

Modèles stochastiques

Processus de décisions markoviens

Processus de décisions markoviens

Considérons un système qui peut être modélisé comme un processus stochastique discret avec la propriété markovienne (i.e., chaîne de Markov discrete). En tout moment, le système se retrouve dans un des $(M + 1)$ états possibles: $\{0, \dots, M\}$.

À chaque fois que nous observons le système (processus), il faut prendre une **décision** k , et cette décision fait partie d'un ensemble de décisions disponibles $\{1, \dots, K\}$.

Notons que pour certains états du processus, certaines des décisions $\{1, \dots, K\}$ ne peuvent s'appliquer.

Analyse du système de décision

Considérons que le système est dans l'état i au moment de l'observation.

Supposons que la **décision** prise est dénotée par $d_i = k$.

Les conséquences de cette décision $d_i = k$:

- **coût** découlant de cette décision: C_{ik}
- la décision entraîne de **nouvelles probabilités de transitions** entre les états du système

Une **politique de décision** R est une spécification de la décision à prendre pour chaque état possible du système:

$$R = (d_0(R), \dots, d_M(R))$$

Objectif du problème:

Déterminer une politique optimale relativement à un critère de coût qui doit être spécifié par l'agent de décision.

Critère de coût qui est souvent utilisé est

coût moyen par unité de temps

Exemple d'un système de production

En observant une machine de production, nous pouvons constater 4 états possibles:

états	condition de la machine
0	comme une neuve
1	utilisable avec détérioration mineure
2	utilisable avec détérioration majeure
3	inutilisable

En utilisant des données historiques, nous sommes en mesure de spécifier les transitions suivantes entre les états d'une semaine à l'autre

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaîne de Markov discrète en invoquant la perte de mémoire du passé;
i.e., les transitions ne dépendent pas des états des semaines antérieures

Considérons que lors d'une observation 3 décisions différentes peuvent être prises:

Décision k	Action
1	Rien faire
2	Mise au point (retour à l'état 1)
3	Remplacement de machine (retour à l'état 0)

Considérons que lors d'une observation 3 décisions différentes peuvent être prises:

Décision k	Action	États où la décision est applicable
1	Rien faire	0, 1, 2
2	Mise au point (retour à l'état 1)	2
3	Remplacement de machine (retour à l'état 0)	1, 2, 3

Les conséquences de cette décision $d_i = k$:

- coût découlant de cette décision: C_{ik}
- la décision entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états système

Coût découlant des décisions

a) Si nous décidons de rien faire (décision 1), alors le coût moyen de perte par semaine pour les produits défectueux dépend de l'état de la machine utilisée:

état	coût moyen des produits défectueux
0	\$0
1	\$1000
2	\$3000

b) Coût de maintenance:

coût de mise au point = \$2000

coût de remplacement d'une machine = \$4000

c) Coût de perte de production par semaine:

lors d'une mise au point = \$2000

lors du remplacement d'une machine = \$2000

Coût découlant des décisions

a) Si nous décidons de rien faire (décision 1), alors le coût moyen de perte par semaine pour les produits défectueux dépend de l'état de la machine utilisée:

état	coût moyen des produits défectueux
0	\$0
1	\$1000
2	\$3000

b) Coût de maintenance:

coût de mise au point = \$2000
 coût de remplacement d'une machine = \$4000

c) Coût de perte de production par semaine:

lors d'une mise au point = \$2000
 lors du remplacement d'une machine = \$2000

Table des coûts

Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
1-rien faire	0	0	x	x	0
	1	1000	x	x	1000
	2	3000	x	x	3000
2- mise au point	2	x	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	x	4000	2000	6000

Considérons les 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_a entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$		états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	→	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_b entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$		états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	→	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

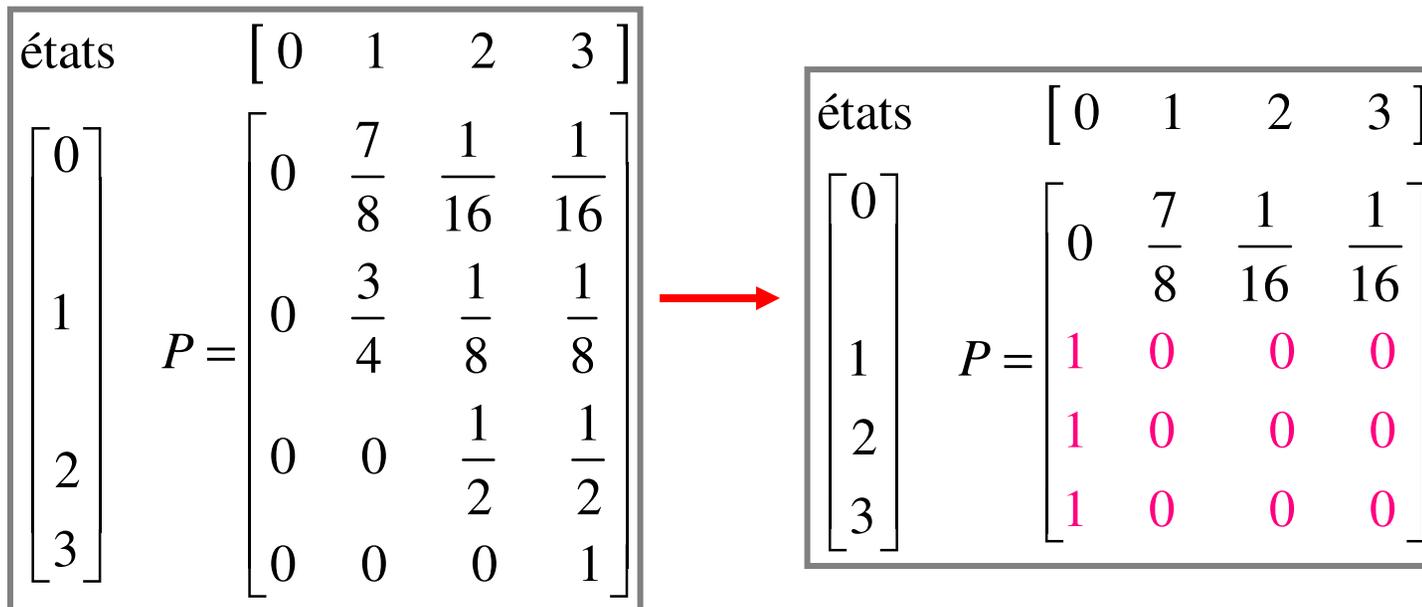
Politique R_c entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{états} \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_d entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système



Nous sommes dans un contexte markovien puisque étant donné l'état actuel du système et la décision prise, toute affirmation sur le futur du système n'est pas affecté par l'information passée (le processus est sans mémoire):

- les nouvelles probabilités de transition dépendent uniquement de l'état actuel et de la décision prise
- le coût moyen (à long terme) dépend uniquement de l'état actuel et de la décision prise

Une **politique de décision** R est une spécification de la décision à prendre pour chaque état possible du système:

$$R = (d_0(R), \dots, d_M(R))$$

Propriétés des politiques de décision:

- politique **stationnaire**: étant donné l'état i du système, la règle pour prendre une décision ne dépend pas du moment t où on l'applique (**nous utilisons de telles politiques**)
- politique **déterministe**: étant donné l'état i du système, la décision est unique
- politique **probabiliste**: étant donné l'état i du système, la décision est prise selon une distribution aléatoire

Objectif du problème:

Déterminer une politique optimale relativement à un critère de coût qui doit être spécifié par l'agent de décision.

Critère de coût qui est souvent utilisé est

coût moyen par unité de temps

Objectif du problème:

Déterminer une politique optimale relativement à un critère de coût qui doit être spécifié par l'agent de décision.

Critère de coût qui est souvent utilisé est

coût moyen par unité de temps

Identification d'une politique déterministe optimale par résolution exhaustive:

Évaluer le coût de chaque politique et choisir celle ayant la plus petite valeur.

Considérons le critère défini par

coût moyen par unité de temps

Rappel

Soit un processus stochastique étant une chaîne de Markov irréductible et ergotique.

Considérons une fonction de coût définie par une variable aléatoire $C(X_t)$ définie pour les valeurs des états $\{0, \dots, M\}$:

$$C(0), \dots, C(M).$$

Supposons que la fonction $C(\bullet)$ soit indépendante du temps; i.e., $C(X_t)$ reste la même pour tous les temps t .

Le coût moyen associé à C pour les n premières périodes:

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right].$$

Utilisant le résultat que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^k \right) = \pi_j$$

on peut démontrer que le **coût moyen (à long terme) par unité de temps** est donné par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right) = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j)$$

Pour calculer le **coût moyen (à long terme) par unité de temps**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right) = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j)$$

nous considérons les coûts d'exécution $C(j)$ associés aux états j et les probabilités d'équilibre π_j obtenues **en considérant les nouvelles probabilités de transition résultant de l'exécution la politique.**

Exemple d'un système de production

Considérons la deuxième politique R_b

Exemple d'un système de production

Considérons la deuxième politique R_b

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_b entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$		états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	→	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Les probabilités d'équilibre π_j

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

états	[0	1	2	3]
[0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_0 = \pi_3 \\ \pi_1 = \frac{7}{8}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 + \pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{array} \right.$$

Résolvant ce système d'équations:

$$\pi_0 = \frac{2}{21}, \quad \pi_1 = \frac{5}{7}, \quad \pi_2 = \frac{2}{21}, \quad \pi_3 = \frac{2}{21}$$

Évaluons les coûts C associés à la politique pour les différents états.

Table des coûts

Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
0-rien faire	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2- mise au point	2	0	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	0	4000	2000	6000

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3

$$C_0(b) = 0$$

$$C_1(b) = 1000$$

$$C_2(b) = 4000$$

$$C_3(b) = 6000$$

Coût moyen (à long terme) par unité de temps

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right) = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j)$$

Probabilités d'équilibre:

$$\pi_0 = \frac{2}{21}, \quad \pi_1 = \frac{5}{7}, \quad \pi_2 = \frac{2}{21}, \quad \pi_3 = \frac{2}{21}$$

Coûts C associés à la politique pour les différents états:

$$C_0(b) = 0 \quad C_1(b) = 1000 \quad C_2(b) = 4000 \quad C_3(b) = 6000$$

Coût moyen (à long terme) pour la politique R_b :

$$\begin{aligned} & \pi_0 0 + \pi_1 1000 + \pi_2 4000 + \pi_3 6000 = \\ & \frac{2}{21} 0 + \frac{5}{7} 1000 + \frac{2}{21} 4000 + \frac{2}{21} 6000 = 1667 \end{aligned}$$

Tableau des coûts moyens (à long terme) pour les 4 politiques

Politique | $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ | $E[C]$, en milliers de \$

$$R_b \quad \left| \left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21} \right) \right| \quad \frac{1}{21} [2 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6] = \frac{35}{21} = 1.667$$

Table des coûts					
Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
0-rien faire	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2- mise au point	2	0	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	0	4000	2000	6000

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_a entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

états	$[$	0	1	2	3	$]$		états	$[$	0	1	2	3	$]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P =$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	\rightarrow	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P =$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$								

Tableau des coûts moyens (à long terme) pour les 4 politiques

Politique	$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$	$E[C]$, en milliers de \$
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{13}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6] = \frac{25}{13} = 1.923$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\frac{1}{21}[2 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6] = \frac{35}{21} = 1.667$

Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
0-rien faire	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2- mise au point	2	0	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	0	4000	2000	6000

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_c entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$		états	$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	→	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tableau des coûts moyens (à long terme) pour les 4 politiques

Politique	$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$	$E[C]$, en milliers de \$
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{13}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6] = \frac{25}{13} = 1.923$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\frac{1}{21}[2 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6] = \frac{35}{21} = 1.667$
R_c	$\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	$\frac{1}{11}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6] = \frac{19}{11} = 1.727$

Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
0-rien faire	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2- mise au point	2	0	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	0	4000	2000	6000

Considérons 4 politiques de décision différentes

Politique R	Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Remplacer dans l'état 3	1	1	1	3
R_b	Remplacer dans l'état 3, mise au point dans l'état 2	1	1	2	3
R_c	Remplacer dans les états 2 et 3	1	1	3	3
R_d	Remplacer dans les états 1, 2 et 3	1	3	3	3

Politique R_d entraîne de nouvelles probabilités de transitions entre les états du système

états	$[$	0	1	2	3	$]$		états	$[$	0	1	2	3	$]$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	\rightarrow	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$P =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Tableau des coûts moyens (à long terme) pour les 4 politiques

Politique	$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$	$E[C]$, en milliers de \$
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{13}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6] = \frac{25}{13} = 1.923$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\frac{1}{21}[2 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6] = \frac{35}{21} = 1.667$
R_c	$\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	$\frac{1}{11}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6] = \frac{19}{11} = 1.727$
R_d	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$	$\frac{1}{32}[16 \cdot 0 + 14 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6] = \frac{96}{32} = 3$

Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
0-rien faire	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2- mise au point	2	0	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	0	4000	2000	6000

Tableau des coûts moyens (à long terme) pour les 4 politiques

Politique	$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$	$E[C]$, en milliers de \$
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{13}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6] = \frac{25}{13} = 1.923$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\frac{1}{21}[2 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6] = \frac{35}{21} = 1.667$
R_c	$\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	$\frac{1}{11}[2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6] = \frac{19}{11} = 1.727$
R_d	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$	$\frac{1}{32}[16 \cdot 0 + 14 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6] = \frac{96}{32} = 3$

La meilleure politique (qui est en fait optimale) R_b

Objectif du problème:

Déterminer une politique optimale relativement à un critère de coût qui doit être spécifié par l'agent de décision.

Critère de coût qui est souvent utilisé est

coût moyen par unité de temps

Identification d'une politique déterministe optimale par la programmation linéaire:

Identification d'une politique déterministe optimale par la programmation linéaire:

Dans la méthode précédente de résolution exhaustive nous identifions une

politique optimale **déterministe** $R : (d_0(R), \dots, d_M(R))$

où $d_i(R)$ est la décision si le système est dans l'état i

Exemple d'un système de production

Politique déterministe optimale $R_b : (1, 1, 2, 3)$

Représentation d'une politique de décision R à l'aide d'un **tableau** $D(R)$

$$\begin{array}{c}
 \text{états } i \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Décisions } k \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & K \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0K} \\ D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{M1} & D_{M2} & \dots & D_{MK} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Dans le cas de **politique déterministe**

$$D_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la décision } k \text{ est prise dans l'état } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i \in \{0, \dots, M\}, k \in \{1, \dots, K\}$$

et chaque ligne i de la matrice $D(R)$ ne comporte qu'un seul élément égal à 1

Représentation d'une politique de décision R à l'aide d'un **tableau $D(R)$**

$$\begin{array}{c}
 \text{états } i \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Décisions } k \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & K \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0K} \\ D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{M1} & D_{M2} & \dots & D_{MK} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Exemple d'un système de production

$$R_b : (1, 1, 2, 3)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{états } i \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Décisions } k \\
 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Représentation d'une politique de décision R à l'aide d'un **tableau $D(R)$**

$$\begin{array}{c}
 \text{états } i \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Décisions } k \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & K \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0K} \\ D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{M1} & D_{M2} & \dots & D_{MK} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Notons que $D(R)$ peut aussi être utilisée pour représenter une **politique probabiliste**

		Décisions k			
		[1	2	3]	
états i	[0]	[1	0	0]	$P(\text{dec. 1} \text{état 1}) = P(\text{dec. 3} \text{état 1}) = 0.5$
	1	0.5	0	0.5	$P(\text{dec. 1} \text{état 2}) = 0.3$
	2	0.3	0.2	0.5	$P(\text{dec. 2} \text{état 2}) = 0.2$
	[3]	[0	0	1]	$P(\text{dec. 3} \text{état 2}) = 0.5$

Représentation d'une politique de décision R à l'aide d'un **tableau $D(R)$**

$$\begin{array}{c}
 \text{états } i \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Décisions } k \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & K \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc} D_{01} & D_{02} & \dots & D_{0K} \\ D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{M1} & D_{M2} & \dots & D_{MK} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Pour formuler le problème de **programmation linéaire** nous utilisons la représentation de la matrice $D(R)$ pour représenter la politique de décision.

Or puisque la programmation linéaire travaille avec des variables continues, alors nous considérons le problème de **déterminer une politique probabiliste optimale**.

Heureusement, nous avons la chance que la politique optimale générée avec la programmation linéaire est en fait déterministe.

Formulation du problème de programmation linéaire:

Variables de décision: $y_{ik} = P(\text{état est } i \text{ \& } \text{décision est } k)$

Utilisant les propriétés des probabilités conditionnelles:

$$\underbrace{P(\text{état est } i \text{ \& } \text{décision est } k)}_{y_{ik}} = \underbrace{P(\text{décision est } k | \text{état est } i)}_{D_{ik}} \underbrace{P(\text{état est } i)}_{\pi_i}$$

$$y_{ik} = \pi_i D_{ik}$$

De plus

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^K y_{il} &= \sum_{k=1}^K \pi_i D_{ik} \\ &= \pi_i \sum_{k=1}^K D_{ik} = \pi_i \quad \left(\text{puisque } \sum_{k=1}^K D_{ik} = 1 \right) \end{aligned}$$

Donc

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{l=1}^K y_{il}}$$

Contraintes du problème de programmation linéaire (en termes des y_{ik}):

$$1. \sum_{i=0}^M \pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^K y_{il} &= \sum_{k=1}^K \pi_i D_{ik} \\ &= \pi_i \sum_{k=1}^K D_{ik} = \pi_i \end{aligned} \quad \left(\text{puisque } \sum_{k=1}^K D_{ik} = 1 \right)$$

2. Se référant à la définition des probabilités à l'équilibre:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij} \Rightarrow \sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) \quad j = 0, \dots, M$$

où les $p_{ij}(k)$ sont les probabilités de transitions suite à la décision k

$$3. y_{ik} \geq 0 \quad i = 0, \dots, M; \quad k = 1, \dots, K$$

Fonction économique:

coût moyen à long terme par unité de temps

$$E(C) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K C_{ik} y_{ik}$$

coût moyen (à long terme) par unité de temps

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right) = \sum_{i=0}^M \pi_i C(i)$$

où $C(i)$ sont les coûts d'exécution associés aux états i

$$C(i) = \sum_{k=1}^K C_{ik} D_{ik}$$

$$y_{ik} = \pi_i D_{ik}$$

Problème de programmation linéaire (en termes des y_{ik})

$$\text{Min} \quad E(C) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K C_{ik} y_{ik}$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$$

$$\sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) \quad j = 0, \dots, M$$

$$y_{ik} \geq 0 \quad i = 0, \dots, M; \quad k = 1, \dots, K$$

nombre de contraintes = $M + 2$

nombre de variables = $K(M + 1)$

Rappel: les contraintes pour déterminer les probabilités à l'équilibre

$$2. \quad \pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) \quad j = 0, \dots, M$$

comporte une contrainte redondante

Donc le nombre de contraintes linéairement indépendantes se réduit à $(M + 1)$.

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & E(C) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K C_{ik} y_{ik} \\
\text{Sujet à} & \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \\
& \sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) \quad j = 0, \dots, M \\
& y_{ik} \geq 0 \quad i = 0, \dots, M; \quad k = 1, \dots, K
\end{array}$$

Donc le nombre de contraintes linéairement indépendantes se réduit à $(M + 1)$.

Il s'ensuit qu'il y a $(M + 1)$ variables de base dans toute solution de base.

Pour tout indice $j \in \{0, \dots, M\}$ (i.e., pour tout état j), il doit nécessairement exister au moins un indice $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $y_{jk} > 0$

Par contradiction,

$$\text{si } y_{jk} = 0 \text{ pour tout indice } k \in \{1, \dots, K\} \Rightarrow \sum_{k=1}^K y_{jk} = 0$$

$$\text{et alors dans l'évaluation de } D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{l=1}^K y_{il}}$$

nous diviserions par 0.

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & E(C) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K \pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K C_{ik} y_{ik} \\
\text{Sujet à} & \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \\
& \sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) \quad j = 0, \dots, M \\
& y_{ik} \geq 0 \quad i = 0, \dots, M; k = 1, \dots, K
\end{array}$$

Donc le nombre de contraintes linéairement indépendantes se réduit à $(M + 1)$.

Il s'ensuit qu'il y a $(M + 1)$ variables de base dans toute solution de base.

Pour tout indice $j \in \{0, \dots, M\}$ (i.e., pour tout état j), il doit nécessairement exister au moins un indice $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $y_{jk} > 0$

Par conséquent,

$\forall j \in \{0, \dots, M\}, \exists$ une et une seule décision $k \in \{1, \dots, K\}$ telle que $y_{jk} > 0$.

Par conséquent,

$\forall j \in \{0, \dots, M\}, \exists$ une et une seule décision $k \in \{1, \dots, K\}$ telle que $y_{jk} > 0$.

Rappel:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{l=1}^K y_{il}}$$

Il s'ensuit que pour tout état $j \in \{0, \dots, M\}$

$$y_{jk} > 0 \quad \Rightarrow \quad D_{jk} = \frac{y_{jk}}{\pi_j} = \frac{y_{jk}}{\sum_{l=1}^K y_{jl}} = \frac{y_{jk}}{y_{jk}} = 1$$

et **la politique optimale est donc déterministe.**

Exemple d'un système de production

Table des coûts

Decision	État	Produits défectueux	Maintenance	Perte de production	Coût total par semaine
1-rien faire	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2- mise au point	2	0	2000	2000	4000
3-remplacement	1, 2, 3	0	4000	2000	6000

décision 2 ne s'applique qu'à l'état 2 $\Rightarrow y_{02} = y_{12} = y_{32} = 0$

décision 3 ne s'applique pas à l'état 0 $\Rightarrow y_{03} = 0$

décisions 1 et 2 ne s'applique pas à l'état 3 $\Rightarrow y_{31} = y_{32} = 0$

Fonction économique

$$E(C) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^M C_{ik} y_{ik} = 1000y_{11} + 6000y_{13} + 3000y_{21} + 4000y_{22} + 6000y_{23} + 6000y_{33}$$

décision 2 ne s'applique qu'à l'état 2 $\Rightarrow y_{02} = y_{12} = y_{32} = 0$

décision 3 ne s'applique pas à l'état 0 $\Rightarrow y_{03} = 0$

décisions 1 et 2 ne s'applique pas à l'état 3 $\Rightarrow y_{31} = y_{32} = 0$

Fonction économique

$$E(C) = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^M C_{ik} y_{ik} = 1000y_{11} + 6000y_{13} + 3000y_{21} + 4000y_{22} + 6000y_{23} + 6000y_{33}$$

Contraintes:

$$\sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1$$

$$\begin{aligned}
 y_{02} = y_{12} = y_{32} &= 0 \\
 y_{03} &= 0 \\
 y_{31} = y_{32} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 3 appliquée à état 3

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 2 appliquée à état 2

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 3 appliquée à l'état 2

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 3 appliquée à l'état 1

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contraintes:

$$\sum_{k=1}^3 y_{0k} = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ik} P_{i0}(k) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 y_{01} + y_{02} + y_{03} &= (y_{01}P_{00}(1) + y_{02}P_{00}(2) + y_{03}P_{00}(3)) + (y_{11}P_{10}(1) + y_{12}P_{10}(2) + y_{13}P_{10}(3)) \\
 &\quad + (y_{21}P_{20}(1) + y_{22}P_{20}(2) + y_{23}P_{20}(3)) + (y_{31}P_{30}(1) + y_{32}P_{30}(2) + y_{33}P_{30}(3))
 \end{aligned}$$

2. Se référant à la définition des probabilités à l'équilibre:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i P_{ij} \Rightarrow \sum_{k=1}^K y_{jk} = \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} P_{ij}(k) \quad j=0, \dots, M$$

où les $p_{ij}(k)$ sont les probabilités de transitions suite à la décision k

$$\begin{aligned}
 y_{02} &= y_{12} = y_{32} = 0 \\
 y_{03} &= 0 \\
 y_{31} &= y_{32} = 0
 \end{aligned}$$

états [0 1 2 3]

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 3 appliquée à état 3

états [0 1 2 3]

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k = 2 appliquée à état 2

états [0 1 2 3]

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 3 appliquée à l'état 2

états [0 1 2 3]

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 3 appliquée à l'état 1

états [0 1 2 3]

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y_{01} + y_{02} + y_{03} &= (\cancel{y_{01}p_{00}(1)} + \cancel{y_{02}p_{00}(2)} + \cancel{y_{03}p_{00}(3)}) + (\cancel{y_{11}p_{10}(1)} + \cancel{y_{12}p_{10}(2)} + y_{13}p_{10}(3)) \\
 &\quad (\cancel{y_{21}p_{20}(1)} + \cancel{y_{22}p_{20}(2)} + \cancel{y_{23}p_{20}(3)}) + (\cancel{y_{31}p_{30}(1)} + \cancel{y_{32}p_{30}(2)} + y_{33}p_{30}(3))
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^3 y_{0k} = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ik} p_{i0}(k) \Leftrightarrow y_{01} - (y_{13} + y_{23} + y_{33}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 y_{02} &= y_{12} = y_{32} = 0 \\
 y_{03} &= 0 \\
 y_{31} &= y_{32} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 3 appliquée à état 3

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 2 appliquée à état 2

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 3 appliquée à l'état 2

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

k = 3 appliquée à l'état 1

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contraintes:

$$\sum_{k=1}^3 y_{1k} = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ik} p_{i1}(k) \Leftrightarrow y_{11} + y_{13} - \left(\frac{7}{8} y_{01} + \frac{3}{4} y_{11} + y_{22} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 y_{02} &= y_{12} = y_{32} = 0 \\
 y_{03} &= 0 \\
 y_{31} &= y_{32} = 0
 \end{aligned}$$

états [0 1 2 3]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 3 appliquée à état 3

états [0 1 2 3]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k = 2 appliquée à état 2

états [0 1 2 3]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 3 appliquée à l'état 2

états [0 1 2 3]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

k = 3 appliquée à l'état 1

états [0 1 2 3]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contraintes:

$$\sum_{k=1}^3 y_{2k} = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ik} p_{i2}(k) \Leftrightarrow y_{21} + y_{22} + y_{23} - \left(\frac{1}{16} y_{01} + \frac{1}{8} y_{11} + \frac{1}{2} y_{21} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 y_{02} &= y_{12} = y_{32} = 0 \\
 y_{03} &= 0 \\
 y_{31} &= y_{32} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{états} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contraintes:

$$\sum_{k=1}^3 y_{3k} = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^3 y_{ik} p_{i3}(k) \Leftrightarrow y_{33} - \left(\frac{1}{16} y_{01} + \frac{1}{8} y_{11} + \frac{1}{2} y_{21} \right) = 0$$

Problème de programmation linéaire (en termes des y_{ik})

$$\text{Min} \quad E(C) = 1000y_{11} + 6000y_{13} + 3000y_{21} + 4000y_{22} + 6000y_{23} + 6000y_{33}$$

$$\text{Sujet à} \quad y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1$$

$$y_{01} - (y_{13} + y_{23} + y_{33}) = 0$$

$$y_{11} + y_{13} - \left(\frac{7}{8}y_{01} + \frac{3}{4}y_{11} + y_{22} \right) = 0$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} - \left(\frac{1}{16}y_{01} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{1}{2}y_{21} \right) = 0$$

$$y_{33} - \left(\frac{1}{16}y_{01} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{1}{2}y_{21} \right) = 0$$

$$y_{ik} \geq 0 \quad i = 0, \dots, 3; \quad k = 1, \dots, 3$$

Solution optimale:

$$y_{01} = \frac{2}{21}, \quad (y_{11}, y_{13}) = \left(\frac{5}{7}, 0 \right), \quad (y_{21}, y_{22}, y_{23},) = \left(0, \frac{2}{21}, 0 \right), \quad y_{33} = \frac{2}{21}$$

Solution optimale:

$$y_{01} = \frac{2}{21}, \quad (y_{11}, y_{13}) = \left(\frac{5}{7}, 0\right), \quad (y_{21}, y_{22}, y_{23}) = \left(0, \frac{2}{21}, 0\right), \quad y_{33} = \frac{2}{21}$$

Combinant avec l'information à priori

$$y_{02} = y_{12} = y_{32} = 0$$

$$y_{03} = 0$$

$$y_{31} = y_{32} = 0$$

nous obtenons les valeurs optimales suivantes :

$$(y_{01}, y_{02}, y_{03}) = \left(\frac{2}{21}, 0, 0\right) \Rightarrow (D_{01}, D_{02}, D_{03}) = (1, 0, 0)$$

$$(y_{11}, y_{12}, y_{13}) = \left(\frac{5}{7}, 0, 0\right) \Rightarrow (D_{11}, D_{12}, D_{13}) = (1, 0, 0)$$

$$(y_{21}, y_{22}, y_{23}) = \left(0, \frac{2}{21}, 0\right) \Rightarrow (D_{21}, D_{22}, D_{23}) = (0, 1, 0)$$

$$(y_{31}, y_{32}, y_{33}) = \left(0, 0, \frac{2}{21}\right) \Rightarrow (D_{31}, D_{32}, D_{33}) = (0, 0, 1)$$

Rappel:

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{l=1}^K y_{il}}$$