l'état demain X_{t+1} étant donné les états passés $(0, 1, \ldots, t-1)$ et de celui d'aujourd'hui t est indépendantes des états passés; i.e., probabilité conditionnelle de l'état de demain X_{t+1} depend uniquement de l'état d'aujourd'hui X_t.

Le processus stochastique est dit sans mémoire

4. Probabilités de transition

Probabilités de transition entre deux moments consécutifs t et $(t+1)$

$$p_{ij} = P\left(X_{t+1} = j \mid X_t = i\right) = P\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right) \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}$$

Propriétés:

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

probabilités de transition restent stationnaires dans le temps

$$P\left(X_{t+1} = j \mid X_t = i\right) = P\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right) \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$P(\text{beau demain} \mid \text{beau aujourd'hui}) = 0.8$$

$$P(\text{beau demain} \mid \text{pluie aujourd'hui}) = 0.6$$

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{beau le jour } t \\ 1 & \text{pluie le jour } t. \end{cases}$$

Exemple de la météo:

$$p_{00} = P\left(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0\right) = 0.8$$

$$p_{10} = P\left(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1\right) = 0.6$$

$$p_{00} + p_{01} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{01} = 1 - p_{00} = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$p_{10} + p_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{11} = 1 - p_{10} = 1 - 0.6 = 0.4$$

4. Probabilités de transition

Probabilités de transition entre deux moments consécutifs t et $(t+1)$

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \qquad \forall i, j \in \{0, \dots, M\}$$

Matrice de transitions

$$\begin{array}{ccc} \text{états} & & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & M \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{bmatrix} & P = & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{M0} & p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemple de la météo:

$$p_{00} = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = 0.8$$

$$p_{10} = P(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1) = 0.6$$

$$p_{00} + p_{01} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{01} = 1 - p_{00} = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$p_{10} + p_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{11} = 1 - p_{10} = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Exemple du jeu:

Tant qu'un joueur a de l'argent en main, il joue en misant \$1.

Il gagne \$1 avec une probabilité de p.

Il perd sa mise (\$1) avec une probabilité de $(1-p)$.

Le jeux s'arrête lorsque le joueur n'a plus d'argent ou lorqu'il a \$3 en main.

États (somme que le joueur peut avoir en main): 0, 1, 2, 3

Matrice de transition

$$
\begin{array}{cc}
\text{états} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

5. Équations de Chapman-Kolmogorov

Probabilités de transition entre les deux moments t et $(t+n)$

(incluant n transitions)

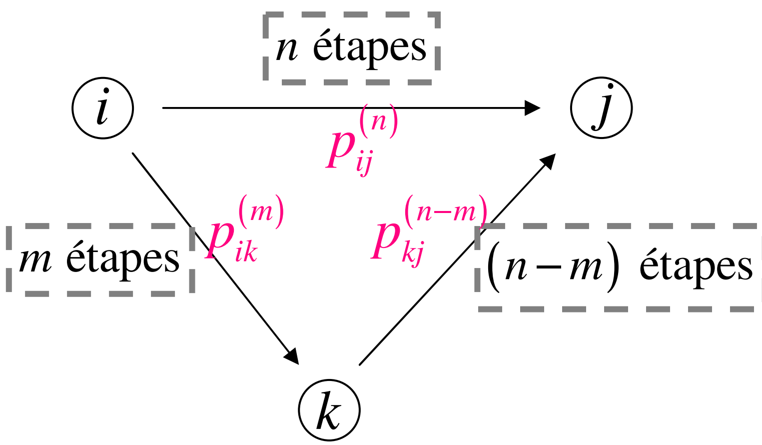
$$p_{ij}^{(n)} = P\left(X_{t+n} = j \mid X_t = i\right) = P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov permettent de determiner les probabilités de transition $p_{ij}^{(n)}$ à partir des probabilités de transition entre deux moments consécutifs p_{ij} :

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)} & \forall i, j \in \{0, \ldots, M\} \\ & m = 1, 2, \ldots, n-1 \\ & n = m+1, m+2, \ldots \end{array}}$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov permettent de determiner les probabilités de transition $p_{ij}^{(n)}$ à partir des probabilités de transition entre deux moments consécutifs p_{ij} :

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_{ij}^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)} & \forall i, j \in \{0, \ldots, M\} \\ & m = 1, 2, \ldots, n-1 \\ & n = m+1, m+2, \ldots \end{array}}$$



On doit considérer tous les états k comme intermédiaires.

Probabilités de transition entre les deux moments t et $(t+n)$

(incluant n transitions)

$$p_{ij}^{(n)} = P\left(X_{t+n} = j \mid X_t = i\right) = P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj} \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\} \longrightarrow P^{(2)} = PP$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\} \longrightarrow P^{(n)} = PP^{(n-1)} = PP^{n-1}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\} \longrightarrow P^{(n)} = P^{(n-1)}P = P^{n-1}P$$

Probabilités de transition entre les deux moments t et $(t+n)$

(incluant n transitions)

$$p_{ij}^{(n)} = P\left(X_{t+n} = j \mid X_t = i\right) = P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}$$

Exemple de la météo:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad P^{(2)} = PP = P^2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = PP^2 = P^3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = PP^3 = P^4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.749 & 0.251 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = PP^4 = P^5 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.749 & 0.251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$P^{(6)} = PP^5 = P^6 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = P^6 = P^7 = P^8 = \ldots$$

6. Probabilités non-conditionnelles des états

Dans le cas où n est petit et que le système n'a pas atteint son stage d'équilibre, il faut connaître les probabilités des états au départ (i.e., à $t=0$)

$$P(X_0 = i) \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}.$$

Alors

$$P(X_n = j) = P(X_n = j \,\&\, X_0 = 0) + \ldots + P(X_n = j \,\&\, X_0 = M)$$

$$P(X_n = j) = P(X_n = j \mid X_0 = 0)\,P(X_0 = 0) + \ldots + P(X_n = j \mid X_0 = M)\,P(X_0 = M)$$

$$= p_{0j}^{(n)} P(X_0 = 0) + \ldots + p_{Mj}^{(n)} P(X_0 = M)$$

Exemple de la météo:

Supposons que $P(X_0 = 0) = 0.3$ et $P(X_0 = 1) = 0.7$

Quelle est la probabilité qu'il pleuve le jour 3, $P(X_3 = 1)$?

$$\boxed{P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix}}$$

$$P(X_3 = 1) = p_{01}^{3} P(X_0 = 0) + p_{11}^{3} P(X_0 = 1)$$

$$= 0.248 \cdot 0.3 + 0.256 \cdot 0.7$$

$$= 0.0744 + 0.1792 = 0.2536$$

7. Classification des états d'une chaîne de Markov

Un état j est accessible à partir de l'état i si

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ pour un certain } n > 0$$

Exemple de la météo:

Les états 0 et 1 sont accessibles à partir des états 0 et 1 puisque

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in \{0,1\}.$$

Un état j est accessible à partir de l'état i si

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ pour un certain } n > 0$$

Exemple du jeu:

Tant qu'un joueur a de l'argent en main, il joue en misant $1.

Il gagne $1 avec une probabilité de p.

Il perd sa mise ($1) avec une probabilité de $(i-p)$.

Le jeux s'arrête lorsque le joueur n'a plus d'argent ou lorqu'il a $3 en main.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'état 3 est accessible à partir de l'état 2 car

$$p_{23} = p > 0$$

Les états 0, 1, 2 ne sont pas accessibles à partir de l'état 3 car on ne peut repartir vers d'autres états à partir de 3 $\Rightarrow \quad p_{30}^{(n)} = 0, p_{31}^{(n)} = 0, p_{32}^{(n)} = 0 \qquad \forall n > 0$

Les états i et j communiquent si

l'état i est accessible à partir de l'état j et l'état j est accessible à partir de l'état i

- i communique avec lui-même $\left(p_{ii}^0 = P\left(X_0 = i \mid X_0 = i\right) = 1\right)$
- i communique avec j $\Leftrightarrow$ j communique avec i
- i communique avec k et k communique avec $j \Rightarrow i$ communique avec j

$$\exists n_1 > 0 \text{ tel que } p_{ik}^{(n_1)} > 0 \quad \text{et} \quad \exists n_2 > 0 \text{ tel que } p_{kj}^{(n_2)} > 0$$

$$\text{Donc} \qquad p_{ij}^{(n_1+n_2)} = \sum_{l=0}^{M} p_{il}^{(n_1)} p_{lj}^{(n_2)} \geq p_{ik}^{(n_1)} \, p_{kj}^{(n_2)} > 0$$

Exemple de la météo:

Les états 0 et 1 communiquent

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in \{0,1\}.$$

Les états i et j communiquent si

l'état i est accessible à partir de l'état j et l'état j est accessible à partir de l'état i

- i communique avec lui-même $\left(p_{ii}^{0} = P\left(X_0 = i \mid X_0 = i\right) = 1\right)$
- i communique avec j $\Leftrightarrow$ j communique avec i
- i communique avec k et k communique avec $j \Rightarrow i$ communique avec j

Exemple du jeux:

Les états 1 et 2 communiquent

$$
\begin{array}{cc}
\text{états} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Une classe est un sous-ensemble de tous les états communiquant entre eux.

> ... the states may be partitioned into one or more separate classes such that those states that communicate with each other are in the same class. H.L.

Une classe est un sous-ensemble de tous les états communiquant entre eux.

Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne comporte qu'une seule classe.

Exemple de la météo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Les états 0 et 1 communiquent} \\ P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in \{0,1\}.\end{array}\right\} \Rightarrow \text{chaîne de Markov irréductible}$$

Exemple du jeux:

Les états 1 et 2 communiquent

$$\left.\begin{array}{cc} \text{états} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \text{ classes: } \{0\}, \{1,2\}, \{3\}$$

Etat transient:

i est un état transient si après y avoir accédé (upon entering this state),

le processus peut ne plus y revenir:

$$i \text{ est transient } \Leftrightarrow \exists\, j(\neq i) \text{ accessible de } i\text{, mais } i \text{ n'est pas accessible de } j$$

Exemple du jeux:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{états} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{les états de la classe } \{1,2\} \text{ sont transients:} \\ \\ \text{0 accessible de 1, mais} \\ \text{1 n'est pas acessible de 0;} \\ \\ \text{3 accessible de 2, mais} \\ \text{2 n'est pas acessible de 3.} \end{cases}$$

Etat récurrent:

i est un état récurrent si après y avoir accédé, le processus y reviendra:

i est récurrent $\Leftrightarrow$ i n'est pas transient

> A state is said to be récurrent if, upon entering this state, the process *definitely will return* to this state again. H.L.

Exemple du jeux:

$$\begin{array}{cc} \text{états} & [\;0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\;] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \text{les états 0 et 3 sont récurrents:} \\ \text{après avoir atteint } 0 \ (\text{ou } 3) \\ \text{on y reste, donc on y revient.} \end{cases}$$

Une chaîne de Markov est irréductible si elle ne comporte qu'une seul classe.

Etat récurrent:

i est un état récurrent si après y avoir accédé, le processus y reviendra:

$$i \text{ est récurrent } \Leftrightarrow i \text{ n'est pas transient}$$

Tous les états d'une chaîne de Markov irréductible sont récurrents.

Exemple de la météo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Les états 0 et 1 communiquent} \\ P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in \{0,1\}.\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{chaîne de Markov irréductible} \\ \\ \text{0 et 1 sont récurrents}\end{cases}$$

Etat absorbant:

i est un état absorbant si après y avoir accédé, le processus ne peut en repartir:

$$i \text{ est absorbant } \Leftrightarrow p_{ii}=1$$

Exemple du jeux:

$$\left.\begin{array}{cc} \text{états} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{les états 0 et 3 sont absorbants} \\ \text{puisque } p_{00} = p_{33} = 1 \end{cases}$$

Exemple pour illustrer les définitions:

$$\text{états} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Etat transient:

i est un état transient si après y avoir accédé, le processus peut ne plus y revenir:

i est transient $\Leftrightarrow$ $\exists\, j(\neq i)$ accessible de i, mais i n'est pas accessible de j

Etat récurrent:

i est un état récurrent si après y avoir accédé, le processus y reviendra:

i est récurrent $\Leftrightarrow$ i n'est pas transient

Etat absorbant:

i est un état absorbant si après y avoir accédé, le processus ne peut en repartir:

i est absorbant $\Leftrightarrow$ $p_{ii}=1$

Une classe est un sous-ensemble d'états communiquant entre eux.

$$\{0,1\},\{2\},\{3\},\{4\}$$

2 est récurrent et absorbant

3 est transient puisque $p_{32} > 0$ et $p_{22} = 1$

4 est transient puisque $p_{40} = 1$ et $\begin{cases} p_{04} = 0 \\ p_{01} > 0 \text{ mais } p_{14} = 0 \end{cases}$

Exemple pour illustrer les définitions:

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} [\;0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\;] \\ P=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \end{array}$$

Etat transient:

i est un état transient si après y avoir accédé, le processus peut ne plus y revenir:

i est transient $\Leftrightarrow \exists\, j(\neq i)$ accessible de i, mais i n'est pas accessible de j

Etat récurrent:

i est un état récurrent si après y avoir accédé, le processus y reviendra:

i est récurrent $\Leftrightarrow$ i n'est pas transient

Etat absorbant:

i est un état absorbant si après y avoir accédé, le processus ne peut en repartir:

i est absorbant $\Leftrightarrow$ $p_{ii}=1$

Une classe est un sous-ensemble d'états communiquant entre eux.

$$\{0,1\},\{2\},\{3\},\{4\}$$

0 et 1 sont récurrents

Tous les éléments d'une classe sont récurrents ou transients.

Il ne peut y avoir une chaîne de Markov dont tous les éléments sont transients.

Période d'un état (Hillier & Lieberman).

i is of périod d if $p_{ii}^{(n)} = 0$ for all values of n other than $d,\ 2d,\ 3d, \ldots$ H.L.

et d est la plus grande valeur entière ayant cette propriété.

$$
\begin{array}{cc}
\text{états} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Exemple du jeux:

Considérons l'état 1 (joueur possède \$1 au départ)

$1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 2

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 4

$3 \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 6

$3 \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 8

$3 \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

donc $d = 2$

Période d'un état (Taylor & Karlin).

La période $d(i)$ de i est le plus grand commun diviseur de tous les entiers n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$. (Par convention, $d(i) = 0$ si $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq 1$.)

$$\begin{array}{cc} \text{états} & [\;0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\;] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemple du jeux:

Considérons l'état 1 (joueur possède \$1 au départ)

$1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 2 $p_{11}^{(2)} > 0$

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 4 $p_{11}^{(4)} > 0$

$3 \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 6 $p_{11}^{(6)} > 0$

$3 \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$ revient à 1 au temps 8 $p_{11}^{(8)} > 0$

$3 \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\boxed{\text{donc } d(i) = 2}$

Période d'un état (Hillier & Lieberman).

i is of périod d if $p_{ii}^{(n)} = 0$ for all values of n other than $d,\ 2d,\ 3d, \ldots$ H.L.

et d est la plus grande valeur entière ayant cette propriété.

Période d'un état (Taylor & Karlin).

La période $d(i)$ de i est le plus grand commun diviseur de tous les entiers n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$. (Par convention, $d(i) = 0$ si $p_{ii}^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq 1$.)

On peut démontrer que la période est la même pour tous les états d'une classe.

i est apériodic si sa période $d = 1$

i.e. $\exists$ deux moments consécutifs s et $s+1$ où $p_{ii}^{(s)} > 0$ et $p_{ii}^{(s+1)} > 0$

i est apériodic si sa période $d(i) = 1$

i.e. si $p_{ii}^{n} > 0$ pour tout $n \geq 1$

i est un état récurrent si après y avoir accédé, le processus y reviendra:

i est récurrent $\Leftrightarrow$ i n'est pas transient

Dans une chaîne de Markov avec un espace d'états fini,
un état récurrent qui est apériodic est dit ergodic.

Une chaîne de Markov avec un espace d'états fini est ergodic,
si tous ses états sont ergodics.

6. Probabilités non-conditionnelles des états

Dans le cas où n est petit et que le système n'a pas atteint son stage d'équilibre, il faut connaître les probabilités des états au départ (i.e., à $t = 0$)

$$P(X_0 = i) \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}.$$

Alors

$$P(X_n = j) = P(X_n = j \mid X_0 = 0)\, P(X_0 = 0) + \ldots + P(X_n = j \mid X_0 = M)\, P(X_0 = M)$$
$$= p_{0j}^{(n)} P(X_0 = 0) + \ldots + p_{Mj}^{(n)} P(X_0 = M)$$

Exemple de la météo:

Supposons que $P(X_0 = 0) = 0.3$ et $P(X_0 = 1) = 0.7$

Quelle est la probabilité qu'il pleuve le jour 3, $P(X_3 = 1)$?

$$\boxed{P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix}}$$

$$P(X_3 = 1) = p_{01}^{3} P(X_0 = 0) + p_{11}^{3} P(X_0 = 1)$$
$$= 0.248 \cdot 0.3 + 0.256 \cdot 0.7$$
$$= 0.0744 + 0.1792 = 0.2536$$

8. Probabilités à l'équilibre

Exemple de la météo:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$P^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Après le jour 5, la probabilité qu'il pleuve $P\left(X_t = 1\right),\ t \geq 5$

ne depend pas des probabilités des états au depart: $P\left(X_0 = 0\right)$ et $P\left(X_0 = 1\right)$

$$\begin{aligned} P\left(X_t = 1\right) &= P\left(X_0 = 0\right) p_{01}^t + P\left(X_0 = 1\right) p_{11}^t \\ &= P\left(X_0 = 0\right) 0.25 + P\left(X_0 = 1\right) 0.25 = 0.25. \end{aligned}$$

8. Probabilités à l'équilibre

Exemple de la météo:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$P^{(6)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Probabilité qu'il fasse beau } (i=1) = 0.75 \\ \text{Probabilité de pluie } (i=1) = 0.25 \end{array}\right\} \text{ ne dépend plus de l'état initial du système}$$

Donc en général quand il existe une valeur de n assez grande pour que les lignes de la matrice de transition $P^{(n)}$ soient identiques, alors la probabilité que le système se trouve dans l'état j ne dépend plus de l'état initial du système (à $t = 0$)

Les probabilités à l'équilibre sont des propriétés à long terme des chaînes de Markov

On peut démontrer que pour toute chaîne de Markov irréductible (ne comportant qu'une seule classe) qui est ergotic

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} \text{ existe et ne dépend pas de l'état } i$$

$$P^{(5)} = P^{(6)} = \ldots = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 0.25$$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0$$

où les probabilités π_j

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0$$

où les probabilités π_j

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Le système précédent comporte $(M+1)$ inconnus et $(M+2)$ équations, et par conséquent une équation est redondante.

Si nous éliminons la dernière contrainte $\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1,$ nous obtenons plusieurs solutions à un multiple près.

$$\boxed{\alpha\pi_j = \alpha\sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij} = \sum_{i=0}^{M} \alpha\pi_i p_{ij}}$$

Nous devons conserver cette dernière contrainte $\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$ pour sauvegarder la propriété des probabilités.

De plus

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0$$

où les probabilités π_j

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Le π_j est donc une probabilité au stage d'équilibre de se retrouver à l'état j après après un très grand nombre d'itérations indépendemment de l'état initiale à $t = 0$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0$$

où les probabilités π_j

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}}$$

Exemple de la météo:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \cdot 0.8 + \pi_1 \cdot 0.6 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 \cdot 0.2 = \pi_1 \cdot 0.6 \\ \pi_1 = \pi_0 \cdot 0.2 + \pi_1 \cdot 0.4 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 \cdot 0.6 = \pi_0 \cdot 0.2 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 = 3\pi_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 + \pi_1 = 1 \\ \pi_0 = 3\pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\pi_1 = 1 \Leftrightarrow \pi_1 = 0.25$$

Donc $\pi_1 = 0.25$ et $\pi_0 = 0.75$

π_j est une probabilité stationnaire (ne pas confondre avec le fait que les probabilités de transition sont stationnaires) dans le sens où si la probabilité initiale d'être dans l'état j est donné par π_j $\left(P\left(X_0 = j\right) = \pi_j\right)$, alors la probabilité de retrouver le système dans l'état j aux temps $n = 1, 2, \ldots$ est aussi π_j :

$$P\left(X_n = j\right) = \pi_j$$

Exemple de la météo:

Supposons que $P\left(X_0 = 0\right) = \pi_0 = 0.75$ et $P\left(X_0 = 1\right) = \pi_1 = 0.25$

Quelle est la probabilité qu'il pleuve le jour 3, $P\left(X_3 = 1\right)$?

$$\begin{aligned} P\left(X_3 = 1\right) &= p_{01}^3 P\left(X_0 = 0\right) + p_{11}^3 P\left(X_0 = 1\right) \\ &= 0.248 \cdot \pi_0 + 0.256 \cdot \pi_1 \\ &= 0.248 \cdot 0.75 + 0.256 \cdot 0.25 \\ &= 0.186 + 0.064 = 0.25 \end{aligned}$$

$$\boxed{P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix}}$$

- Si les états i et j sont récurrents dans des classes différentes alors

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

- Si l'état j est transient alors

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \qquad \forall i.$$

Donc la probabilité de retourner dans un état transient après un grand nombre d'itérations tend vers 0.

- On peut démontrer que pour une chaîne de Markov irreductible

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right) = \pi_j$$

9. Coût moyen (à long terme) par unité de temps

Soit un processus stochastique étant une chaîne de Markov

Considérons une fonction de coût définie par une variable aléatoire $C(X_t)$ définie pour les valeurs des états $\{0,\ldots,M\}$:

$$C(0),\ldots,C(M).$$

Supposons que la fonction $C(\bullet)$ soit indépendante du temps; i.e., $C(X_t)$ reste la même pour tous les temps t.

Soit un processus stochastique étant une chaîne de Markov irréductible et ergotic.

Considérons une fonction de coût définie par une variable aléatoire $C(X_t)$ définie pour les valeurs des états $\{0,\ldots,M\}$:

$$C(0),\ldots,C(M).$$

Supposons que la fonction $C(\bullet)$ soit indépendante du temps; i.e., $C(X_t)$ reste la même pour tous les temps t.

Le coût moyen associé à C pour les n premières périodes:

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right].$$

Utilisant le résultat que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{k}\right)=\pi_j$$

on peut démontrer que le coût moyen (à long terme) par unité de temps est donné par

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right)=\sum_{j=0}^{M}\pi_j C(j)$$

Coût moyen (à long terme) par unité de temps est donné par

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}C(X_t)\right)=\sum_{j=0}^{M}\pi_j C(j)$$

Exemple de la météo:

Nous avons $\pi_1 = 0.25$ et $\pi_0 = 0.75$

Considérons une entreprise dont le coût d'exploitation $C(\bullet)$ depend de la météo:

beau temps $\rightarrow$ coût est de \$25 $\Rightarrow C(0) = 25$

pluie $\rightarrow$ coût est de \$100 $\Rightarrow C(1) = 100.$

Coût d'exploitation moyen (à long terme) par unité de temps:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{M}\pi_j C(j) &= \pi_0 C(0) + \pi_1 C(1)\\ &= 0.75\cdot 25 + 0.25\cdot 100\\ &= 18.75 + 25 = 43.75.\end{aligned}$$