Modèles stochastiques

Chaîne de Markov en temps continu

Dans le chapître précédent sur les chaînes de Markov, les moments (temps) t etaient discrets ($t = 0,1,\ldots$). Maintenant, nous allons analyser des situations où les observations se font de façon continue plutôt qu'à des moments discrets.

1. Formulation

$M+1$ états mutuellement exclusifs: $0,1,\ldots,M$

L'analyse débute au temps 0 et le temps t s'écoule de façon continue

$$X(t) = \text{état du système au temps } t : X(t) \in \{0,1,\ldots,M\}$$

Les points de changement d'états $t_1, t_2, \ldots$ sont des points aléatoires dans le temps (pas nécessairement entiers):

$$0 \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{X(0)} t_1 \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{X(t_1)} t_2 \underbrace{\qquad}_{X(t_2)} t_3 \ldots$$

Considérons trois points consécutifs dans le temps où il y a eu changement d'états:

$r \qquad (r \geq 0)$ temps passé

$s \qquad (s > r)$ temps courant (actuel)

$s+t \qquad (t \geq 0)$ t unités de temps dans le futur.

Supposons que $X(s) = i$ et que $X(r) = l$, avec $i, l \in \{0, \ldots, M\}$.

L'évaluation de

$$P\left(X(s+t) = j \,\middle|\, X(s) = i \text{ and } X(r) = l\right) \qquad j = 0, \ldots, M$$

est facilité par la propriété de Markov (i.e., sans mémoire).

Définition

Un processus stochastique en temps continu $\{X(t); t \geq 0\}$ a la propriété de Markov si

$$P\left(X(s+t) = j \,\middle|\, X(s) = i \text{ and } X(r) = l\right) = P\left(X(s+t) = j \,\middle|\, X(s) = i\right)$$

$$\forall i, j, l \in \{0, \ldots M\}; \quad \forall r \geq 0,\ s > r,\ t > 0.$$

Définition

Un processus stochastique en temps continu $\{X(t); t \geq 0\}$ a la propriété de Markov si

$$P\big(X(s+t)=j \,\big|\, X(s)=i \text{ and } X(r)=l\big) = P\big(X(s+t)=j \,\big|\, X(s)=i\big)$$

$$\forall i, j, l \in \{0, \ldots M\}; \quad \forall r \geq 0,\ s > r,\ t > 0.$$

Le processus stochastique est alors une chaîne de Markov en temps continu

Les probabilités $P\big(X(s+t)=j \,\big|\, X(s)=i\big)$ sont des probabilités de transition similaires à celles que nous avions en temps discret.

Les probabilités de transition sont stationnaires puisqu'elles sont indépendantes de s :

$$P\big(X(s+t)=j \,\big|\, X(s)=i\big) = P\big(X(t)=j \,\big|\, X(0)=i\big) \qquad \forall s > 0$$

Par symétrie avec le cas discret

$$p_{ij}(t) = P\big(X(t)=j \,\big|\, X(0)=i\big)$$

où $p_{ij}(t)$ dénote la fonction de probabilité de transition en temps continu

Les probabilités de transition sont stationnaires puisqu'elles sont indépendantes de s :

$$P\Big(X(s+t)=j\,\Big|\,X(s)=i\Big)=P\Big(X(t)=j\,\Big|\,X(0)=i\Big) \qquad \forall s>0$$

Par symétrie avec le cas discret

$$p_{ij}(t)=P\Big(X(t)=j\,\Big|\,X(0)=i\Big)$$

où $p_{ij}(t)$ dénote la fonction de probabilité de transition en temps continu

L'hypothèse suivante est faite:

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

2. Variables aléatoires importantes

2.1 Temps dans un état

Dans l'évolution du processus, dénotons

T_i = variable aléatoire du temps passé dans l'état i avant de se déplacer vers un autre état

$$\forall i \in \{0, \dots, M\}$$

Supposons que le processus entre dans l'état i au temps $t' = s$.

Pour toute durée $t > 0$,

$$T_i > t \Leftrightarrow X(t') = i \quad \forall t' \in [s, s+t].$$

La propriété de stationnarité des probabilités de transition entraîne que

$$P(T_i > s+t \mid T_i > s) = P(T_i > t).$$

Supposons que le processus entre dans l'état i au temps $t' = s$.

Pour toute durée $t > 0$,

$$T_i > t \Leftrightarrow X(t') = i \quad \forall t' \in [s, s+t].$$

La propriété de stationnarité des probabilités de transition entraîne que

$$P(T_i > s+t \mid T_i > s) = P(T_i > t).$$

Propriété particulière: la distribution du temps restant d'ici la prochaine sortie de i par le processus est la même quelle que soit le temps déja passé dans l'état i.

La variable T_i est sans mémoire.

La seule distribution de variable aléatoire continue ayant cette propriété est la distribution exponentielle.

Propriété particulière: la distribution du temps restant d'ici la prochaine sortie de i par le processus est la même quelle que soit le temps déja passé dans l'état i. La variable T_i est sans mémoire.

La seule distribution de variable aléatoire continue ayant cette propriété est la distribution exponentielle.

Rappel: La distribution exponentielle T_i possède un seul paramètre q_i

$$P\left(T_i \le t\right) = 1 - e^{-q_i t} \qquad \forall t > 0,$$

et sa moyenne (espérance mathématique) est

$$E\left[T_i\right] = \frac{1}{q_i}.$$

Ce résultat nous permet de décrire une chaîne de Markov en temps continu d'une façon équivalente comme suit:

Ce résultat nous permet de décrire une chaîne de Markov en temps continu d'une façon équivalente comme suit:

1. La variable aléatoire T_i a une distribution exponentielle avec moyenne de $\frac{1}{q_i}$

2. Quand le processus quitte l'état i, il passe à l'état j avec une probabilité de p_{ij} satisfaisant les conditions suivantes:

$$p_{ii} = 0 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

3. Le prochain état visité après i est indépendant du temps passé dans l'état i

2.2 Intensités de transitions

Les intensités de transition q_i jouent un rôle pour les chaînes de Markov en temps continu analogue aux probabilités de transition dans le cas des chaînes de Markov discrète:

$$q_i = -\frac{d}{dt} p_{ii}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_i p_{ij} \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}; i \neq j$$

où $p_{ij}(t)$ est la fonction de la probabilité de transition en temps continu et p_{ij} est décrit à l'item 2. de la définition équivalente de la chaîne de Markov en temps continu.

Par symétrie avec le cas discret

$$p_{ij}(t) = P\left(X(t) = j \middle| X(0) = i\right)$$

où $p_{ij}(t)$ dénote la fonction de probabilité de transaction en temps continu

L'hypothèse suivante est faite:

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

2. Quand le processus quitte l'état i, il passe à l'état j avec une probabilité de p_{ij} satisfaisant les conditions suivantes:

$$p_{ii} = 0 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

2.2 Intensités de transitions

Les intensités de transition q_i jouent un rôle pour les chaînes de Markov en temps continu analogue aux probabilités de transition dans le cas des chaînes de Markov discrète:

$$q_i = -\frac{d}{dt} p_{ii}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \qquad \forall i \in \{0, \ldots, M\}$$

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_i p_{ij} \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}; \; i \neq j$$

où $p_{ij}(t)$ est la fonction de la probabilité de transition en temps continu et p_{ij} est décrit à l'item 2. de la définition équivalente de la chaîne de Markov en temps continu.

De plus, le q_i est en fait le paramètre définissant la distribution exponentielle de T_i.

1. La variable aléatoire T_i a une distribution exponentielle avec moyenne de $\frac{1}{q_i}$

En particulier:

a) q_i = taux de transition à partir de $i = \dfrac{1}{E\left[T_i\right]}$

où $E\left[T_i\right]$ = moyenne du temps passé à chaque visite dans l'état i.

b) q_{ij} = taux de transition de i vers j

= nombre moyen de fois que le processus passe de i à j par unité de temps passé dans l'état i

Il s'ensuit que

$$q_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M} q_{ij}.$$

En particulier:

a) q_i = taux de transition à partir de $i = \dfrac{1}{E[T_i]}$

où $E[T_i]$ = moyenne du temps passé à chaque visite dans l'état i.

b) q_{ij} = taux de transition de i vers j

= nombre moyen de fois que le processus passe de i à j par unité de temps passé dans l'état i

Par analogie avec q_i , q_{ij} est le paramètre de la distribution exponentielle de la variable aléatoire definie comme suit:

Chaque fois que le processus atteint i, le temps passé dans i avant une transition vers j (cette transition étant la première) est une variable aléatoire

$$T_{ij} \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots, M\}, i \neq j.$$

Les variables T_{ij} sont indépendantes, exponentielles avec paramètres q_{ij} dont les moyennes

$$E[T_{ij}] = \frac{1}{q_{ij}}.$$

Par analogie avec q_i , q_{ij} est le paramètre de la distribution exponentielle de la variable aléatoire definie comme suit:

Chaque fois que le processus atteint i, le temps passé dans i avant une transition vers j (cette transition étant la première) est une variable aléatoire

$$T_{ij} \qquad \forall i, j \in \{0,\ldots,M\}, i \neq j.$$

Les variables T_{ij} sont indépendantes, exponentielles avec paramètres q_{ij} dont les moyennes

$$E\left[T_{ij}\right] = \frac{1}{q_{ij}}.$$

Le temps passé dans l'état i avant une transition $\left(\text{i.e., } T_i\right)$ est le minimum sur tous les $j \neq i$ des T_{ij}.

Quand la transition se produit, la probabilité qu'elle soit vers l'état j est

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

3. Probabilités à l'équilibre

Nous retrouvons des propriétes similaires à celles des chaînes de Markov discrètes.

Probabilités de transition satisfont les équations de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}(s) p_{kj}(t-s) \qquad \forall i, j \in \{0, \ldots M\};\ 0 \le s \le t$$

Les états i et j communiquent si $\exists t_1, t_2 > 0$ tels que

$$p_{ij}(t_1) > 0 \text{ et } p_{ji}(t_2) > 0$$

Tous les états qui communiquent forment une classe

Si tous les états forment une seule classe, alors la chaîne de Markov est irréductible (nous allons faire cette hypothèse par la suite dans notre analyse):

$$p_{ij}(t) > 0 \qquad \forall t > 0;\quad i, j \in \{0, \ldots, M\}.$$

Si tous les états forment une seule classe, alors la chaîne de Markov est irréductible (nous allons faire cette hypothèse par la suite dans notre analyse):

$$p_{ij}(t) > 0 \qquad \forall t > 0; \quad i, j \in \{0, \ldots, M\}.$$

Probabilités à l'équilibre (probabilité stationnaire) de la chaîne de Markov:

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \qquad j = 0, \ldots, M \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j > 0}$$

existe et est indépendante de l'état initial de la chaîne de Markov

Les probabilités à l'équilibre satisfont les relations suivantes

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}(t) \qquad j = 0, \ldots, M;\ \forall t \geq 0 \qquad \boxed{\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}}$$

MAIS les équations d'équilibre suivantes donne un système d'équations plus facile à résoudre pour identifier les π_j:

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

MAIS les équations d'équilibre suivantes donne un système d'équations plus facile à résoudre pour identifier les π_j:

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Interprétation intuitive:

$\pi_j q_j$: taux auquel le processus part de j

puisque π_j : probabilité (à l'équilibre) que le processus soit dans l'état j

q_j : taux de transition pour sortir de l'état j étant donné que le processus est dans l'état j

$\pi_i q_{ij}$: taux de passage de l'état i à l'état j

puisque q_{ij} : taux de transition de l'état i à l'état j étant donné que le processus est dans l'état i

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij}$: taux de passage à l'état j quelque soit l'état i dans lequel se trouve le processus

Donc il s'ensuit que

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

Interprétation intuitive:

$\pi_j q_j$: taux auquel le processus part de j

puisque π_j : probabilité (à l'équilibre) que le processus soit dans l'état j

q_j : taux de transition pour sortir de l'état j étant donné que le processus est dans l'état j

$\pi_i q_{ij}$: taux de passage de l'état i à l'état j

puisque q_{ij} : taux de transition de l'état i à l'état j étant donné que le processus est dans l'état i

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij}$: taux de passage à l'état quelque soit l'état i dans lequel se trouve le processus

Donc il s'ensuit que

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

Nous utilisons donc par la suite ces

ÉQUATIONS DE BALANCE

ÉQUATIONS DE BALANCE

Équations d'équilibre

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0,\ldots,M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Intensités de transition

$$q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{M} q_{ji}.$$

Remplaçons les valeurs des q_j dans les équations d'équilibre:

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \iff \pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0,\ldots,M\}$$

Donc les équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0,\ldots,M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

Exemple: Deux machines identiques fonctionnent de façon continue à moins d'être brisés.

Un réparateur disponible au besoin pour réparer les machines.

Temps de réparation suit une distribution exponentielle avec une moyenne de 0.5 journée.

Une fois réparée, le temps d'utilisation d'une machine avant son prochain bris suit une distribution exponentielle de moyenne de 1 journée.

Nous supposons que ces distributions sont indépendantes.

Considérons le processus aléatoire défini en terme du nombre de machines en panne. La variable aléatoire

$$X(t') = \text{ nombre de machines en panne au temps } t'.$$

États de $X(t')$: $\{0,1,2\}$

Le temps de réparation suivant une distribution exponentielle et le temps jusqu'au prochain bris suivant également une distribution exponentielle entraînent que

$\{X(t'); t' \geq 0\}$ est une chaîne de Markov en temps continu

$$X(t') = \text{ nombre de machines en panne au temps } t'.$$

États de $X(t')$: $\{0,1,2\}$

Le temps de réparation suivant une distribution exponentielle et le temps jusqu'au prochain bris suivant également une distribution exponentielle entraînent que

$\{X(t'); t' \geq 0\}$ est une chaîne de Markov en temps continu

Temps de réparation suit une distribution exponentielle avec une moyenne de 0.5 journée.

$$\downarrow$$

$$\text{Taux de réparation} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ machines par jour}$$

Une fois réparée, le temps d'utilisation d'une machine avant son prochain bris suit une distribution exponentielle de moyenne de 1 journée.

$$\downarrow$$

$$\text{Taux de bris d'une machine} = \frac{1}{1} = 1 \text{ jour}$$

Taux de transition (q_{ij}) entre les états:

Hypothèses:

Les deux machines ne peuvent se briser au même moment: $q_{02} = 0$

Le réparateur ne répare qu'une seule machine à la fois: $q_{20} = 0$

Temps de réparation suit une distribution exponentielle avec une moyenne de 0.5 journée

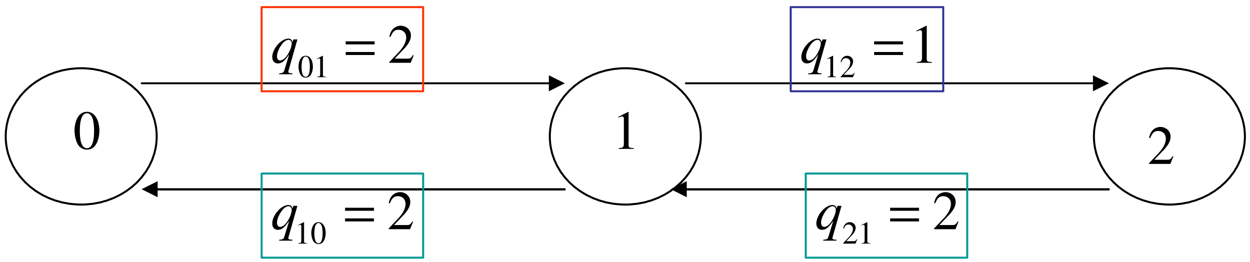
$$\Rightarrow \text{taux de réparation} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ machines par jour}$$

Le temps d'utilisation d'une machine avant son prochain bris suit une distribution exponentielle de moyenne de 1 journée

$$\Rightarrow \text{taux de bris} = \frac{1}{1} = 1 \text{ jour}$$

Au moment où les deux machines fonctionnent, alors

taux de bris = $\left(\text{taux de bris de machine 1}\right) + \left(\text{taux de bris de machine 1}\right) = 1 + 1 = 2$



Taux de transition (q_{ij}) entre les états:

Hypothèses:

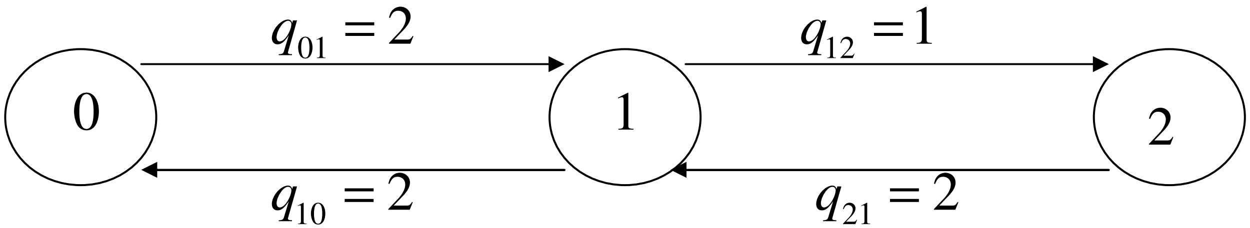
Les deux machines ne peuvent se briser au même moment: $q_{02} = 0$

Le réparateur ne répare qu'une seule machine à la fois: $q_{20} = 0$

$$\boxed{\text{Taux de réparation} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ machines par jour}}$$

$$\boxed{\text{Taux de bris d'une machine} = \frac{1}{1} = 1 \text{ jour}}$$

$$\boxed{\text{Taux de bris si deux machines sont en marche} = 2}$$



Rappel: ÉQUATIONS DE BALANCE

$$\pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M} \pi_i q_{ij} \qquad j \in \{0, \ldots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

taux de départ de j = taux d'arrivée à j

État 0: $\pi_0 q_{01} = \pi_1 q_{10} \quad \Leftrightarrow 2\pi_0 = 2\pi_1$

État 1: $\pi_1 \left(q_{10} + q_{12} \right) = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21} \quad \Leftrightarrow \left(2+1 \right) \pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2 \Leftrightarrow 3\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2$

État 2: $\pi_2 q_{21} = \pi_1 q_{12} \quad \Leftrightarrow 2\pi_2 = \pi_1$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + 1$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left, "q_{01}=2"] & 1 \arrow[l, shift left, "q_{10}=2"] \arrow[r, shift left, "q_{12}=1"] & 2 \arrow[l, shift left, "q_{21}=2"]
\end{tikzcd}$$

État 0: $\pi_0 q_{01} = \pi_1 q_{10} \quad \Leftrightarrow 2\pi_0 = 2\pi_1$

État 1: $\pi_1\left(q_{10}+q_{12}\right) = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21} \quad \Leftrightarrow \left(2+1\right)\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2 \Leftrightarrow 3\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2$

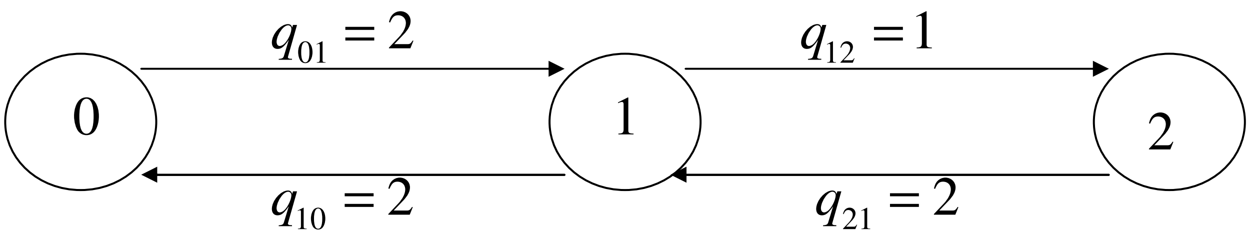
État 2: $\pi_2 q_{21} = \pi_1 q_{12} \quad \Leftrightarrow 2\pi_2 = \pi_1$

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + 1$

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi_0 = 2\pi_1 \\ 2\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_1 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \pi_1+\pi_1+0.5\pi_1 = 1 \Leftrightarrow 2.5\pi_1 = 1 \Leftrightarrow \pi_1 = 0.4$$

Donc

$$\left(\pi_0,\pi_1,\pi_2\right) = \left(0.4,0.4,0.2\right)$$



Donc

$$\left(\pi_0, \pi_1, \pi_2\right) = (0.4, 0.4, 0.2)$$

Probabilités à l'équilibre

$$\pi_0 = P(\text{aucune machine brisée}) = 0.4$$

$$\pi_1 = P(\text{une machine brisée}) = 0.4$$

$$\pi_2 = P(\text{2 machines brisées}) = 0.2$$

Nombre moyen de machines brisée (espérance mathématique)

$$0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 = 0 + 0.4 + 0.4 = 0.8$$