

2. Interprétation géométrique du simplexe

Théorème fondamental

Considérons le problème de programmation linéaire sous sa forme standard

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{Sujet à} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & c, x \in R^n, b \in R^m \\ & A \text{ matrice } m \times n \end{aligned}$$

Dénotons le domaine réalisable de ce problème par

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{Sujet à} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$c, x \in R^n, b \in R^m$$

A matrice $m \times n$

Dénotons le domaine réalisable de ce problème par

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

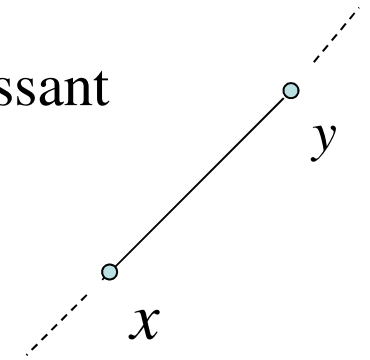
Théorème fondamental: Pour un problème de programmation linéaire sous sa forme standard où la matrice A est de rang m ,

- (i) si le domaine réalisable X n'est pas vide, alors il existe une solution de base réalisable dans cet ensemble
- (ii) s'il existe une solution (réalisable) optimale, alors il existe une solution de base (réalisable) optimale.

Représentation géométrique

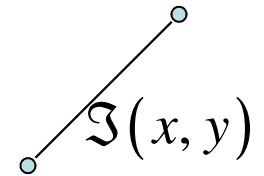
Définition: Étant donné deux points $x, y \in R^n$, la **droite** passant par x et y est définie par l'ensemble

$$\{z \in R^n : z = \theta x + (1 - \theta) y, \theta \in R^1\}.$$



Définition: Étant donné deux points $x, y \in R^n$, le **segment de droite** reliant x et y est définie par l'ensemble

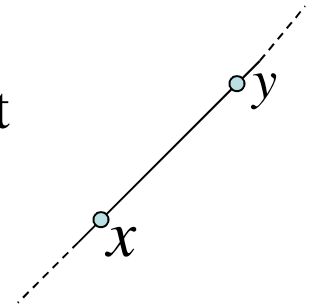
$$\mathfrak{S}(x, y) = \{z \in R^n : z = \theta x + (1 - \theta) y, \theta \in [0, 1]\}.$$



Définition: Un ensemble $X \subset R^n$ est **convexe** si pour toute paire de points $x, y \in X$, le segment de droite $\mathfrak{S}(x, y) \subset X$.

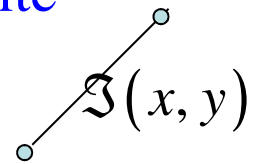
Définition: Étant donné deux points $x, y \in R^n$, la **droite** passant par x et y est définie par l'ensemble

$$\{z \in R^n : z = \theta x + (1 - \theta) y, \theta \in R^1\}.$$



Définition: Étant donné deux points $x, y \in R^n$, le **segment de droite** reliant x et y est définie par l'ensemble

$$\mathfrak{S}(x, y) = \{z \in R^n : z = \theta x + (1 - \theta) y, \theta \in [0, 1]\}.$$



Définition: Un ensemble $X \subset R^n$ est **convexe** si pour toute paire de points $x, y \in X$, le segment de droite $\mathfrak{S}(x, y) \subset X$.

Définitions.

L'hyperplan spécifié par le point $a \in R^n$ et le scalaire β est l'ensemble de R^n

$$H(a, \beta) = \{x \in R^n : a^T x = \beta\}.$$

Les demi-espaces ouverts associés à l'hyperplan $H(a, \beta)$ sont les ensembles suivants de R^n :

$$H^+(a, \beta) = \{x \in R^n : a^T x > \beta\}$$

$$H^-(a, \beta) = \{x \in R^n : a^T x < \beta\}.$$

Les demi-espaces fermés associés à l'hyperplan $H(a, \beta)$ sont les ensembles suivants de R^n :

$$H^+[a, \beta] = \{x \in R^n : a^T x \geq \beta\}$$

$$H^-[a, \beta] = \{x \in R^n : a^T x \leq \beta\}.$$

$H^-[a, \beta]$

$H(a, \beta)$

$H^+[a, \beta]$

Note. Il est facile de vérifier que tous ces ensembles sont convexes.

Les contraintes d'un problème de programmation linéaire sont des demi-espaces fermés

$$\left\{ x \in R^n : a^T x \geq \beta \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ x \in R^n : a^T x \leq \beta \right\}.$$
$$\left\{ x : \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq \beta \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ x : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq \beta \right\}$$

Pour un problème de programmation linéaire sous une forme standard, les contraintes sont des hyperplans

$$\left\{ x \in R^n : a^T x = \beta \right\} \quad \left\{ x : \sum_{j=1}^n a_j x_j = \beta \right\}.$$

Un sous-ensemble de R^n qui s'exprime comme l'intersection d'un nombre finie de demi-espaces fermés est un **polytope**.

Un polytope est donc un ensemble convexe.

Le domaine réalisable d'un problème de programmation linéaire sous forme standard

$$X = \{ x : Ax = b, x \geq 0 \}$$

est un polytope.

Un sous-ensemble de R^n qui s'exprime comme l'intersection d'un nombre finie de demi-espaces fermés est un **polytope**.

Un polytope est donc un ensemble convexe.

Le domaine réalisable d'un problème de programmation linéaire sous forme standard

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

est un polytope.

Un **polyèdre** X est un polytope borné (i.e., il existe un scalaire fini α tel que pour tout $x \in X$, $\|x\| = \sqrt{x^T x} \leq \alpha$).

Un polyèdre est un ensemble convexe.

Un sous-ensemble de R^n qui s'exprime comme l'intersection d'un nombre finie de demi-espaces fermés est un **polytope**.

Un polytope est donc un ensemble convexe.

Le domaine réalisable d'un problème de programmation linéaire sous forme standard

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

est un polytope.

Dans un ensemble convexe $C \in R^n$, tout point $x \in C$ pour lequel il n'existe aucun couple de points distincts $x^1, x^2 \in C$ différents de x , tels que $x \in \mathfrak{S}(x^1, x^2)$, est un **point extrême**.

y point extrême

z n'est pas un point extrême

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Ensemble des solutions de base de X



Points extrêmes du polytope X

Théorème: Étant donné A une matrice $m \times n$, $m \leq n$ et de rang m , alors x est un point extrême de X si et seulement si x est une solution de base de X .

Interprétation géométrique de la méthode du simplexe

Une **arête** d'un polytope $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ est un segment de droite \mathfrak{S} reliant deux points extrêmes de X ayant la propriété que tout point sur ce segment de droite ne peut pas s'exprimer comme le point milieu d'un segment de droite reliant deux points du polytope n'appartenant pas eux-mêmes à \mathfrak{S} .

$\mathfrak{S}(x^1, x^2)$ arête

$\mathfrak{S}(x^1, x^3)$ n'est pas une arête

Les deux points extrêmes reliés par une **arête** sont **adjacents**.

$$X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Théorème: L'augmentation de la valeur d'une variable hors-base et l'ajustement des variables de base pour effectuer un changement de base correspond géométriquement à se déplacer sur une arête du polytope X .

Conséquence: Au cours de l'algorithme du simplexe, les changements de base correspondent à progresser d'un point extrême à un autre le long d'arêtes autour du polytope X sans jamais pénétrer à l'intérieur de celui-ci.