

4. Dualité
en
programmation linéaire

Illustration de la notion

- Considérons une entreprise

produisant r produits finis: $f_k =$ demande du produit $k = 1, 2, \dots, r$

utilisant s matières premières: $h_l =$ disponibilité de la matière première

$$l = 1, 2, \dots, s$$

- L'entreprise dispose de n procédés de production (activités):

$x_j =$ niveau d'utilisation du procédé $j = 1, 2, \dots, n$

$c_j =$ coût unitaire d'utilisation du procédé $j = 1, 2, \dots, n$

Le procédé j

produit e_{kj} unités de produit $k = 1, 2, \dots, r$

utilise g_{lj} unités de matière $l = 1, 2, \dots, s$

pour chaque unité de son utilisation.

Illustration de la notion

- Considérons une entreprise produisant r produits finis:
 $f_k =$ demande du produit $k = 1, 2, \dots, r$
utilisant s matières premières:
 $h_l =$ disponibilité de la matière $l = 1, 2, \dots, s$

- L'entreprise dispose de n procédés de production (activités):
 $x_j =$ niveau d'utilisation du procédé
 $j = 1, 2, \dots, n$
 $c_j =$ coût unitaire d'utilisation du procédé
 $j = 1, 2, \dots, n$

Le procédé j

produit e_{kj} unités de produit $k = 1, 2, \dots, r$
utilise g_{lj} unités de matière $l = 1, 2, \dots, s$
pour chaque unité de son utilisation.

- **Problème de l'entreprise:** déterminer le niveau d'utilisation de chaque procédé de production pour satisfaire les demandes en produits sans excéder les disponibilités des matières premières tout en minimisant le coût total de production.

- **Modèle**

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j \geq f_k \quad k = 1, 2, \dots, r \text{ (demandes)}$$

$$\sum_{j=1}^n g_{lj} x_j \leq h_l \quad l = 1, 2, \dots, s \text{ (disponibilités)}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Illustration de la notion

- Un entrepreneur propose à l'entreprise d'acheter les quantités de ses matières premières et de lui vendre les quantités de produits pour satisfaire les demandes.
- Il doit énoncer (déterminer) des prix unitaires

v_k pour les produits $k = 1, 2, \dots, r$

w_l pour les matières $l = 1, 2, \dots, s$.

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j \geq f_k \quad k = 1, 2, \dots, r \text{ (demandes)}$$

$$v_k$$

$$\sum_{j=1}^n g_{lj} x_j \leq h_l \quad l = 1, 2, \dots, s \text{ (disponibilités)}$$

$$w_l$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Illustration de la notion

- L'entrepreneur doit déterminer des prix qui soient intéressants pour l'entreprise.
- Pour vérifier l'intérêt de faire affaire avec l'entrepreneur, l'entreprise doit vérifier que pour chacun de ses procédés de production j , le coût d'acheter les unités de produits fabriquées par une unité d'utilisation du procédé j en tenant compte de ce qu'elle reçoit de l'entrepreneur pour les unités de matières qu'elle évite alors d'utiliser, que ce coût n'excède pas le coût unitaire d'utilisation c_j du procédé j

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j &\geq f_k & k=1,2,\dots,r \text{ (demandes)} & \boxed{v_k} \\ \sum_{j=1}^n g_{lj} x_j &\leq h_l & l=1,2,\dots,s \text{ (disponibilités)} & \boxed{w_l} \\ x_j &\geq 0 & j=1,2,\dots,n & \end{aligned}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^r e_{kj} v_k}_{\text{coût d'achat des produits}} - \underbrace{\sum_{l=1}^s g_{lj} w_l}_{\text{revenu de la vente des matières premières}} \leq c_j$$

Illustration de la notion

$$\underbrace{\sum_{k=1}^r e_{kj} v_k}_{\text{coût d'achat des produits}} - \underbrace{\sum_{l=1}^s g_{lj} w_l}_{\text{revenu de la vente des matières premières}} \leq c_j$$

- **Le problème de l'entrepreneur** est de maximiser son profit en s'assurant que ses prix restent intéressants pour l'entreprise

$$\max p = \sum_{k=1}^r f_k v_k - \sum_{l=1}^s h_l w_l$$

$$\text{Sujet à } \sum_{k=1}^r e_{kj} v_k - \sum_{l=1}^s g_{lj} w_l \leq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$v_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$w_l \geq 0 \quad l = 1, 2, \dots, s$$

Illustration de la notion

- Problème de l'entreprise: multiplions les contraintes de disponibilités par -1

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j \geq f_k \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$-1 \times \sum_{j=1}^n g_{lj} x_j \leq h_l \quad l = 1, 2, \dots, s$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j \geq f_k \quad k = 1, 2, \dots, r \text{ (demandes)}$$

$$- \sum_{j=1}^n g_{lj} x_j \geq -h_l \quad l = 1, 2, \dots, s \text{ (disponibilités)}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

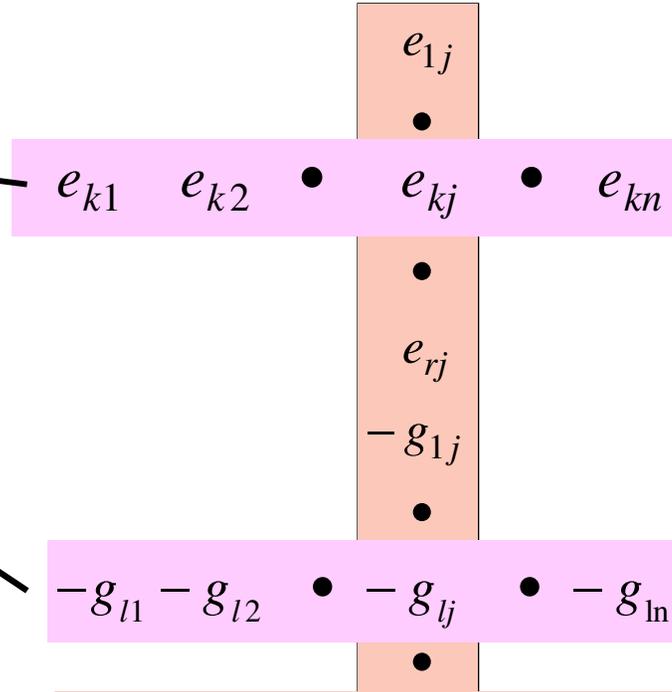
Problème de l'entreprise

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j &\geq f_k && k=1,2,\dots,r \text{ (demandes)} \\ -\sum_{j=1}^n g_{lj} x_j &\geq -h_l && l=1,2,\dots,s \text{ (disponibilités)} \\ x_j &\geq 0 && j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

Problème de l'entrepreneur

$$\begin{aligned} \max p &= \sum_{k=1}^r f_k v_k - \sum_{l=1}^s h_l w_l \\ \text{Sujet à } \sum_{k=1}^r e_{kj} v_k - \sum_{l=1}^s g_{lj} w_l &\leq c_j && j=1,2,\dots,n \\ v_k &\geq 0 && k=1,2,\dots,r \\ w_l &\geq 0 && l=1,2,\dots,s \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E \\ -G \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix}$$



$$\begin{bmatrix} E^T & -G^T \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \quad n$$

Primal

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n e_{kj} x_j \geq f_k \quad k = 1, 2, \dots, r \text{ (demandes)}$$

$$- \sum_{j=1}^n g_{lj} x_j \geq -h_l \quad l = 1, 2, \dots, s \text{ (disponibilités)}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dual

$$\max p = \sum_{k=1}^r f_k v_k - \sum_{l=1}^s h_l w_l$$

$$\text{Sujet à } \sum_{k=1}^r e_{kj} v_k - \sum_{l=1}^s g_{lj} w_l \leq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$v_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$w_l \geq 0 \quad l = 1, 2, \dots, s$$

$$\min z = c^T x$$

Sujet à

$$\begin{bmatrix} E \\ -G \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} f \\ -h \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

$$\min c^T x$$

$$\text{Sujet à } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$\max p = \begin{bmatrix} f^T & :-h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Sujet à

$$\begin{bmatrix} E^T & :-G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \leq c \quad x$$

$$v, w \geq 0$$

$$\max b^T y$$

$$\text{Sujet à } A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

Problème primal et problème dual

Problème de programmation linéaire avec inégalités

Problème primal

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y

Problème dual

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{Sujet à} & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

x

Problème de programmation linéaire sous forme standard

Problème primal

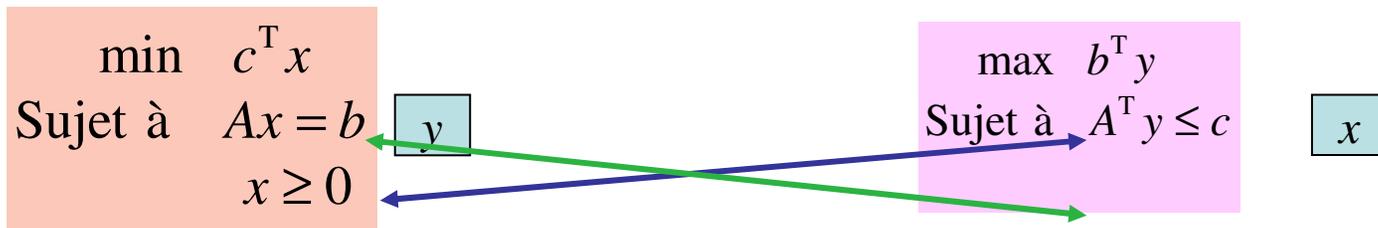
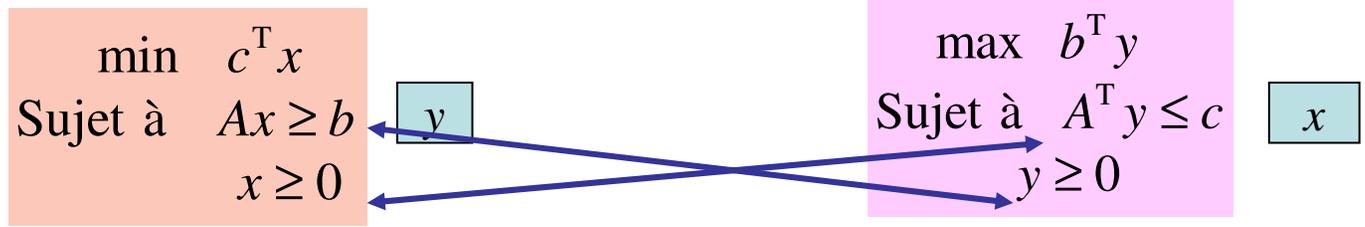
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y

Problème dual

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{Sujet à} & A^T y \leq c \end{array}$$

x



$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{Sujet à } Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min c^T x - 0^T s \\ & \text{Sujet à } Ax - Is = b \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max b^T y \\ & \text{Sujet à } A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max b^T y \\ & \text{Sujet à } \begin{bmatrix} A^T \\ -I^T \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max b^T y \\ & \text{Sujet à } A^T y \leq c \\ & -Iy \leq 0 \end{aligned}$$

Dualité et borne sur la valeur optimale du primal

Considérons le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à } \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Considérons également un vecteur $y = [y_1, \dots, y_m]^T$ où y_i est un multiplicateur associé à la $i^{\text{ième}}$ contrainte du problème de programmation linéaire.

En supposant que $y_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, alors la combinaison linéaire des contraintes du problème précédent évaluée en utilisant les multiplicateurs y_i devient

$$\sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Min } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{Sujet à } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad y_i \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \\
y &= [y_1, \dots, y_m]^T \quad \text{où } y_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \\
& \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que les multiplicateurs sont tels que

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Alors puisque $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$

$$\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j. \tag{3.2}$$

Combinant (3.1) et (3.2),

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\text{Min } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{Sujet à } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad y_i \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \\
y &= [y_1, \dots, y_m]^T \quad \text{où } y_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \\
& \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n. \quad x_j \\
\sum_{j=1}^n c_j x_j &\geq \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\sum_{i=1}^m b_i y_i$ est une borne inférieure sur la valeur de toute solution du problème de programmation linéaire précédent et par conséquent sur la valeur optimale z^* de ce dernier.

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \quad y_j$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

$$y = [y_1, \dots, y_m]^T \text{ où } y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n \quad x_j$$

$\sum_{i=1}^m b_i y_i$ est une borne inférieure sur la valeur optimale z^* .

Ainsi pour retrouver la meilleure borne inférieure sur la valeur optimale z^* il suffit de

$$\text{Max } \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

sur l'ensemble des vecteurs $y \in R^m$ satisfaisant les contraintes

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Théorèmes de dualité

- Il est facile de démontrer que nous pouvons passer d'une paire de problèmes primal-dual à l'autre.
- Il est également facile de démontrer que le problème dual du problème dual est le problème primal.
- Nous allons donc démontrer les théorèmes de dualité en se référant à la paire où le problème primal est sous forme standard:

primal

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{Sujet à} & A^T y \leq c \end{array}$$

Théorèmes de dualité

- *Théorème de dualité faible*

Si $x \in \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ (i.e., x est réalisable pour le problème primal) et
si $y \in \{y: A^T y \leq c\}$ (i.e., y est réalisable pour le problème dual),

alors $b^T y \leq c^T x$

Preuve En effet, $b^T y = x^T A^T y \leq x^T c$ puisque $A^T y \leq c$ et que $x \geq 0$.

Théorèmes de dualité

- **Corollaire** Si $x^* \in \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ et $y^* \in \{y: A^T y \leq c\}$, et si $b^T y^* = c^T x^*$, alors x^* et y^* sont des solutions optimales respectivement pour le problème primal et pour le problème dual.

Preuve Du théorème de dualité faible, il découle que pour toute solution réalisable x du problème primal

$$c^T x \geq b^T y^*$$

Par conséquent x^* est solution optimale du problème primal.

Une preuve similaire est utilisée pour démontrer que y^* est solution optimale du problème dual.

Théorèmes de dualité

- **Théorème de dualité forte** Si un des deux problèmes primal ou dual possède une solution optimale avec valeur finie, alors la même chose est vraie pour l'autre problème, et les valeurs optimales des deux problèmes sont égales. Si un des deux problèmes n'est pas borné, alors le domaine réalisable de l'autre problème est vide.

Preuve La seconde partie de l'énoncé découle directement du théorème de dualité faible. En effet, supposons que le problème primal n'est pas borné inférieurement; ainsi $c^T x \rightarrow -\infty$. Or si le problème dual était réalisable, alors il existerait un $y \in \{y: A^T y \leq c\}$ et par le théorème de dualité faible, nous aurions que $b^T y \leq c^T x$; i.e., $b^T y$ serait une borne inférieure sur la valeur de la fonction économique du primal $c^T x$, une contradiction.

Notion de multiplicateurs du simplexe

$$\bar{c}^{-T} = c^T - c_B^T B^{-1} A$$

Dénotons le vecteur $\pi \in R^m$ défini par

$$\pi^T = c_B^T B^{-1}$$

Alors

$$\bar{c}^{-T} = c^T - \pi^T A$$

ou

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{\bullet j}$$

où $a_{\bullet j}$ dénote la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice de contrainte A

π est le vecteur des multiplicateurs du simplexe associé à la base B .

Théorèmes de dualité

Pour démontrer la première partie, supposons que le problème primal possède une solution de base optimale x^* pour laquelle la valeur de la fonction économique est égale à z^* .

Soit $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ les variables de base correspondantes.

Dénotons $c_B = [c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m}]^T$, et π le vecteur des multiplicateurs associés à la base optimale. Rappelons que les coûts relatifs des variables sont définis comme suit

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{\bullet j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

où $a_{\bullet j}$ dénote la j^e colonne de la matrice A .

Supposons que cette solution de base optimale est telle que

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{\bullet j} \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Par conséquent

$$\pi^T a_{\bullet j} \leq c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Théorèmes de dualité

Supposons que cette solution de base optimale est telle que

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{\bullet j} \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Par conséquent

$$\pi^T a_{\bullet j} \leq c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

ou

$$a_{\bullet j}^T \pi \leq c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

ce qui s'écrit sous la forme matricielle

$$A^T \pi \leq c \quad .$$

Ceci implique que

$$\pi \in \{y : A^T y \leq c\}$$

c'est-à-dire que π est une solution réalisable pour le problème dual.

Théorèmes de dualité

Évaluons maintenant la valeur de la solution réalisable π pour le problème dual. Rappelons d'abord la définition de π

$$\pi = B^{-1T} c_B$$

Il s'ensuit que

$$b^T \pi = b^T B^{-1T} c_B = (B^{-1}b)^T c_B = x_B^{*T} c_B = z^*$$

Par conséquent, il découle du Corollaire du théorème de dualité faible que π est une solution optimale du problème dual, et que

$$\pi^T b = z^* \quad \bullet$$

Théorie des écarts complémentaires

- Les prochains résultats introduisent de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour que des solutions réalisables respectivement pour les problèmes primal et dual soient optimales pour ceux-ci.
- Considérons d'abord la paire suivante de problèmes primal-dual

primal

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{Sujet à} & A^T y \leq c \end{array} \quad \boxed{x}$$

Théorie des écarts complémentaires

- *Théorème des écarts complémentaires 1*

Soit x et y des solutions réalisables respectivement pour les problèmes primal et dual précédents. Alors x et y sont des solutions optimales pour ces problèmes si et seulement si pour tout $j = 1, 2, \dots, n$

$$(i) \quad x_j > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\bullet j}^T y = c_j$$

$$(ii) \quad a_{\bullet j}^T y < c_j \quad \Rightarrow \quad x_j = 0$$

$$\begin{array}{l} \min \quad c^T x \\ \text{Sujet à} \quad Ax = b \\ \quad \quad \quad x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max \quad b^T y \\ \text{Sujet à} \quad A^T y \leq c \end{array} \quad x$$

Preuve Démontrons d'abord que les conditions sont suffisantes. Supposons que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites pour tout $j=1, 2, \dots, n$. Alors

$$x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{j=1}^n x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = 0$$

Théorie des écarts

$$x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = 0$$

$$\text{Donc } \sum_{j=1}^n x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = 0$$

$$\text{Or } \sum_{j=1}^n x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = \sum_{j=1}^n x_j a_{\bullet j}^T y - \sum_{j=1}^n x_j c_j = x^T A^T y - c^T x = b^T y - c^T x$$

Par conséquent

$$b^T y = c^T x$$

et le corollaire du théorème de dualité faible implique que x et y sont des solutions optimales respectivement pour les problèmes primal et dual.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j a_{\bullet j}^T y &= [x_1 a_{\bullet 1}^T + x_2 a_{\bullet 2}^T + \dots + x_n a_{\bullet n}^T] y \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{\bullet 1}^T \\ a_{\bullet 2}^T \\ \vdots \\ a_{\bullet n}^T \end{bmatrix} y \\ &= x^T A^T y \end{aligned}$$

Théorie des écarts complémentaires

Inversement, démontrons que les conditions sont nécessaires. Supposons que les solutions x et y sont optimales respectivement pour le primal et le dual. Par conséquent, se référant à la première partie de la preuve

$$\sum_{j=1}^n x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = \sum_{j=1}^n x_j a_{\bullet j}^T y - \sum_{j=1}^n x_j c_j = x^T A^T y - c^T x = b^T y - c^T x = 0$$

Puisque $x_j \geq 0$ et $a_{\bullet j}^T y \leq c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$,

il s'ensuit que $x_j [a_{\bullet j}^T y - c_j] = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

et la preuve est complétée.

Théorie des écarts complémentaires

- Considérons maintenant l'autre paire de problèmes primal-dual

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \boxed{y}$$

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{Sujet à} & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array} \quad \boxed{x}$$

- **Théorème des écarts complémentaires 2**

Soit x et y des solutions réalisables respectivement pour les problèmes primal et dual précédents. Alors x et y sont des solutions optimales pour ces problèmes si et seulement si

pour tout $j = 1, 2, \dots, n$

$$(i) \quad x_j > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\bullet j}^T y = c_j$$

$$(ii) \quad a_{\bullet j}^T y < c_j \quad \Rightarrow \quad x_j = 0$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, m$

$$(iii) \quad a_{i\bullet} \cdot x > b_i \quad \Rightarrow \quad y_i = 0$$

$$(iv) \quad y_i > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{i\bullet} \cdot x = b_i$$

Théorie des écarts complémentaires

Preuve Ce théorème peut être démontré comme un corollaire du théorème des écarts complémentaires 1. Transformons le problème primal sous une forme standard en introduisant des variables d'écarts s_i , $i=1,2,\dots,m$. le problème devient alors

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax - Is = b \\ & x, s \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Le dual de ce problème s'écrit

$$\left. \begin{array}{l} \max \quad b^T y \\ \text{Sujet à} \quad A^T y \leq c \\ \quad \quad \quad -I y \leq 0 \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \max \quad b^T y \\ \text{Sujet à} \quad A^T y \leq c \\ \quad \quad \quad I y \geq 0 \end{array} \right.$$

Théorie des écarts complémentaires

Appliquons le théorème précédent pour la paire de problèmes suivants

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax - Is = b \\ & x, s \geq 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{Sujet à} & A^T y \leq c \\ & -I y \leq 0 \end{array}$$

x

s

Pour $j=1,2,\dots,n$

$$(i) \quad x_j > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\bullet j}^T y = c_j$$

$$(ii) \quad a_{\bullet j}^T y < c_j \quad \Rightarrow \quad x_j = 0$$

et pour $i=1,2,\dots,m$

$$(iii) \quad s_i > 0 \quad \Rightarrow \quad -y_i = 0$$

$$(iv) \quad -y_i < 0 \quad \Rightarrow \quad s_i = 0$$

Théorie des écarts complémentaires

Pour $j=1,2,\dots,n$

$$(i) \quad x_j > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\bullet j}^T y = c_j$$

$$(ii) \quad a_{\bullet j}^T y < c_j \quad \Rightarrow \quad x_j = 0$$

et pour $i=1,2,\dots,m$

$$(iii) \quad s_i > 0 \quad \Rightarrow \quad -y_i = 0$$

$$(iv) \quad -y_i < 0 \quad \Rightarrow \quad s_i = 0$$

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax - Is = b \\ & x, s \geq 0 \end{array}$$

Or $s_i = a_{i\bullet} x - b_i$ et alors les conditions deviennent

$$(iii) \quad a_{i\bullet} x > b_i \quad \Rightarrow \quad y_i = 0$$

$$(iv) \quad y_i > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{i\bullet} x = b_i$$

Algorithme dual du simplexe

- L'algorithme dual du simplexe est une méthode itérative pour résoudre un problème de programmation linéaire sous sa forme standard

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujet à

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Algorithme dual du simplexe

- À chaque itération nous avons une **solution de base du problème qui n'est pas réalisable**, sauf à la dernière itération de l'algorithme, et pour laquelle **les coûts relatifs de toutes les variables sont non négatifs**.
- Par exemple, considérons le problème

$$\begin{aligned}
 \min \quad z &= 3/2u + 1/2h - 27 \\
 \text{Sujet à} \quad x &+ 1/4u - 1/4h = -6/4 \\
 &-1/4u + p - 3/4h = 15/2 \\
 y &- 1/12u + 5/12h = 13/2 \\
 &x, y, u, p, h \geq 0
 \end{aligned}$$

Var. base	x	y	u	p	h	$-z$	Termes droite
x	1		1/4		-1/4		-6/4
p			-1/4	1	-3/4		15/2
y		1	-1/12		5/12		13/2
$-z$			3/2		1/2	1	27

Algorithme dual du simplexe

Analysons une itération typique de l'algorithme où le tableau du simplexe associé à la solution de base actuelle est le suivant:

Var.base	x_1 x_2 ... x_{j_r} ... x_{j_1} ... x_s ... x_{j_m} ... x_n $-z$	Termes droite
x_{j_1}	\bar{a}_{11} \bar{a}_{12} ... 0 ... 1 ... \bar{a}_{1s} ... 0 ... \bar{a}_{1n} 0	\bar{b}_1
.	.	.
x_{j_r}	\bar{a}_{r1} \bar{a}_{r2} ... 1 ... 0 ... \bar{a}_{rs} ... 0 ... \bar{a}_{rn} 0	\bar{b}_r
.	.	.
x_{j_m}	\bar{a}_{m1} \bar{a}_{m2} ... 0 ... 0 ... \bar{a}_{ms} ... 1 ... \bar{a}_{mn} 0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1 \bar{c}_2 ... 0 ... 0 ... \bar{c}_s ... 0 ... \bar{c}_n 1	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Critère de sortie

Var. base	x_1	x_2	...	x_{j_r}	...	x_{j_1}	...	x_s	...	x_{j_m}	...	x_n	$-z$	Termes droite
x_{j_1}	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	...	0	...	1	...	\bar{a}_{1s}	...	0	...	\bar{a}_{1n}	0	\bar{b}_1
.
x_{j_r}	\bar{a}_{r1}	\bar{a}_{r2}	...	1	...	0	...	\bar{a}_{rs}	...	0	...	\bar{a}_{rn}	0	\bar{b}_r
.
x_{j_m}	\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}	...	0	...	0	...	\bar{a}_{ms}	...	1	...	\bar{a}_{mn}	0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1	\bar{c}_2	...	0	...	0	...	\bar{c}_s	...	0	...	\bar{c}_n	1	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Si $\bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$, alors la solution est réalisable et optimale. L'algorithme se termine.

Critère de sortie

Var. base	x_1 x_2 ... x_{j_r} ... x_{j_1} ... x_s ... x_{j_m} ... x_n $-z$	Termes droite
x_{j_1}	\bar{a}_{11} \bar{a}_{12} ... 0 ... 1 ... \bar{a}_{1s} ... 0 ... \bar{a}_{1n} 0	\bar{b}_1
.	.	.
x_{j_r}	\bar{a}_{r1} \bar{a}_{r2} ... 1 ... 0 ... \bar{a}_{rs} ... 0 ... \bar{a}_{rn} 0	\bar{b}_r
.	.	.
x_{j_m}	\bar{a}_{m1} \bar{a}_{m2} ... 0 ... 0 ... \bar{a}_{ms} ... 1 ... \bar{a}_{mn} 0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1 \bar{c}_2 ... 0 ... 0 ... \bar{c}_s ... 0 ... \bar{c}_n 1	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Sinon soit $\bar{b}_r = \min_{1 \leq i \leq m} \{\bar{b}_i\} < 0$. Si $\bar{a}_{rj} \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$, alors le problème n'est pas réalisable. En effet puisque

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{rj} x_j \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{b}_r < 0$$

il est impossible que $\sum_{j=1}^n \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r$.

Critère de sortie

Var. base	x_1	x_2	...	x_{j_r}	...	x_{j_1}	...	x_s	...	x_{j_m}	...	x_n	$-z$	Termes droite
x_{j_1}	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	...	0	...	1	...	\bar{a}_{1s}	...	0	...	\bar{a}_{1n}	0	\bar{b}_1
.
x_{j_r}	\bar{a}_{r1}	\bar{a}_{r2}	...	1	...	0	...	\bar{a}_{rs}	...	0	...	\bar{a}_{rn}	0	\bar{b}_r
.
x_{j_m}	\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}	...	0	...	0	...	\bar{a}_{ms}	...	1	...	\bar{a}_{mn}	0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1	\bar{c}_2	...	0	...	0	...	\bar{c}_s	...	0	...	\bar{c}_n	1	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Sinon soit $\bar{b}_r = \min_{1 \leq i \leq m} \{\bar{b}_i\} < 0$. x_{j_r} est la variable de sortie.

Le pivot se fera dans la ligne r du tableau.

Critère d'entrée

Var. base	x_1	x_2	...	x_{j_r}	...	x_{j_1}	...	x_s	...	x_{j_m}	...	x_n	$-z$	Termes droite
x_{j_1}	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	...	0	...	1	...	\bar{a}_{1s}	...	0	...	\bar{a}_{1n}	0	\bar{b}_1
.
x_{j_r}	\bar{a}_{r1}	\bar{a}_{r2}	...	1	...	0	...	\bar{a}_{rs}	...	0	...	\bar{a}_{rn}	0	\bar{b}_r
.
x_{j_m}	\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}	...	0	...	0	...	\bar{a}_{ms}	...	1	...	\bar{a}_{mn}	0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1	\bar{c}_2	...	0	...	0	...	\bar{c}_s	...	0	...	\bar{c}_n	1	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\begin{matrix} \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s}x_s \\ \vdots \\ \bar{b}_r - \bar{a}_{rs}x_s \\ \vdots \\ \bar{b}_m - \bar{a}_{ms}x_s \end{matrix}$$

$$\bar{a}_{rs} < 0 \quad \Leftarrow$$

Nous allons choisir la variable d'entrée x_s de telle sorte que

- i) la valeur de la variable de sortie x_{j_r} augmente lorsque la valeur de x_s augmente
- ii) les coûts relatifs des variables demeurent non négatifs lorsque le pivot sur \bar{a}_{rs} est complété pour effectuer le changement de base

Critère d'entrée

Var. base	x_1 x_2 ... x_{j_r} ... x_{j_1} ... x_s ... x_{j_m} ... x_n $-z$	Termes droite
x_{j_1}	\bar{a}_{11} \bar{a}_{12} ... 0 ... 1 ... \bar{a}_{1s} ... 0 ... \bar{a}_{1n} 0	\bar{b}_1
x_{j_r}	$\frac{\bar{a}_{r1}}{\bar{a}_{rs}}$ $\frac{\bar{a}_{r2}}{\bar{a}_{rs}}$... $\frac{1}{\bar{a}_{rs}}$... 0 ... 1 ... 0 ... $\frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}}$ 0	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
x_{j_m}	\bar{a}_{m1} \bar{a}_{m2} ... 0 ... 0 ... \bar{a}_{ms} ... 1 ... \bar{a}_{mn} 0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1 \bar{c}_2 ... 0 ... 0 ... \bar{c}_s ... 0 ... \bar{c}_n 1	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{a}_{rs} < 0$$

En complétant le pivot sur \bar{a}_{rs} le coût relatif de la variable x_j devient

$$\bar{c}_j - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \bar{c}_s$$

Si $\bar{a}_{rj} \geq 0$, alors puisque $\bar{c}_s \geq 0$ et $\bar{a}_{rs} < 0$, la valeur de \bar{c}_j ne peut qu'augmenter.

Critère d'entrée

Var. base	$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{j_r} \quad \dots \quad x_{j_1} \quad \dots \quad x_s \quad \dots \quad x_{j_m} \quad \dots \quad x_n \quad -z$	Termes droite
x_{j_1}	$\bar{a}_{11} \quad \bar{a}_{12} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad \bar{a}_{1s} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \bar{a}_{1n} \quad 0$	\bar{b}_1
x_{j_r}	$\frac{\bar{a}_{r1}}{\bar{a}_{rs}} \quad \frac{\bar{a}_{r2}}{\bar{a}_{rs}} \quad \dots \quad \frac{1}{\bar{a}_{rs}} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}} \quad 0$	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
x_{j_m}	$\bar{a}_{m1} \quad \bar{a}_{m2} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \bar{a}_{ms} \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad \bar{a}_{mn} \quad 0$	\bar{b}_m
$-z$	$\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \bar{c}_s \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \bar{c}_n \quad 1$	$-\bar{z}_0$

$$\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{c}_{j_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{a}_{rs} < 0$$

En complétant le pivot sur \bar{a}_{rs} le coût relatif de la variable x_j devient

$$\bar{c}_j - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \bar{c}_s$$

Pour tout j tel que $\bar{a}_{rj} < 0$, il faut s'assurer que le nouveau cout relatif de la variable x_j demeure non négatif; i.e.,

$$\bar{c}_j - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \bar{c}_s \geq 0$$

Critère d'entrée

Pour tout j tel que $\bar{a}_{rj} < 0$, il faut s'assurer que le nouveau cout relatif de la variable x_j demeure non négatif; i.e.,

$$\bar{c}_j - \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \bar{c}_s \geq 0 \quad \forall j \text{ tel que } \bar{a}_{rj} < 0$$

Pivot

- Pour retrouver le tableau du simplexe associé à la nouvelle base où la variable d'entrée x_s remplace la variable de sortie x_r il suffit de faire un pivot sur l'élément $\bar{a}_{rs} < 0$.

Exemple

Var.base	x	y	u	p	h	$-z$	Termes droite
x	1		1/4		-1/4		-6/4
p			-1/4	1	-3/4		15/2
y		1	-1/12		5/12		13/2
$-z$			3/2		1/2	1	27

- x est la variable de sortie et par conséquent le pivot se fait dans la première ligne du tableau.
- h est la variable d'entrée et par conséquent le pivot se fait sur l'élément $-1/4$
- Après le pivot, le tableau devient

Var.base	x	y	u	p	h	$-z$	Termes droite
h	-4		-1		1		6
p	-3		-1	1			12
y	5/3	1	1/3				4
$-z$	2	0	2	0	0	1	24

Solution réalisable et optimale

Convergence

- Hypothèse de non dégénérescence:
les coûts relatifs de toutes les variables hors base sont positifs à chaque itération
- **Théorème** Considérons le problème de programmation linéaire sous forme standard

$$\min z = c^T x$$

$$\text{Sujet à } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$c, x \in R^n, b \in R^m$$

A matrice $m \times n$

Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme dual du simplexe se termine en un nombre fini d'itérations.

Convergence

- Preuve:

En supposant que la matrice A est de plein rang m , chaque solution de base doit comporter m variables de base.

Il y a un nombre fini de façons de choisir m colonnes de A parmi les n pour former des sous matrices $m \times m$:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

Or les bases non réalisables constituent un sous ensemble de ces-dernières.

Donc $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$ est une borne supérieure sur le nombre de solutions de base non réalisables.

Convergence

- Considérons l'effet de compléter un pivot sur la valeur de la fonction économique lors d'une itération de l'algorithme dual du simplexe

Var. base	x_1	x_2	...	x_{j_r}	...	x_{j_1}	...	x_s	...	x_{j_m}	...	x_n	$-z$	Te
x_{j_1}	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	...	0	...	1	...	\bar{a}_{1s}	...	0	...	\bar{a}_{1n}	0	Division de ligne r par \bar{a}_{rs}
x_{j_r}	\bar{a}_{r1}	\bar{a}_{r2}	...	1	...	0	...	\bar{a}_{rs}	...	0	...	\bar{a}_{rn}	0	$\bar{b}_r \rightarrow \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$ $\times \bar{c}_s$
x_{j_m}	\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}	...	0	...	0	...	\bar{a}_{ms}	...	1	...	\bar{a}_{mn}	0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1	\bar{c}_2	...	\bar{c}_{j_r}	...	\bar{c}_{j_1}	...	\bar{c}_s	...	\bar{c}_{j_m}	...	\bar{c}_n	1	$-\bar{z}_0$ Soustraire de

$$-\bar{z}_0 \rightarrow -\tilde{z}_0 = -\bar{z}_0 - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} < -\bar{z}_0$$

puisque $\bar{b}_r < 0$, $\bar{a}_{rs} < 0$, et $\bar{c}_s > 0$ par hyp. de non dégénérescence

Convergence

$$-\bar{z}_0 \rightarrow -\tilde{z}_0 = -\bar{z}_0 - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} < -\bar{z}_0$$

puisque $\bar{b}_r < 0$, $a_{rs} < 0$, et $\bar{c}_s > 0$ par hyp. de non dégénérescence.

Donc $\tilde{z}_0 > \bar{z}_0$ et ainsi la valeur de l'objectif augmente strictement d'une itération à l'autre.

Par conséquent une même solution de base non réalisable où les coûts relatifs de toutes les variables hors base sont positifs, ne peut se répéter au cours de l'application de l'algorithme dual du simplexe.

Puisque le nombre de ces dernières est borné (fini), il s'ensuit que l'algorithme dual du simplexe doit être complété en un nombre fini d'itérations.

Parallèle entre algo. du simplexe et algo. dual du simplexe

Algo. du simplexe

Recherche dans le domaine réalisable

Choisit la variable d'entrée pour réduire la valeur de la fonction économique

Choisit la variable de sortie pour préserver la réalisabilité

Stop quand une solution optimale est trouvée ou que le problème n'est pas borné inférieurement

Algo. dual du simplexe

Recherche à l'extérieur du domaine réalisable

Choisit le variable de sortie pour éliminer une variable de base négative

Choisit la variable d'entrée pour préserver la condition d'optimalité $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j$

Stop quand la solution est réalisable ou quand le problème n'est pas réalisable