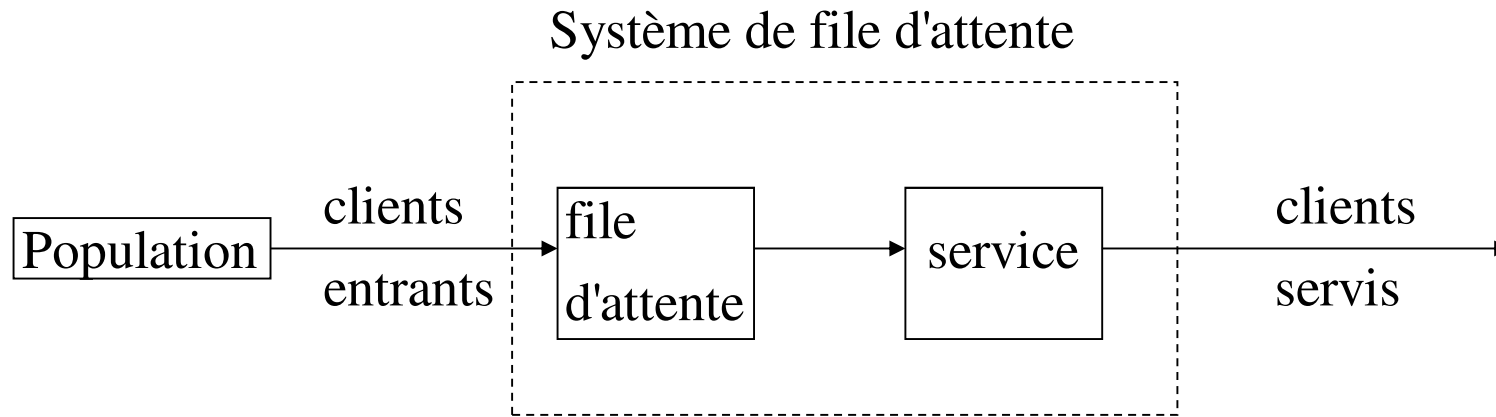


**Modèles stochastiques**

**Modèle de file d'attente**

## 1. Structure de base



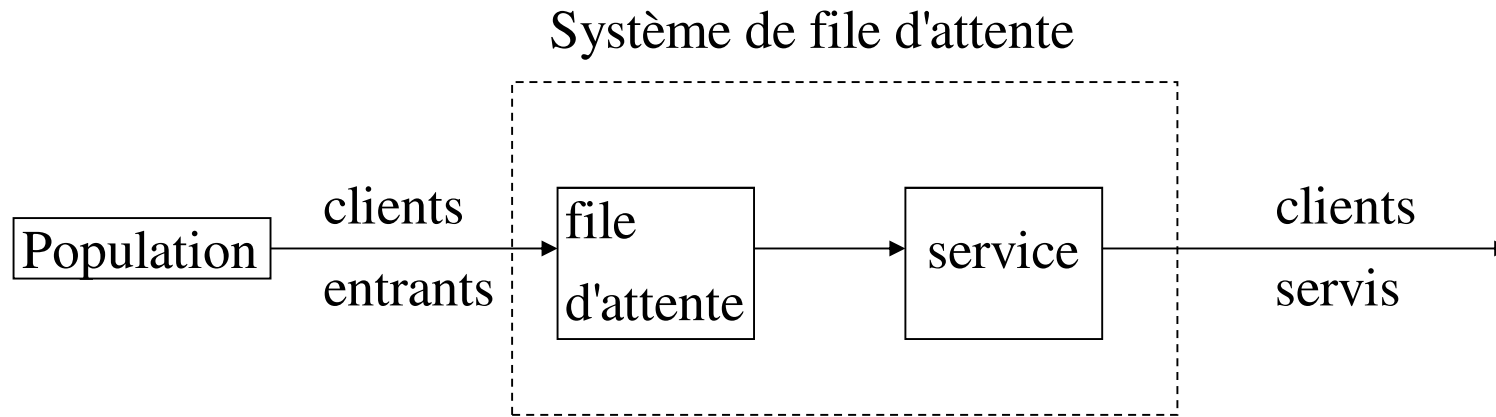
**Population:** La population constitue la source de clients potentiels. Elle est caractérisée par son nombre d'élément (fini ou infini).

**Clients:** Les clients (issus de la population) se joignent au système avec un taux moyen d'arrivée.

**File d'attente:** La file d'attente est caractérisée par le nombre maximum permis de clients en attente (fini ou infini)

**Service:** Le service peut être assuré par un ou plusieurs serveurs. Le temps qui s'écoule entre le début et la fin de service d'un client est dénoté le temps de service suivant une distribution de probabilité. Donc le taux de service est une autre caractéristique du système.

## 1. Structure de base



Stratégie de service: La stratégie de service réfère à l'ordre selon laquelle les clients sont servis: premier arrivé premier servi, au hasard, selon des priorités, ...

### Hypothèses:

Le temps s'écoulant entre deux arrivées consécutives est distribué exponentiellement

Le temps de service est aussi distribué exponentiellement

## Terminologie et notation:

$P_n(t)$  = Probabilité d'avoir  $n$  clients dans le système au temps  $t$

$s$  = Nombre de serveurs

$\lambda_n$  = Taux moyen d'arrivée (espérance mathématique du nombre d'arrivées par unité de temps) de nouveaux clients dans le système lorsque  $n$  clients sont dans le système

Paramètre définissant la distribution exponentielle des arrivées lorsque  $n$  clients sont dans le système

$\frac{1}{\lambda_n}$  = Temps moyen entre les arrivées lorsque  $n$  clients sont dans le système

$\mu_n$  = Taux moyen de service d'un client lorsque  $n$  clients sont dans le système  
Paramètre définissant la distribution exponentielle du service d'un client lorsque  $n$  clients sont dans le système

$\frac{1}{\mu_n}$  = Temps moyen de service d'un client lorsque  $n$  clients sont dans le système

Quand nous commençons à analyser un système de file d'attente, l'état de ce dernier dépend beaucoup de l'état initial et du temps écoulé. Nous disons alors que le système est en situation **transitoire**, et son étude est alors très complexe.

C'est pourquoi dans la théorie des files d'attente, nous préférons faire l'étude une fois que le système a atteint sa situation d'**équilibre** où les états du système sont essentiellement indépendantes de l'état initial et du temps déjà écoulé.

On suppose en quelque sorte que le système est en opération depuis un très long moment.

## Notation et terminologie lorsque la situation d'équilibre tient:

$P_n$  = Probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans le système

$L$  = Nombre moyen (espérance mathématique) de client dans le système

$L_q$  = Nombre moyen de client dans la file d'attente (excluant ceux dans le service)

$W$  = Temps moyen dans le système

$W_q$  = Temps moyen dans la file (excluant le temps de service)

$s$  = Nombre de serveurs

Alors

$$L = \sum_n n P_n$$

$$L_q = \sum_{n \geq s} (n - s) P_n$$

De plus, définissons

$$\bar{\lambda} = \sum_n \lambda_n P_n \quad (\text{taux moyen d'arrivée})$$

Par les formules de Little

$$L = \bar{\lambda} W$$

$$L_q = \bar{\lambda} W_q$$

Donc, essentiellement il faut d'abord déterminer les  $P_n$   
pour compléter l'étude d'une file d'attente

## 2. Processus de naissance et de mort

### Hypothèses:

Le temps s'écoulant entre deux arrivées consécutives est distribué exponentiellement

Le temps de service est aussi distribué exponentiellement

Sous les hypothèses précédentes, une file d'attente peut être vue comme un processus de naissance et de mort:

naissance  $\leftrightarrow$  arrivée du client

mort  $\leftrightarrow$  départ du client du système après son service

Dans le processus de naissance et de mort:

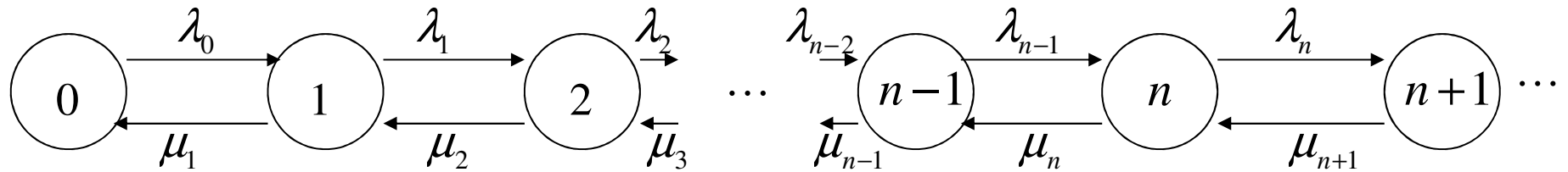
Hyp. 1: Naissance  $\leftrightarrow$  Le temps s'écoulant entre deux naissances consécutives est distribué exponentiellement

Hyp. 2: Mort  $\leftrightarrow$  Le temps s'écoulant entre deux morts consécutives est aussi distribué exponentiellement

Hyp. 3: Chaque transition à partir de l'état  $n$  est de type

$n \rightarrow (n+1)$  (une seule naissance) ou  $n \rightarrow (n-1)$  (une seule mort)

## Diagramme de transition entre les états



$\lambda_n$  = Taux moyen de naissance lorsque  $n$  personnes sont dans le système

$\mu_n$  = Taux moyen de mort lorsque  $n$  personnes sont dans le système

Le processus de naissance et de mort peut être considéré comme une chaîne de Markov en temps continu où les densités de transitions sont spécifiées à l'aide des  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ .



MAIS les équations d'équilibre suivantes donne un système d'équations plus facile à résoudre pour identifier les  $\pi_j$ :

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij} \quad j \in \{0, \dots, M\}$$
$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

Interprétation intuitive:

$\pi_j q_j$  : taux auquel le processus part de  $j$

puisque  $\pi_j$  : probabilité (à l'équilibre) que le processus soit dans l'état  $j$

$q_j$  : taux de transition pour sortir de l'état  $j$  étant donné que le processus est dans l'état  $j$

$\pi_i q_{ij}$  : taux de passage de l'état  $i$  à l'état  $j$

puisque  $q_{ij}$  : taux de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  étant donné que le processus est dans l'état  $i$

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij}$  : taux de passage à l'état  $j$  quelque soit l'état  $i$  dans lequel se trouve

le processus

Donc il s'ensuit que

taux de départ de  $j$  = taux d'arrivée à  $j$

Interprétation intuitive:

$\pi_j q_j$  : taux auquel le processus part de  $j$

puisque  $\pi_j$  : probabilité (à l'équilibre) que le processus soit dans l'état  $j$

$q_j$  : taux de transition pour sortir de l'état  $j$  étant donné que le processus est dans l'état  $j$

$\pi_i q_{ij}$  : taux de passage de l'état  $i$  à l'état  $j$

puisque  $q_{ij}$  : taux de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  étant donné que le processus est dans l'état  $i$

$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij}$  : taux de passage à l'état quelque soit l'état  $i$  dans lequel se trouve

le processus

Donc il s'ensuit que

taux de départ de  $j$  = taux d'arrivée à  $j$

Nous utilisons donc par la suite ces

**ÉQUATIONS DE BALANCE**

## ÉQUATIONS DE BALANCE

### Équations d'équilibre

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij} \quad j \in \{0, \dots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

### Intensités de transition

$$q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^M q_{ji}$$

Remplaçons les valeurs des  $q_j$  dans les équations d'équilibre:

$$\pi_j q_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij} \Leftrightarrow \pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij} \quad j \in \{0, \dots, M\}$$

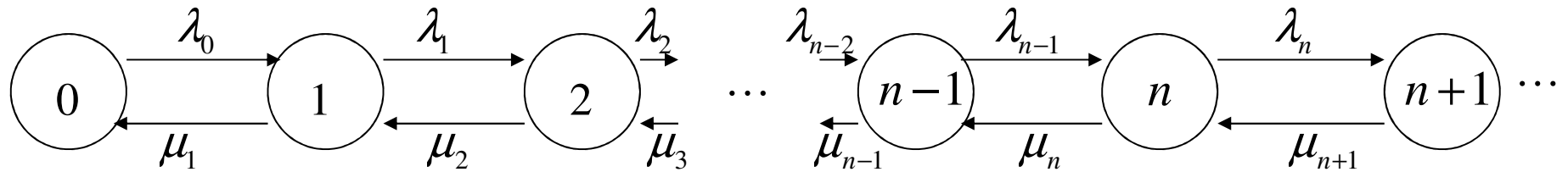
Donc les équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M q_{ji} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M \pi_i q_{ij} \quad j \in \{0, \dots, M\}$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

taux de départ de  $j$  = taux d'arrivée à  $j$

## Diagramme de transition entre les états



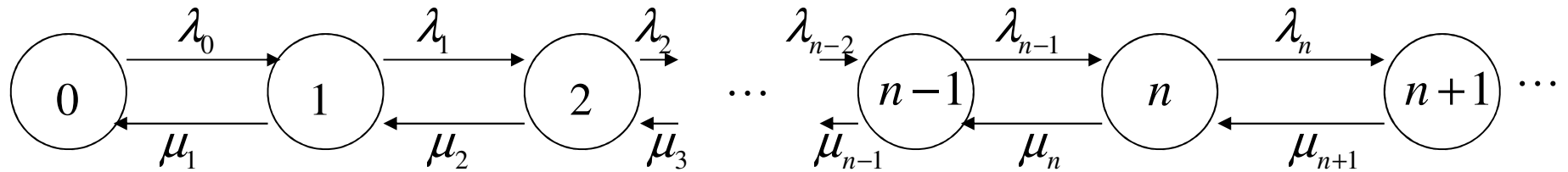
$\lambda_n$  = Taux moyen de naissance lorsque  $n$  personnes sont dans le système

$\mu_n$  = Taux moyen de mort lorsque  $n$  personnes sont dans le système

Le processus de naissance et de mort peut être considéré comme une chaîne de Markov en temps continu où les densités de transitions sont spécifiées à l'aide des  $\lambda_n$  et  $\mu_n$ .

Nous pouvons donc appliquer les équations de balance pour déterminer les probabilités à l'équilibre  $P_n$ .

## Diagramme de transition entre les états



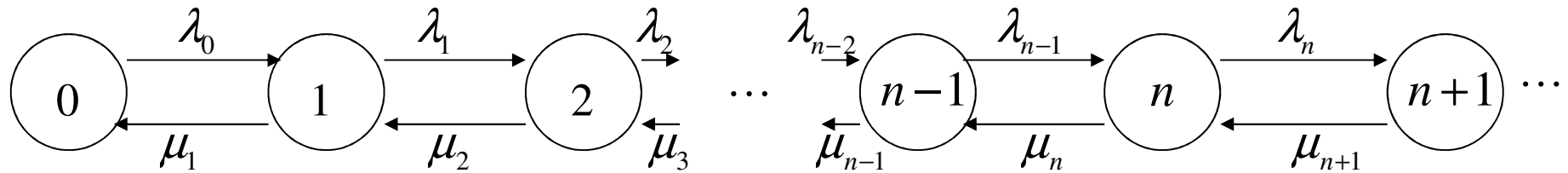
Nous pouvons donc appliquer les équations de balance pour déterminer les probabilités à l'équilibre  $P_n$ .

Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

## Diagramme de transition entre les états



Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

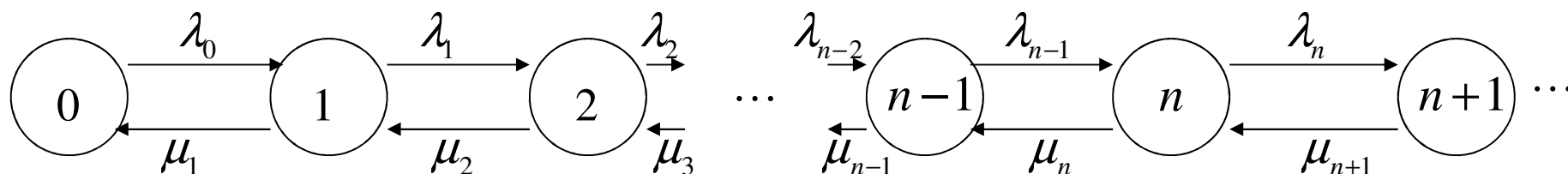
Pour  $n = 0$

$$P_0 \lambda_0 = P_1 \mu_1$$

Pour  $n = 1, 2, \dots$

$$P_n (\lambda_n + \mu_n) = P_{n-1} \lambda_{n-1} + P_{n+1} \mu_{n+1}$$

## Diagramme de transition entre les états



État  $n$

$$0 \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$1 \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} \underbrace{(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)}_0 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$2 \quad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} \underbrace{(\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1)}_0 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

⋮

$$n \quad P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} \underbrace{(\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1})}_0 = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \dots \frac{\lambda_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

⋮

Pour  $n = 0$

$$P_0 \lambda_0 = P_1 \mu_1$$

Pour  $n = 1, 2, \dots$

$$P_n (\lambda_n + \mu_n) = P_{n-1} \lambda_{n-1} + P_{n+1} \mu_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} (\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1})$$

État  $n$

$$0 \quad P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$1 \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} \underbrace{(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)}_0 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$2 \quad P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} \underbrace{(\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1)}_0 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

⋮

$$n \quad P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}} \underbrace{(\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1})}_0 = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \dots \frac{\lambda_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

⋮

Pour simplifier

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$



Pour simplifier

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Pour déterminer  $P_0$ , nous utilisons

$$1 = \sum_j P_j = P_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 = P_0 \left[ 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} \right] \Leftrightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}}$$

Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

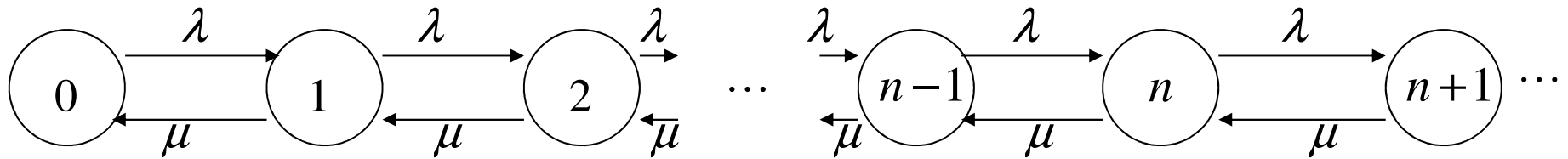
$$\sum_j \pi_j = 1$$

### 3. File d'attente infinie avec un serveur ( $s = 1$ ): $M / M / 1$

Considérons un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_n \equiv \lambda \quad \forall n \\ \mu_n \equiv \mu \quad \forall n \end{array} \right\} \text{i.e., indépendants du nombre de clients dans le système}$$

## Diagramme de transition entre les états



Alors

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}}$$

Sous l'hypothèse que  $\lambda < \mu$  (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu} < 1$ , et la progression géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Notons que la condition  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$  assure que le système peut atteindre l'équilibre. Autrement le système explose!!

Alors

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Sous l'hypothèse que  $\lambda < \mu$  (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu} < 1$ , et la progression géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

De plus

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Introduisons la notion de facteur d'utilisation

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\rho$  représente en quelque sorte la proportion du temps que le serveur est occupé.

Il s'ensuit que

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$
$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}}$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Calculons maintenant les caractéristiques de la file d'attente  $M / M / 1$

a) Nombre moyen de clients dans le système

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \rho) \rho^n \\ &= (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} = (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho)^n \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{1 - \rho} \right) = (1 - \rho) \rho \frac{1}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

b) Nombre moyen de clients dans la file d'attente

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\ &= L - (1 - P_0) \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

c) Temps moyen pour un client dans le système

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \left( \text{puisque } \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \lambda \right)$$

d) Temps moyen pour un client dans la file d'attente

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$



#### 4. File d'attente infinie avec $s$ serveurs : $M / M / s$

Considérons un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où

$$\lambda_n \equiv \lambda \quad \forall n$$

$$\mu_1 \equiv \mu$$

$$\mu_2 \equiv 2\mu$$

$$\mu_3 \equiv 3\mu$$

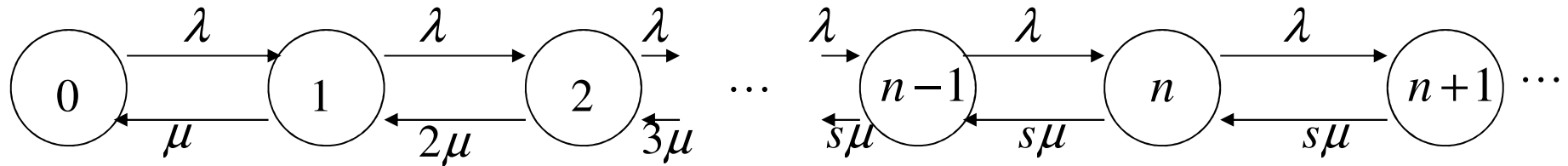
$\vdots$

$$\mu_{s-1} \equiv (s-1)\mu$$

$$\mu_n \equiv s\mu \quad \forall n \geq s$$

chaque serveur a un taux de service de  $\mu$ , mais le taux de service dépend du nombre de clients dans le système; si le nombre est inférieur à  $s$  seul un sous-ensemble de serveurs égal au nombre de clients sont actifs; si le nombre de clients est supérieur ou égal à  $s$ , les  $s$  serveurs sont actifs

## Diagramme de transition entre les états



Dénotons le facteur d'utilisation  $\rho$  comme suit:

$$\rho_s = \frac{\lambda}{s\mu} < 1.$$

Notons que la condition  $\rho_s = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$  assure que le système peut atteindre l'équilibre. Autrement le système explose!!

S'appuyant sur les équations de balance, nous pouvons déterminer les probabilités  $P_n$

Équations de balance deviennent

$$\pi_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho_s} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 & \text{si } 1 \leq n \leq s \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! s^{n-s}} P_0 & \text{si } s+1 \leq n \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho_s}{s!(1-\rho_s)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = \lambda \left[ W_q + \frac{1}{\mu} \right] = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

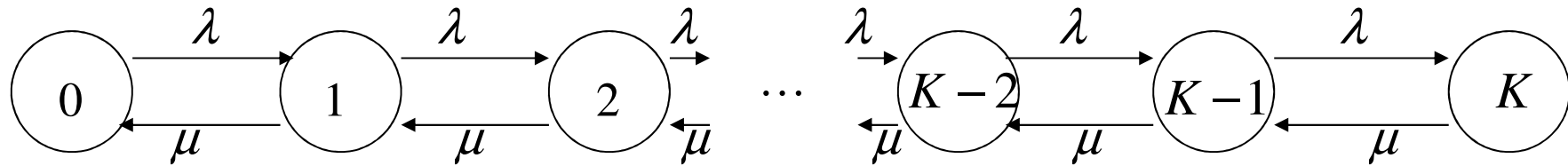
## 5. File d'attente finie avec 1 serveur ( $s = 1$ ): $M / M / 1 / K$

Considérons la situation où le système a une capacité finie  $K$ ; i.e., si le nombre de clients dans le système est  $K$ , alors il ne peut entrer dans le système et il est perdu.

Nous avons donc un modèle de file d'attente où les arrivées et les départs se produisent comme dans un processus de naissance et de mort où

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{si } n \leq K - 1 \\ 0 & \text{si } n \geq K \end{cases}$$
$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \text{si } n \leq K \\ 0 & \text{si } n \geq K + 1 \end{cases}$$

## Diagramme de transition entre les états



Alors

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^K \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n = 1, \dots, K$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^K \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}}$$

Sous l'hypothèse que  $\lambda < \mu$  (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu} < 1$ , alors

$$\sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left[ \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} \right]$$

Notons que la condition  $\frac{\lambda}{\mu} < 1$  assure que le système peut atteindre l'équilibre. Autrement le système explose!!

Alors

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^K \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Sous l'hypothèse que  $\lambda < \mu$  (le taux d'arrivée est plus petit que le taux de service)

$\frac{\lambda}{\mu} < 1$ , alors

$$\sum_{n=0}^K \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left[ \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} \right]$$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Par conséquent,

$$P_0 = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 \quad n = 1, \dots, K$$
$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}}$$

De plus, pour  $n = 1, \dots, K$

$$P_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} P_0 = P_0 \rho^n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho^n$$

Donc pour  $n = 0, 1, \dots, K$

$$P_n = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \rho^n$$

Calculons maintenant les caractéristiques de la file d'attente  $M / M / 1$

$$L = \sum_{n=0}^K n P_n = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K+1) \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = L - (1 - P_0)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$