

**Convergence
de
l'algorithme du simplexe**

Convergence dans le cas non dégénéré

- Hypothèse de non dégénérescence:
toutes les variables de base sont positives à chaque itération
- **Théorème 4.1:** Considérons le problème de programmation linéaire sous forme standard

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{Sujet à} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c, x \in R^n, b \in R^m \\ A \text{ matrice } m \times n \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme du simplexe se termine en un nombre fini d'itérations.

- *Preuve:*

En supposant que la matrice A est de plein rang m , chaque solution de base réalisable doit comporter m variables de base positives (hyp. non dégénérescence).

Il y a un nombre fini de façons de choisir m colonnes de A parmi les n pour former des sous matrices $m \times m$:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

Or les bases réalisables constituent un sous ensemble de ces-dernières.

Donc $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$ est une borne supérieure sur le nombre de solutions de base réalisables.

- Considérons l'effet de compléter un pivot sur la valeur de la fonction économique lors d'une itération du simplexe

Var. base	x_1	x_2	...	x_{j_r}	...	x_{j_1}	...	x_s	...	x_{j_m}	...	x_n	$-Z$	Te
x_{j_1}	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	...	0	...	1	...	\bar{a}_{1s}	...	0	...	\bar{a}_{1n}	0	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; width: fit-content; margin-bottom: 10px;"> Division de ligne r par \bar{a}_{rs} </div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> $\bar{b}_r \rightarrow \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> $\times \bar{c}_s$ </div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> Soustraire de </div>
x_{j_r}	\bar{a}_{r1}	\bar{a}_{r2}	...	1	...	0	...	\bar{a}_{rs}	...	0	...	\bar{a}_{rn}	0	
x_{j_m}	\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}	...	0	...	0	...	\bar{a}_{ms}	...	1	...	\bar{a}_{mn}	0	
$-Z$	\bar{c}_1	\bar{c}_2	...	\bar{c}_{j_r}	...	\bar{c}_{j_1}	...	\bar{c}_s	...	\bar{c}_{j_m}	...	\bar{c}_n	1	

$$-\bar{z} \rightarrow -\tilde{z} = -\bar{z} - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} > -\bar{z}$$

puisque $\bar{c}_s < 0$, $\bar{a}_{rs} > 0$, et $\bar{b}_r > 0$ par hyp. de non dégénérescence

$$-\bar{z} \rightarrow -\tilde{z} = -\bar{z} - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} > -\bar{z}$$

puisque $\bar{c}_s < 0$, $\bar{a}_{rs} > 0$, et $\bar{b}_r > 0$ par hyp. de non dégénérescence

Donc $\tilde{z} < \bar{z}$ et ainsi la valeur de l'objectif décroît strictement d'une itération à l'autre.

Par conséquent une même solution de base réalisable ne peut se répéter au cours de l'application de l'algorithme du simplexe.

Puisque le nombre de ces dernières est borné (fini), il s'ensuit que l'algorithme du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations.

Problème où l'algo. du simplexe cycle

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0	0	0
x_6	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0	0	0
 x_6	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	1	0



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0	0
x_2	$\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0	0
x_7	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	0	1
$-z$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0	0
x_2	$\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0	0
x_7	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	0	1
$-z$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
x_7	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	0	1
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
x_7	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	0	1
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0	0	0
x_4	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0	1	0

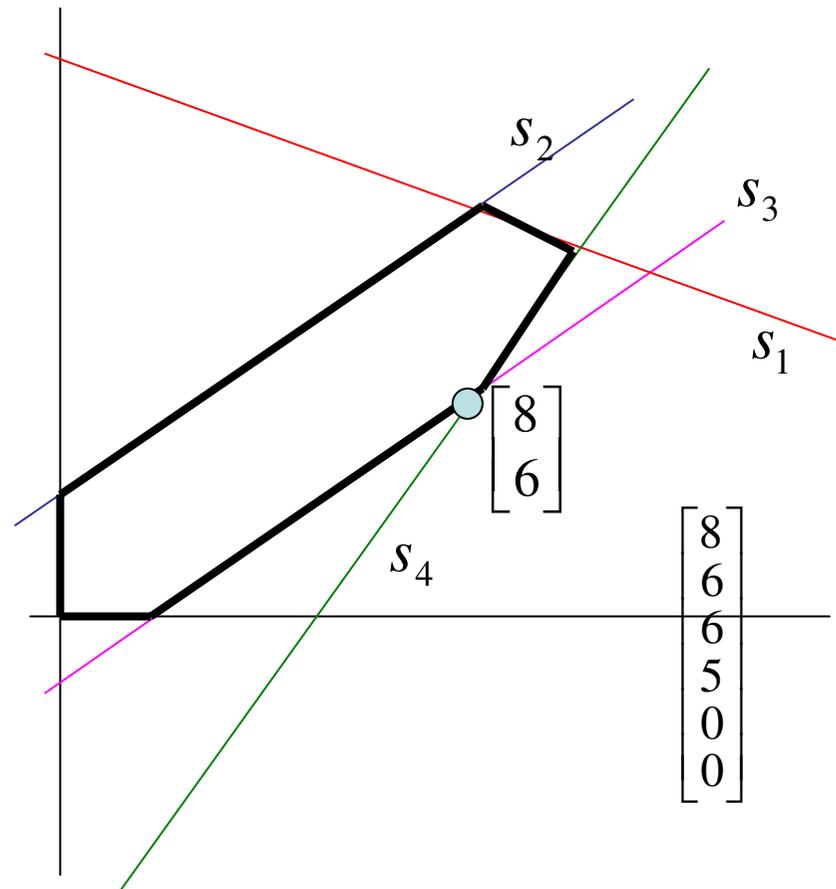
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0	0	0
$\rightarrow x_4$	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	1	0

Illustration graphique de la dégénérescence

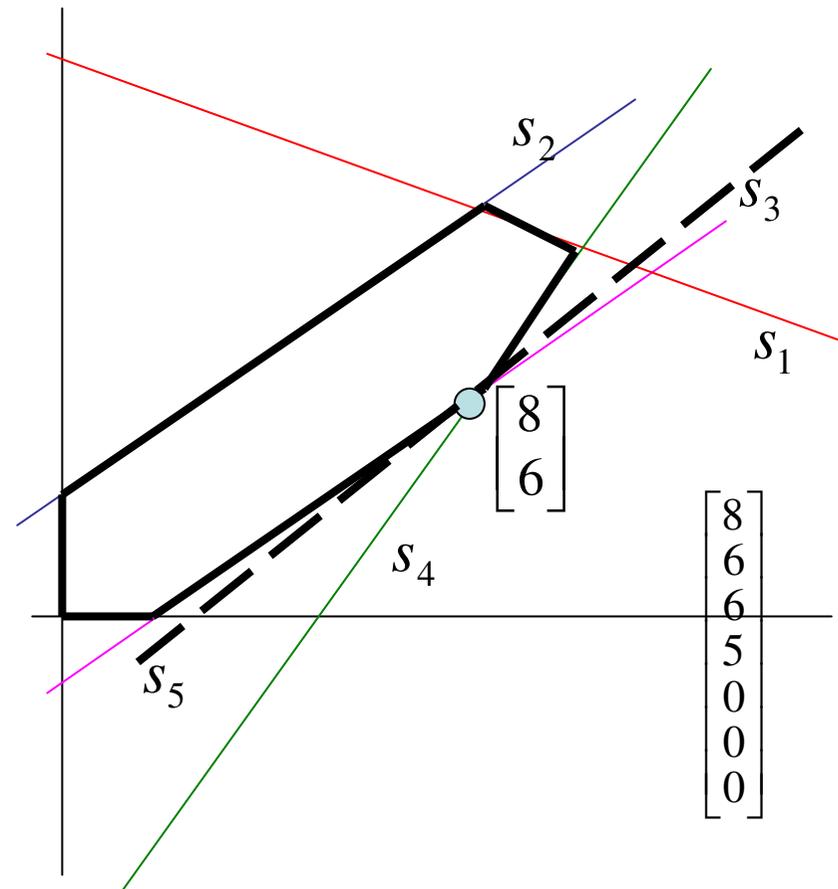
$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \quad -3x - 2y \\
 \text{Sujet à} \quad \boxed{x + 2y \leq 26} \\
 \quad \quad \quad \boxed{-x + y \leq 3} \\
 \quad \quad \quad \boxed{x - y \leq 2} \\
 \quad \quad \quad \boxed{2x - y \leq 10} \\
 \quad \quad \quad x, y \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \quad -3x - 2y \\
 \text{Sujet à} \quad \boxed{\begin{array}{l} x + 2y + s_1 \\ -x + y + s_2 \\ x - y + s_3 \\ 2x - y + s_4 \end{array}} \quad \begin{array}{l} = 26 \\ = 3 \\ = 2 \\ = 10 \end{array} \\
 \quad \quad \quad x, y, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
 \end{array}$$



$$\begin{aligned}
 &\text{Min} && -3x - 2y \\
 &\text{Sujet à} && x + 2y \leq 26 \\
 &&& -x + y \leq 3 \\
 &&& x - y \leq 2 \\
 &&& 2x - y \leq 10 \\
 &&& \boxed{6x - 5y \leq 18} \\
 &&& x, y \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Min} && -3x - 2y \\
 &\text{Sujet à} && \boxed{\begin{array}{cccc|c} x + 2y + s_1 & & & & = 26 \\ -x + y & + s_2 & & & = 3 \\ x - y & & + s_3 & & = 2 \\ 2x - y & & & + s_4 & = 10 \\ 6x - 5y & & & & + s_5 = 18 \end{array}} \\
 &&& x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0
 \end{aligned}$$



Convergence dans le cas dégénéré

Critères d'entrée et de sortie de Bland:

Critère d'entrée: La variable d'entrée x_s est celle ayant le plus petit indice parmi les variables hors base ayant un coût relatif négatif; i.e.,

$$s = \text{Min}_{j=1,\dots,n} \{j : \bar{c}_j < 0\}.$$

Critère de sortie: La variable de sortie x_{j_r} (x_{j_r} dénotant la variable de base dans la $r^{\text{ième}}$ ligne du tableau) est celle ayant le plus petit indice parmi les variables candidates à sortir de la base; i.e.,

$$j_r = \text{Min}_{l=1,\dots,m} \left\{ j_l : \bar{a}_{ls} > 0, \frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{ls}} = \text{Min}_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} \right\}.$$

Critère de sortie: La variable de sortie x_{j_r} (x_{j_r} dénotant la variable de base dans la $r^{\text{ième}}$ ligne du tableau) est celle ayant le plus petit indice parmi les variables candidates à sortir de la base; i.e.,

$$j_r = \text{Min}_{l=1, \dots, m} \left\{ j_l : \bar{a}_{ls} > 0, \frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{ls}} = \text{Min}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\} \right\}.$$

Note très importante:

Lorsque

$$\frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{ls}} = \text{Min}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

est atteint pour plusieurs indices l , alors la variable de base x_{j_r} choisi selon le critère précédent pour devenir variable de sortie devient égale à 0. Par contre les autres variables x_{j_l} où ce Min est atteint restent dans la base **mais deviennent aussi égales à 0.**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_5	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0	0
x_6	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	1	0

↑

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0	0	0
x_6	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_1	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$-z$	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0	0
x_2	$\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0	0
x_7	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	0	1
$-z$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$-\frac{75}{2}$	25	0	0	0
$\rightarrow x_2$	$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0	0
x_7	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	0	1
$-z$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
x_7	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	0	1
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0	0
x_4	$-\frac{1}{4}$	40	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0
 x_7	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	0	1
$-z$	$-\frac{1}{2}$	120	0	0	-1	1	0	1	0



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
x_4	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{250}$	0	$\frac{1}{250}$
x_1	1	-168	0	0	$-\frac{100}{125}$	$\frac{300}{125}$	$\frac{2}{125}$	0	$\frac{1}{125}$
$-z$	0	36	0	0	$-\frac{175}{125}$	$\frac{275}{125}$	$\frac{1}{125}$	1	$\frac{1}{125}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$\rightarrow x_4$	0	-2	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{250}$	0	$\frac{1}{250}$
x_1	1	-168	0	0	$-\frac{100}{125}$	$\frac{300}{125}$	$\frac{2}{125}$	0	$\frac{1}{125}$
$-z$	0	36	0	0	$-\frac{175}{125}$	$\frac{275}{125}$	$\frac{1}{125}$	1	$\frac{1}{125}$



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$-z$	
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	1
x_5	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{100}$	0	$\frac{3}{100}$
x_1	1	-180	0	6	0	$\frac{150}{125}$	$\frac{5}{125}$	0	$\frac{5}{125}$
$-z$	0	15	0	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	1	$\frac{1}{20}$

Théorème 4.2: En utilisant les critères d'entrée et de sortie de Bland, l'algorithme du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations.

Preuve. (Preuve par contradiction) Supposons qu'au contraire pour un certain problème, l'algorithme ne soit pas complété en un nombre fini d'itérations. Or étant donné qu'il existe un nombre fini de solutions de base réalisables, il s'ensuit que certaines solutions de base réalisables sont répétées au cours de la résolution avec l'algorithme du simplexe; i.e., l'algorithme cycle.

Preuve. (Preuve par contradiction) Supposons qu'au contraire pour un certain problème, l'algorithme ne soit pas complété en un nombre fini d'itérations. Or étant donné qu'il existe un nombre fini de solutions de base réalisables, il s'ensuit que certaines solutions de base réalisables sont répétées au cours de la résolution avec l'algorithme du simplexe; i.e., l'algorithme cycle. Considérons une solution de base d'une itération quelconque. Alors ou bien cette solution réalisable est optimale, ou bien nous décelons que le problème n'est pas borné inférieurement, ou bien les critères d'entrée et de sortie de Bland déterminent de façon unique l'élément du tableau sur lequel le pivot est complété.

Considérons une solution de base d'une itération quelconque. Alors ou bien cette solution réalisable est optimale, ou bien nous décelons que le problème n'est pas borné inférieurement, ou bien les critères d'entrée et de sortie de Bland déterminent de façon unique l'élément du tableau sur lequel le pivot est complété.

Par conséquent si l'algorithme cycle, alors le cycle des solutions de base réalisables qui sont répétées est unique.

Dénotons par $\Gamma \in \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des variables d'entrée au cours des itérations du cycle. Donc si $j \notin \Gamma$, alors x_j demeure une variable de base au cours de toutes les itérations du cycle ou elle demeure un variable hors base au cours de toutes les itérations du cycle. En somme son statut ne change pas au cours des itérations du cycle.

Par conséquent si l'algorithme cycle, alors le cycle des solutions de base réalisables qui sont répétées est unique.

Dénotons par $\Gamma \in \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des variables d'entrée au cours des itérations du cycle. Donc si $j \notin \Gamma$, alors x_j demeure une variable de base au cours de toutes les itérations cycle ou elle demeure un variable hors base au cours de toutes les itérations du cycle. En somme son statut ne change pas au cours de itérations du cycle.

Dénotons également

$$g = \text{Max}_{j \in \Gamma} \{j\},$$

et utilisons l'indice supérieur ' pour désigner les éléments du tableau du simplexe à l'itération où x_g devient variable d'entrée.

Dénotons également

$$g = \operatorname{Max}_{j \in \Gamma} \{j\},$$

et utilisons l'indice supérieur ' pour désigner les éléments du tableau du simplexe à l'itération où x_g devient variable d'entrée.

x_1	$x_2 \dots x_g \dots x_n$	$-z$	
\bar{a}'_{11}	$\bar{a}'_{12} \dots \bar{a}'_{1g} \dots \bar{a}'_{1n}$	0	\bar{b}'_1
\bar{a}'_{21}	$\bar{a}'_{22} \dots \bar{a}'_{2g} \dots \bar{a}'_{2n}$	0	\bar{b}'_2
\vdots	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$	\vdots	\vdots
\bar{a}'_{m1}	$\bar{a}'_{m2} \dots \bar{a}'_{mg} \dots \bar{a}'_{mn}$	0	\bar{b}'_m
\bar{c}'_1	$\bar{c}'_2 \dots \bar{c}'_g \dots \bar{c}'_n$	1	$-\bar{z}'$

Dénotons par $h^T \in R^{n+1}$ la dernière ligne du tableau:

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right].$$

x_1	x_2	\dots	x_g	\dots	x_n	$-z$	
\bar{a}'_{11}	\bar{a}'_{12}	\dots	\bar{a}'_{1g}	\dots	\bar{a}'_{1n}	0	\bar{b}'_1
\bar{a}'_{21}	\bar{a}'_{22}	\dots	\bar{a}'_{2g}	\dots	\bar{a}'_{2n}	0	\bar{b}'_2
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
\bar{a}'_{m1}	\bar{a}'_{m2}	\dots	\bar{a}'_{mg}	\dots	\bar{a}'_{mn}	0	\bar{b}'_m
\bar{c}'_1	\bar{c}'_2	\dots	\bar{c}'_g	\dots	\bar{c}'_n	1	$-\bar{z}'$

Dénotons par $h^T \in R^{n+1}$ la dernière ligne du tableau:

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right].$$

Puisque x_g est la variable d'entrée, il découle du critère d'entrée que toutes les variables ayant un indice plus petit que g ont un coût relatif plus grand ou égal à 0. De plus puisque $g = \text{Max}_{j \in \Gamma} \{j\}$

alors

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad h_j = \bar{c}'_j \geq 0 \quad \forall j \in \Gamma, j \neq g. \quad (4.1)$$

x_1	$x_2 \dots x_g \dots x_n$	$-z$	
\bar{a}'_{11}	$\bar{a}'_{12} \dots \bar{a}'_{1g} \dots \bar{a}'_{1n}$	0	\bar{b}'_1
\bar{a}'_{21}	$\bar{a}'_{22} \dots \bar{a}'_{2g} \dots \bar{a}'_{2n}$	0	\bar{b}'_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\bar{a}'_{m1}	$\bar{a}'_{m2} \dots \bar{a}'_{mg} \dots \bar{a}'_{mn}$	0	\bar{b}'_m
\bar{c}'_1	$\bar{c}'_2 \dots \bar{c}'_g \dots \bar{c}'_n$	1	$-\bar{z}'$

$$\left[\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_g \dots c_n & 1 \end{array} \right]$$

Dénotons par $h^T \in R^{n+1}$ la dernière ligne du tableau:

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right].$$

Puisque le tableau précédent a été obtenu du tableau original à l'aide d'une suite de pivots, il s'ensuit que le vecteur h^T est une combinaison linéaire des lignes de cette matrice et qu'il appartient donc à l'espace engendré par les lignes de cette dernière.

Puisque x_g est variable d'entrée à une certaine itération du cycle, elle doit être variable de sortie à une autre itération du cycle.

Utilisons l'indice supérieur " pour désigner le tableau du simplexe associé à cette itération.

Dénotons par

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, \dots, x_{j_m} \quad \text{où} \quad x_{j_r} = x_g$$

les variables de base à cette itération. Dénotons également par x_s

la variable d'entrée identifiée avec le critère de Bland. Ainsi

\bar{a}_{rs}'' est l'élément de pivot.

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots			\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots			\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

Définissons un vecteur $v \in R^{n+1}$ à partir des éléments dans la colonne de la variable d'entrée x_s dans le tableau précédent:

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Par rapport au tableau illustré plus haut le vecteur v prend la forme

$$v^T = [0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$$

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots	$[0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0$	$\bar{c}''_s]$	\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots	$[0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0$	$\bar{c}''_s]$	\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$
	$[0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0$	$\bar{c}''_s]$	

Le produit scalaire du vecteur v avec chaque ligne du tableau précédent est égal à 0. Ainsi v est perpendiculaire a chaque vecteur ligne du tableau.

Par rapport au tableau illustré plus haut le vecteur v prend la forme

$$v^T = [0 \dots \bar{a}''_{rs} \dots -1 \dots \bar{a}''_{1s} \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \quad \bar{c}''_s]$$

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots			\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots			\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & A & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_g & \dots & c_n & 1 \end{array} \right]$$

Puisque le tableau précédent a été obtenu du tableau original à l'aide d'une suite de pivots, il s'ensuit que le vecteur v est perpendiculaire aux lignes de cette matrice et qu'il est donc orthogonal à l'espace engendré par les lignes de cette dernière.

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = \sum_{l=1}^{n+1} h_l v_l = 0.$$

Notons d'abord que

$$h_{n+1} v_{n+1} = 1 \cdot \bar{c}''_s < 0.$$

Par conséquent, il doit exister au moins un indice j ($1 \leq j \leq n$)

tel que
$$h_j v_j > 0.$$

Or

si $h_j \neq 0$, alors x_j est une variable hors base dans le tableau d'indice supérieur '.

si $v_j \neq 0$, alors x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur "", ou $j = s$.

$$h^T = \left[\begin{array}{cccccc} \bar{c}'_1 & \bar{c}'_2 & \dots & \bar{c}'_g & \dots & \bar{c}'_n & 1 \end{array} \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

Or

si $h_j \neq 0$, alors x_j est une variable hors base dans le tableau d'indice supérieur '.

si $v_j \neq 0$, alors x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur '', ou $j = s$.

Donc l'indice j doit appartenir à Γ et alors

$$j \leq g.$$

Mais puisque

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad v_g = \bar{a}''_{rs} > 0,$$

il s'ensuit que $j < g$.

$$h^T = \left[\begin{array}{cccccc} \bar{c}'_1 & \bar{c}'_2 & \dots & \bar{c}'_g & \dots & \bar{c}'_n & 1 \end{array} \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

Mais puisque

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad v_g = \bar{a}''_{rs} > 0,$$

il s'ensuit que $j < g$.

Il découle donc de (4.1)

$$h_g = \bar{c}'_g < 0 \quad \text{et} \quad h_j = \bar{c}'_j \geq 0 \quad \forall j \in \Gamma, j \neq g. \quad (4.1)$$

que $h_j > 0$

et ainsi $v_j > 0$.

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

$$h^T = \left[\bar{c}'_1 \quad \bar{c}'_2 \quad \dots \quad \bar{c}'_g \quad \dots \quad \bar{c}'_n \quad 1 \right]$$

$$v_{j_i} = \bar{a}''_{is} \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_s = -1$$

$$v_{n+1} = \bar{c}''_s$$

$$v_j = 0 \quad \text{autres indices } j$$

Donc il s'ensuit que

$$h^T v = 0.$$

$$v_j > 0.$$

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

Soit $j = j_p$ tel que $\bar{a}''_{ps} = v_j > 0$.

Au cours des itérations du cycle, chaque variable conserve la même valeur.

En effet, si à une itération du cycle une variable d'entrée augmentait d'une valeur positive, alors la valeur de la fonction économique diminuerait strictement et alors l'algorithme ne pourrait cycliser.

En particulier,

$$x_j = 0 \quad \forall j \in \Gamma$$

au cours de toutes les itérations du cycle.

Par conséquent $x_{j_p} = \bar{b}_p'' = 0$.

En somme, nous venons d'établir les deux faits suivants:

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ''.

Soit $j = j_p < g$ tel que $\bar{a}''_{ps} = v_j > 0$.

et que $x_{j_p} = \bar{b}''_p = 0$.

	$x_1 \dots x_{j_r} \dots x_s \dots x_{j_1} \dots x_{j_m} \dots x_n$	$-z$	
x_{j_1}	$\bar{a}''_{11} \dots 0 \dots \bar{a}''_{1s} \dots 1 \dots 0 \dots \bar{a}''_{1n}$	0	\bar{b}''_1
\vdots			\vdots
x_{j_r}	$\bar{a}''_{r1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{rs} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{rn}$	0	\bar{b}''_r
\vdots			\vdots
x_{j_p}	$\bar{a}''_{p1} \dots 1 \dots \bar{a}''_{ps} \dots 0 \dots 0 \dots \bar{a}''_{pn}$	0	0
\vdots			\vdots
x_{j_m}	$\bar{a}''_{m1} \dots 0 \dots \bar{a}''_{ms} \dots 0 \dots 1 \dots \bar{a}''_{mn}$	0	\bar{b}''_m
$-z$	$\bar{c}''_1 \dots 0 \dots \bar{c}''_s \dots 0 \dots 0 \dots \bar{c}''_n$	1	$-\bar{z}''$

Ainsi cette variable x_{j_p} aurait dû être variable de sortie à l'itération '' selon le critère de sortie de Bland.

En somme, nous venons d'établir les deux faits suivants:

Donc x_j est une variable de base dans le tableau d'indice supérieur ”.

Soit $j = j_p < g$ tel que $\bar{a}''_{ps} = v_j > 0$.

et que $x_{j_p} = \bar{b}''_p = 0$.

Ainsi cette variable x_{j_p} aurait dû être variable de sortie à l'itération ” selon le critère de sortie de Bland.

Ceci est une contradiction au fait que nous ayons retenu plutôt x_g comme variable de sortie.

Donc en utilisant les critères d'entrée et de sortie de Bland, l'algorithme du simplexe ne peut cycler. La décroissance stricte de la valeur de la fonction économique au cours des itérations où il n'y a pas dégénérescence nous assure que l'algorithme du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations. \square