

**5. Algorithme du simplexe
avec
variables bornées**

Variante du simplexe pour problème avec variables bornées

- Considérons le problème de programmation linéaire avec variables bornées suivant

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T g \\ \text{Sujet à} \quad & Ag = h \\ & l_j \leq g_j \leq q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

où $g, c, l, q \in R^n$, $h \in R^m$, et A est une matrice $m \times n$

- Ramenons à 0 les bornes inférieures en faisant le changement de variables suivant

$$x_j = g_j - l_j \quad (\text{i.e., } g_j = x_j + l_j)$$

Variante du simplexe pour problème avec variables bornées

le problème devient

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T(x+l) \\ \text{Sujet à} \quad & A(x+l) = h \\ & l_j \leq x_j + l_j \leq q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T g \\ \text{Sujet à} \quad & Ag = h \\ & l_j \leq g_j \leq q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

où $c, x, l, q \in R^n$, $h \in R^m$, et A est une matrice $m \times n$

- Ramenons à 0 les bornes inférieures en faisant le changement de variables suivant

$$x_j = g_j - l_j \quad (\text{i.e., } g_j = x_j + l_j)$$

Variante du simplexe pour problème avec variables bornées

le problème devient

$$\begin{aligned} & \min c^T(x+l) \\ \text{Sujet à} & \quad A(x+l) = h \\ & \quad l_j \leq x_j + l_j \leq q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

où $g, c, x, l \in R^n$, $h \in R^m$, et A est une matrice $m \times n$

et en remplaçant: $u_j = q_j - l_j$ et $b = h - Al$

$$\begin{aligned} & \min c^T x + c^T l \\ \text{Sujet à} & \quad Ax = b \\ & \quad 0 \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Variante du simplexe pour problème avec variables bornées

- Dans ce problème

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ \text{Sujet à} & \quad Ax = b \\ & \quad 0 \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

puisque $c^T l$ représente une constante, nous pouvons la sortir de la minimisation sans changer la solution optimale

et dans la suite de la présentation considérer le problème sans cette constante sans perte de généralité.

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ \text{Sujet à } Ax = b \\ 0 \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

- Considérons la formulation explicite du problème

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- Une façon de le résoudre est de le ramener sous une forme standard en introduisant des variables d'écart y_j ,
et d'ensuite utiliser l'algorithme du simplexe

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Tableau avec $m + n$ lignes

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j + y_j = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Tableau avec m lignes

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq x_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

tenir compte de façon implicite

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j + y_j = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Non dégénérescence:
toutes les variables de
base sont positives à
chaque itération

- Considérons une solution de base réalisable de ce problème.
- La présence des contraintes $x_j + y_j = u_j$ implique qu'au moins une des deux variables x_j ou y_j est variable de base, $j = 1, 2, \dots, n$.
- Donc une des trois situations suivantes prévaut pour chaque $j = 1, 2, \dots, n$:
 - a) $x_j = u_j$ est variable de base et $y_j = 0$ est variable hors base
 - b) $x_j = 0$ est variable hors base et $y_j = u_j$ est variable de base
 - c) $0 < x_j < u_j$ est variable de base et $0 < y_j < u_j$ est variable de base

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

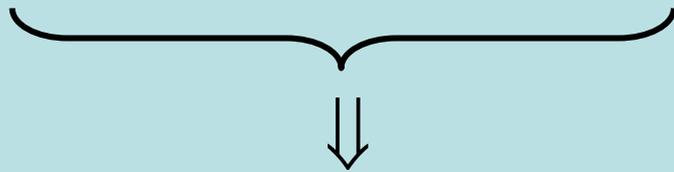
$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j + y_j = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- a) x_j de base; y_j hors base
- b) x_j hors base; y_j de base
- c) x_j de base; y_j de base

$m + n$ variables de base requises
il y a n variables y_j



Il y a au moins m variables x_j
dans la base

Exactement m variables x_j satisfont

$$0 < x_j < u_j.$$

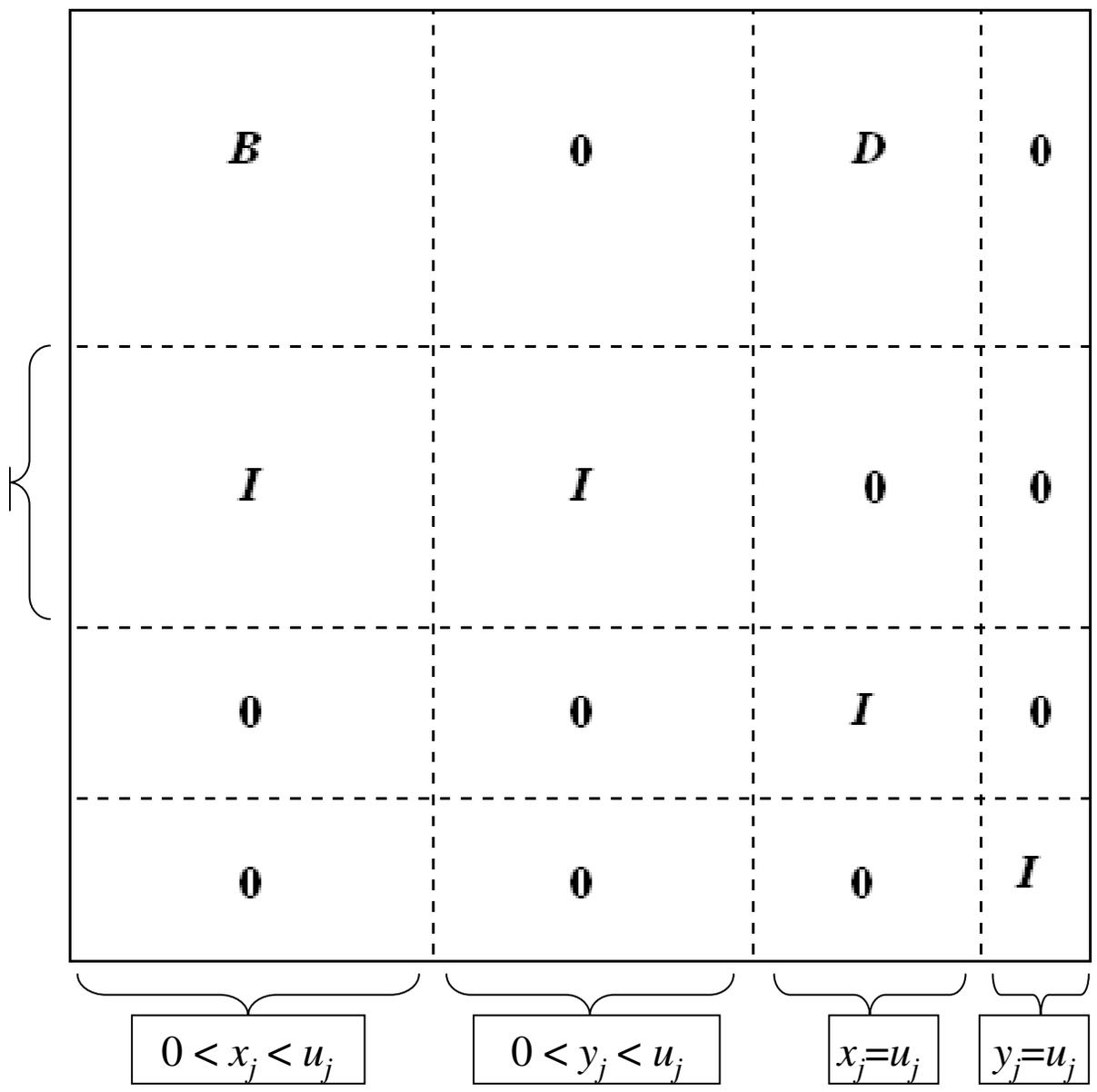
Par contradiction, si $m^0 \neq m$ variables x_j satisfaisaient la relation, alors les m^0 variables y_j correspondantes seraient également dans la base.

De plus, pour les $n - m^0$ autres indices j $x_j = u_j$ (cas a) ou bien $y_j = u_j$ (cas b) serait vérifié.

Alors le nombre de variables de base serait égal à

$$2m^0 + (n - m^0) = m^0 + n \neq m + n$$

La base a donc la forme suivante



$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujet à $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$

$$x_j + y_j = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

m

$$\min z = c^T x$$

Sujet à $Ax + 0y = b$

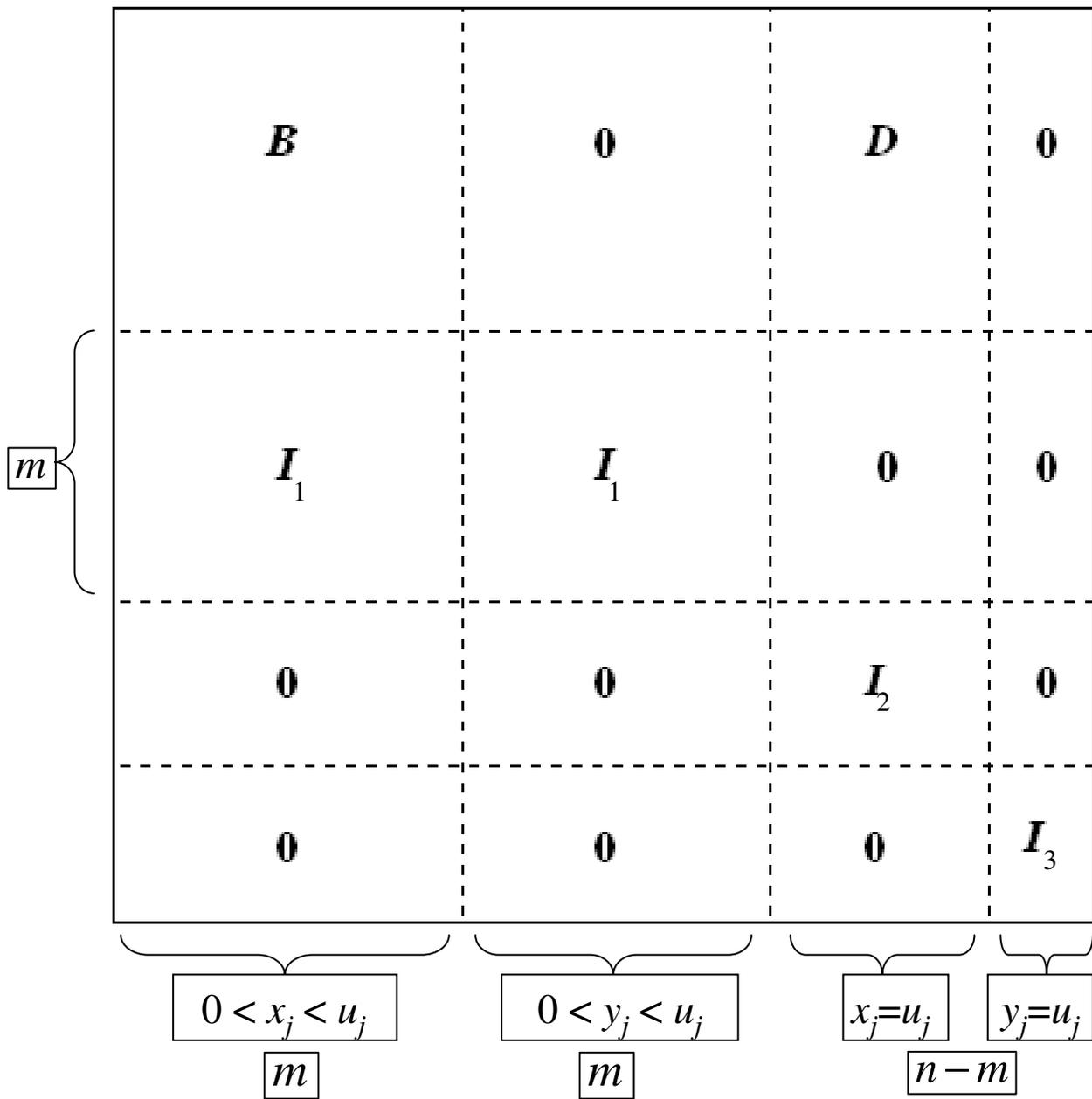
$$Ix + Iy = u$$

$$x, y \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

n

La base a donc la forme suivante



$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j + y_j = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

m

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{Sujet à } Ax + 0y &= b \\ Ix + Iy &= u \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

n

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \begin{bmatrix} B & 0 & D & 0 \\ I_1 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B & 0 & D & 0 \\ I_1 & & & \\ 0 & I & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$= d(a - bd^{-1}c)$$

où la matrice I est $n \times n$

$$\begin{aligned} \det(\mathfrak{E}) &= \det(I) \left\{ \det(B) - \det \left([0 \ D \ 0] I^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= \det(I) \left\{ \det(B) - \det(\tilde{0}) \right\} \end{aligned}$$

où la matrice $\tilde{0}$ est $m \times m$ puisque
 $[0 \ D \ 0]$ est une matrice $m \times n$ et

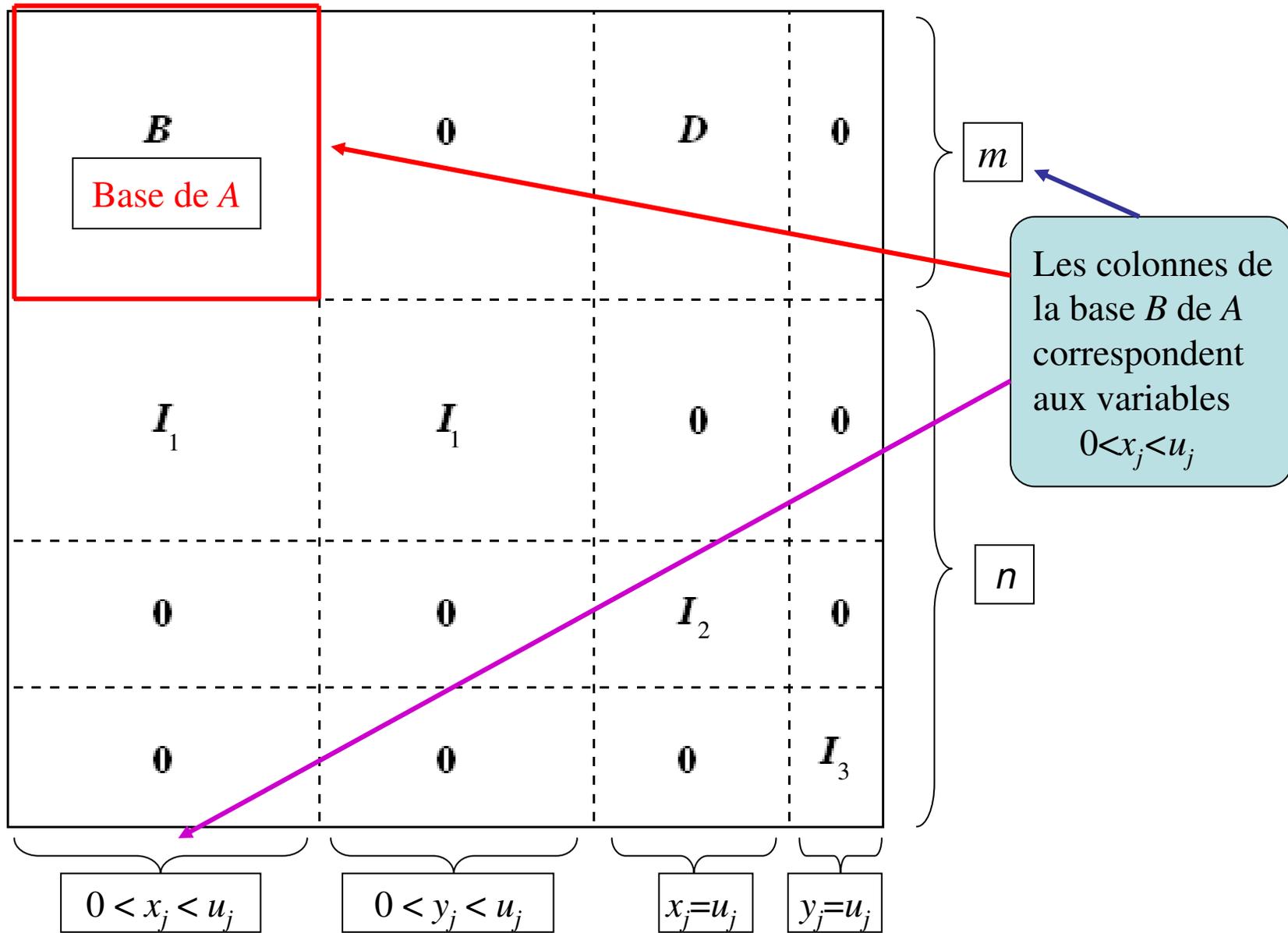
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ est une matrice } n \times m$$

Donc $\det(\mathfrak{E}) = \det(I) \det(B)$.

Puisque \mathfrak{E} est une base, alors $\det(\mathfrak{E}) \neq 0$.

Par conséquent $\det(B) = \det(\mathfrak{E}) \neq 0$ et ainsi B est non singulière.

La base a donc la forme suivante



- Ainsi, nous pouvons développer une variante du simplexe pour résoudre directement le problème

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

en traitant implicitement les bornes supérieures u_j . À chaque itération, nous allons considérer une solution (de base) associée à une base B de A ayant

$$m \text{ variables de base} \quad 0 < x_j < u_j \quad j \in IB$$

$$n - m \text{ variables hors base} \quad x_j = 0 \text{ ou } u_j \quad j \in JB$$

$$\begin{aligned} \min \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j + y_j = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

- À chaque itération, nous allons considérer une solution (de base) associée à une base B de A ayant

$$m \text{ variables de base} \quad 0 < x_j < u_j \quad j \in IB$$

$$n - m \text{ variables hors base} \quad x_j = 0 \text{ ou } u_j \quad j \in JB$$

- Si on dénote les indices des variables de base $IB = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ où j_i est l'indice de la variable de base dans la $i^{\text{ème}}$ ligne, alors

$$x_j = 0 \text{ ou } u_j \quad j \in JB$$

$$x_{j_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, m$$

| Variables dépendantes | x_1 | x_2 | \dots | x_r | \dots | x_m | x_{m+1} | \dots | x_s | \dots | x_n | $-z$ | Termes de droite |
|-----------------------|-------|-------|----------|-------|----------|-------|------------------|---------|----------------|---------|----------------|------|------------------|
| x_1 | 1 | | | | | | \bar{a}_{1m+1} | \dots | \bar{a}_{1s} | \dots | \bar{a}_{1n} | | \bar{b}_1 |
| x_2 | | 1 | | | | | \bar{a}_{2m+1} | \dots | \bar{a}_{2s} | \dots | \bar{a}_{2n} | | \bar{b}_2 |
| \vdots | | | \ddots | | | | | | \ddots | | | | \vdots |
| x_r | | | | 1 | | | \bar{a}_{rm+1} | \dots | \bar{a}_{rs} | \dots | \bar{a}_{rn} | | \bar{b}_r |
| \vdots | | | | | \ddots | | | | \ddots | | | | \vdots |
| x_m | | | | | | 1 | \bar{a}_{mm+1} | \dots | \bar{a}_{ms} | \dots | \bar{a}_{mn} | | \bar{b}_m |
| $-z$ | | | | | | | \bar{c}_{m+1} | \dots | \bar{c}_s | \dots | \bar{c}_n | 1 | \bar{z} |

Nous retrouvons les mêmes expressions que pour les problèmes sans bornes sauf que les variables hors base

$$x_j = 0 \text{ ou } u_j \quad j \in JB$$

Nous retrouvons les mêmes expressions que pour les problèmes sans bornes sauf que les variables hors base

$$x_j = 0 \text{ ou } u_j \quad j \in JB$$

Il suffit d'ajuster les critères d'entrée et de sortie en conséquence pour retrouver la variante du simplexe.

Étape 1: Choix de la variable d'entrée

Le critère pour choisir la variable d'entrée est modifié pour tenir compte des variables hors base x_j à leur borne supérieure u_j qui peuvent diminuer.

Ainsi, pour un indice $j \in JB$

si $x_j = 0$ et $\bar{c}_j < 0$, il est avantageux d'augmenter x_j

si $x_j = u_j$ et $\bar{c}_j > 0$, il est avantageux de diminuer x_j

Déterminons $\bar{c}_{s_1} = \min_{j \in JB} \{ \bar{c}_j : x_j = 0 \}$ et $\bar{c}_{s_2} = \max_{j \in JB} \{ \bar{c}_j : x_j = u_j \}$

Soit $\bar{c}_s = \min \{ \bar{c}_{s_1}, -\bar{c}_{s_2} \}$ $\left(\max \{ |\bar{c}_{s_1}|, |\bar{c}_{s_2}| \} \right)$

Si $\bar{c}_s \geq 0$, alors la solution est optimale et l'algorithme s'arrête.

Si $\bar{c}_s < 0$ et $\bar{c}_s = \bar{c}_{s_1}$, alors la variable x_{s_1} augmente; aller à l'étape 2.1.

Si $\bar{c}_s < 0$ et $\bar{c}_s = -\bar{c}_{s_2}$, alors la variable x_{s_2} diminue; aller à l'étape 2.2

Étape 2.1: Choix de la variable de sortie

- L'augmentation θ de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

i) x_s atteint sa borne sup. u_s
 ii) une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $\bar{a}_{rs} > 0$)

iii) une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $\bar{a}_{rs} < 0$)

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{j_1} = g_1 - \bar{a}_{1s}(0 + \theta) \leq u_{j_1} \\ \vdots \\ 0 \leq x_{j_r} = g_r - \bar{a}_{rs}(0 + \theta) \leq u_{j_r} \\ \vdots \\ 0 \leq x_{j_m} = g_m - \bar{a}_{ms}(0 + \theta) \leq u_{j_m} \\ x_s = 0 + \theta \leq u_s \end{aligned}$$

$$\text{Soit } g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\} \right\}$$

Pour tout i tel que $\bar{a}_{is} > 0$, alors x_{j_i} diminue lorsque x_s augmente de θ . Il faut donc que $x_{j_i} = g_i - \bar{a}_{is} \theta \geq 0 \Leftrightarrow \bar{a}_{is} \theta \leq g_i$

$$\Leftrightarrow \theta \leq \frac{g_i}{\bar{a}_{is}}$$

$$\text{Donc } \theta \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

Étape 2.1: Choix de la variable de sortie

- L'augmentation θ de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

- x_s atteint sa borne sup. u_s
- une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $a_{rs} > 0$)
- une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $\bar{a}_{rs} < 0$)

Soit
$$g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\} \right\}$$

Si $\theta = u_s$, alors l'ensemble des variables de base reste le même et la même base est utilisée à la prochaine itération. La variable x_s demeure hors base et sa valeur passe de 0 à u_s . Retourner à l'étape 1.

Étape 2.1: Choix de la variable de sortie

- L'augmentation θ de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

- x_s atteint sa borne sup. u_s
- une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $a_{rs} > 0$)
- une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $\bar{a}_{rs} < 0$)

Soit
$$g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\} \right\}$$

Si
$$\theta = \frac{g_r}{a_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}$$

alors la valeur de la variable d'entrée x_s augmente à θ .

La variable d'entrée x_s devient variable de base à la place de la variable de sortie x_{j_r} qui devient égale à 0.

Pivoter sur \bar{a}_{rs} et retourner à l'étape 1

Étape 2.1: Choix de la variable de sortie

- L'augmentation θ de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

i) x_s atteint sa borne sup. u_s

ii) une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $a_{rs} > 0$)

iii) une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $\bar{a}_{rs} < 0$)

Soit
$$g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{-\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} < 0 \right\} \right\}$$

Si
$$\theta = \frac{u_{j_r} - g_r}{-\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{-\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} < 0 \right\}$$

alors la valeur de la variable d'entrée x_s augmente à θ .

La variable d'entrée x_s devient variable de base à la place de la variable de sortie x_{j_r} qui devient égale à u_{j_r} .

Pivoter sur a_{rs} et retourner à l'étape 1

Étape 1: Choix de la variable d'entrée

Le critère pour choisir la variable d'entrée est modifié pour tenir compte des variables hors base x_j à leur borne supérieure u_j qui peuvent diminuer.

Ainsi, pour un indice $j \in JB$

si $x_j = 0$ et $\bar{c}_j < 0$, il est avantageux d'augmenter x_j

si $x_j = u_j$ et $\bar{c}_j > 0$, il est avantageux de diminuer x_j

Déterminons $\bar{c}_{s_1} = \min_{j \in JB} \{ \bar{c}_j : x_j = 0 \}$ et $\bar{c}_{s_2} = \max_{j \in JB} \{ \bar{c}_j : x_j = u_j \}$

Soit $\bar{c}_s = \min \{ \bar{c}_{s_1}, -\bar{c}_{s_2} \}$

Si $\bar{c}_s \geq 0$, alors la solution est optimale et l'algorithme s'arrête.

Si $\bar{c}_s < 0$ et $\bar{c}_s = \bar{c}_{s_1}$, alors la variable x_s augmente; aller à l'étape 2.1.

Si $\bar{c}_s < 0$ et $\bar{c}_s < \bar{c}_{s_1}$, alors la variable x_s diminue; aller à l'étape 2.2

Étape 2.2: Choix de la variable de sortie

- La réduction θ de la valeur de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

i) x_s atteint sa borne inf. 0

ii) une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $a_{rs} < 0$)

iii) une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $a_{rs} > 0$)

Soit
$$g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\} \right\}$$

Pour tout i tel que $\bar{a}_{is} > 0$, alors x_{j_i} augmente lorsque x_s diminue de θ . Il faut donc que

$$x_{j_i} = g_i - \bar{a}_{is} (-\theta) \leq u_{j_i} \Leftrightarrow \bar{a}_{is} \theta \leq u_{j_i} - g_i$$

$$\Leftrightarrow \theta \leq \frac{u_{j_i} - g_i}{\bar{a}_{is}}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{j_1} = g_1 - \bar{a}_{1s} (-\theta) \leq u_{j_1} \\ &\vdots \\ 0 &\leq x_{j_r} = g_r - \bar{a}_{rs} (-\theta) \leq u_{j_r} \\ &\vdots \\ 0 &\leq x_{j_m} = g_m - \bar{a}_{ms} (-\theta) \leq u_{j_m} \\ x_s &= u_s - \theta \geq 0 \end{aligned}$$

Donc
$$\theta \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

Étape 2.2: Choix de la variable de sortie

- La réduction θ de la valeur de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

i) x_s atteint sa borne inf. 0

ii) une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $\bar{a}_{rs} < 0$)

iii) une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $\bar{a}_{rs} > 0$)

Soit
$$g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\} \right\}$$

Si
$$\theta = \frac{g_r}{-a_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\}$$

alors la valeur de la variable d'entrée x_s est réduite de θ (i.e., $x_s \leftarrow u_s - \theta$).

La variable d'entrée x_s devient variable de base à la place de la variable de sortie x_{j_r} qui devient égale à 0.

Pivoter sur \bar{a}_{rs} et retourner à l'étape 1

Étape 2.2: Choix de la variable de sortie

- La réduction θ de la valeur de la variable d'entrée x_s est limitée par la première des trois situations suivantes qui se produit:

i) x_s atteint sa borne inf. 0

ii) une variable de base x_{j_r} décroît à 0 (dans ce cas $a_{rs} < 0$)

iii) une variable de base x_{j_r} augmente pour atteindre sa borne sup. u_{j_r} (dans ce cas $a_{rs} > 0$)

Soit
$$g_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in JB} \bar{a}_{ij} x_j$$

la valeur de la variable de base x_{j_i}

$$\theta = \min \left\{ u_s, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{g_i}{-a_{is}} : a_{is} < 0 \right\}, \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\} \right\}$$

Si
$$\theta = \frac{u_{j_r} - g_r}{a_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{u_{j_i} - g_i}{a_{is}} : a_{is} < 0 \right\}$$

alors la valeur de la variable d'entrée x_s est réduite de θ (i.e., $x_s \leftarrow u_s - \theta$).

La variable d'entrée x_s devient variable de base à la place de la variable de sortie x_{j_r} qui devient égale à u_{j_r} .

Pivoter sur a_{rs} et retourner à l'étape 1

Références

M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali, “ Linear Programming and Network Flows”, 3rd edition, *Wiley-Interscience* (2005), p217

F.S. Hillier, G.J. Lieberman, “Introduction to Operations Research”, *Mc Graw Hill* (2005), Section 7.3

D. G. Luenberger, “ Linear and Nonlinear Programming ”, 2nd edition, *Addison-Wesley* (1984), Section 3.6