

Programmation linéaire
en
nombre entiers

Introduction

- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$(P) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \text{ entier} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- $F(P) =$ domaine réalisable de P

- Exemple

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad z = -x_1 - 5x_2 \\ & \text{Sujet à} \quad x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & \quad \quad \quad x_1 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entier} \end{aligned}$$

Introduction

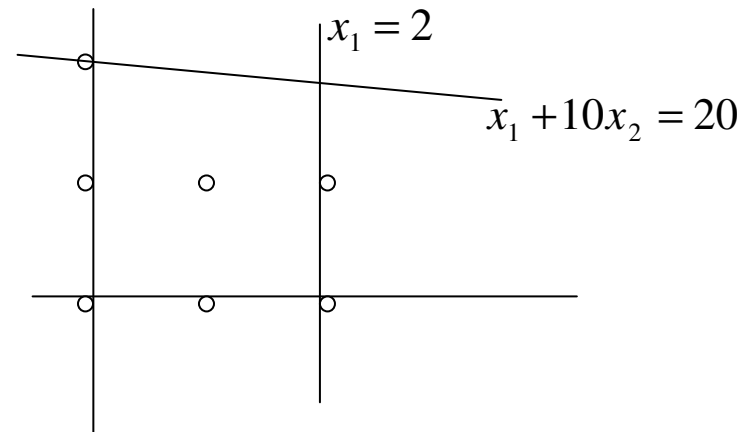
- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$(P) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \text{ entier} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- $F(P) =$ domaine réalisable de P

- Exemple

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad z = -x_1 - 5x_2 \\ & \text{Sujet à} \quad x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & \quad \quad \quad x_1 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entier} \end{aligned}$$



$$F(P) = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2)\}$$

Introduction

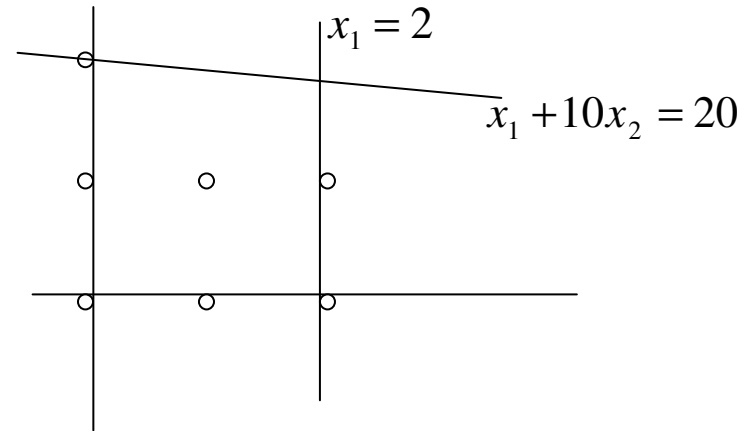
- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$\begin{aligned} (\bar{P}) \quad & \text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{Sujet à} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- $F(P) =$ domaine réalisable de P
- (\bar{P}) dénote le problème (P) où les contraintes d'intégralité sur les variables sont relaxées.

- Exemple

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad z = -x_1 - 5x_2 \\ & \text{Sujet à} \quad x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & \quad \quad \quad x_1 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$



Introduction

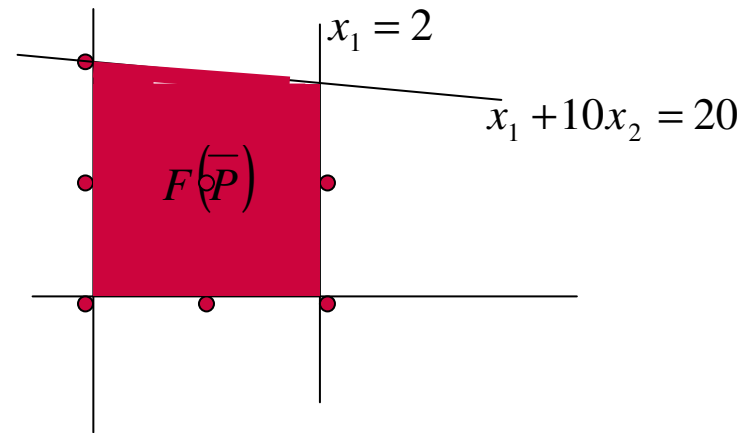
- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$\begin{aligned} (\bar{P}) \quad & \text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{Sujet à} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- $F(P)$ = domaine réalisable de P
- (\bar{P}) dénote le problème (P) où les contraintes d'intégralité sur les variables sont relaxées.

- Exemple

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = -x_1 - 5x_2 \\ \text{Sujet à} \quad & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Introduction

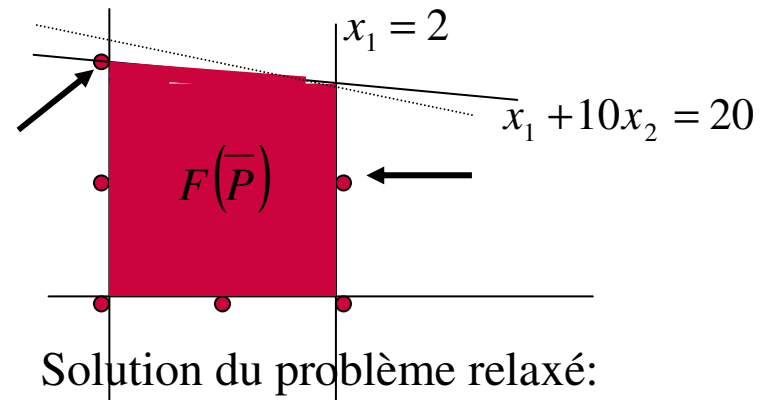
- Problème de programmation linéaire en nombres entiers

$$(P) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \text{ entier} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Résolution du problème
Pourquoi pas résoudre le problème relaxé et arrondir la solution?

- Exemple

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad z = -x_1 - 5x_2 \\ & \text{Sujet à} \quad x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & \quad \quad \quad x_1 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Solution du problème relaxé:
 $(2, 9/5)$ et $z = -11$

Solution arrondie: $(2, 1)$ et $z = -7$

Or $(0, 2)$ est réalisable avec $z = -10$

Méthodes de résolution

- Principe de base

Générer un ensemble de contraintes
linéaires que nous ajoutons à (P)

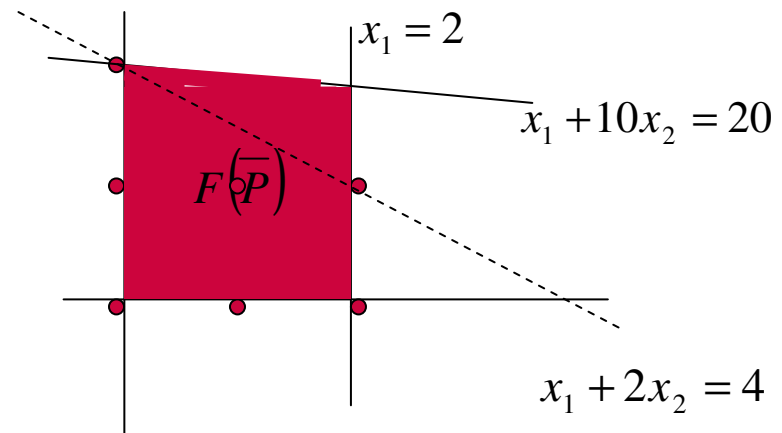
- Exemple

$$\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{Sujet à } x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}$$



Méthodes de résolution

- Principe de base

Générer un ensemble de contraintes linéaires que nous ajoutons à (P) pour engendrer un nouveau problème (PR) tel que

$$F(\overline{PR}) \subset F(\overline{P})$$

$$F(PR) = F(P)$$

De plus en résolvant le problème relaxé PR , la solution optimale est entière et donc une solution optimale pour (P) .

- Exemple

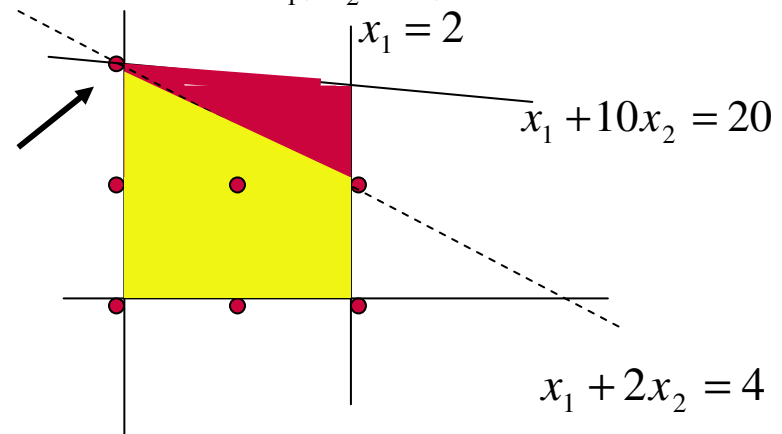
$$\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{Sujet à } x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}$$



Méthode des coupes de Gomory

- Principe des méthodes de coupes
Introduire de nouvelles contraintes linéaires au problème pour réduire le domaine réalisable du problème relaxé sans pour autant éliminer de points du domaine réalisable du problème avec les contraintes de nombre entier sur les variables.
- La procédure consiste à résoudre une suite de problèmes relaxés jusqu'à ce qu'une solution optimale en nombres entiers soit obtenue.
- Un problème de la suite est obtenu du précédent en lui ajoutant une contrainte linéaire (coupe) supplémentaire.

Considérons le problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant:

$$(P) \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \text{ entier}, \quad j = 1, \dots, n$$

Voyons comment construire une coupe de Gomory.

Soit B une base optimale de (\bar{P}) , et x_k la variable de base dans la i ième ligne du tableau optimal prenant une valeur qui n'est pas entière.

Le tableau optimal est de la forme:

var base	x_1	$x_2 \dots x_k \dots x_{j_1} \dots$	$x_j \dots x_{j_m} \dots$	x_n	$-z$	terme droite
x_{j_1}	t_{11}	$t_{12} \dots 0 \dots 1 \dots$	$t_{1j} \dots 0 \dots$	t_{1n}	0	\bar{b}_1
\vdots						
x_k	t_{i1}	$t_{i2} \dots 1 \dots 0 \dots$	$t_{ij} \dots 0 \dots$	t_{in}	0	\bar{b}_i
\vdots						
x_{j_m}	t_{m1}	$t_{m2} \dots 0 \dots 0 \dots$	$t_{mj} \dots 1 \dots$	t_{mn}	0	\bar{b}_m
$-z$	\bar{c}_1	$\bar{c}_2 \dots 0 \dots 0 \dots$	$\bar{c}_j \dots 0 \dots$	\bar{c}_n	1	$-\bar{z}$

La ligne correspondante du tableau optimal est de la forme:

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad (1)$$

où $J = \{j : j \text{ est l'indice d'une variable hors base}\}$ et \bar{b}_i n'est pas entier.

La ligne correspondante du tableau est de la forme:

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad (1)$$

où $J = \{j : j \text{ est l'indice d'une variable hors base}\}$ et

\bar{b}_i n'est pas entier.

Dénotons $\lfloor d \rfloor =$ le plus grand entier (plancher) $\leq d$.

Puisque $x_j \geq 0 \quad \forall j$, alors

$$\sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \sum_{j \in J} t_{ij} x_j$$

et par conséquent

$$x_k + \sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i. \quad (2)$$

La ligne correspondante du tableau est de la forme :

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad (1)$$

où $J = \{j : j \text{ est l'indice d'une variable hors base}\}$ et \bar{b}_i n'est pas entier.

Définissons $\lfloor d \rfloor =$ le plus grand entier (plancher) $\leq d$.

Puisque $x_j \geq 0 \quad \forall j$, alors

$$\sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \sum_{j \in J} t_{ij} x_j$$

et par conséquent

$$x_k + \sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{b}_i. \quad (2)$$

Si nous considérons la contrainte d'intégralité des variables x_j , il découle de (2) que

$$x_k + \sum_{j \in J} \lfloor t_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad (3)$$

Ainsi toute solution de (P) satisfait (3).

Considérons maintenant la relation obtenue en faisant la différence entre (3) et (1) :

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j \leq (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) \quad (4)$$

Notons que

$$(\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) \leq 0 \quad \text{et} \quad (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) < 0$$

Puisque toute solution de (P) satisfait (1) et (3), alors elle satisfait (4), et son introduction dans (P) n'élimine aucune solution de (P).

Considérons maintenant la relation obtenue en faisant la différence entre (3) et (1) :

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j \leq (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) \quad (4)$$

Notons que

$$(\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) \leq 0 \quad \text{et} \quad (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) < 0$$

Puisque toute solution de (P) satisfait (1) et (3), alors elle satisfait (4), et son introduction dans (P) n'élimine aucune solution de (P) .

Par contre, la solution actuelle du problème relaxé (\bar{P}) où $x_j = 0 \quad \forall j \in J$ ne satisfait pas (4) et son introduction réduit le domaine réalisable du problème relaxé (\bar{P}) .

Pour poursuivre la résolution, il suffit d'introduire la contrainte

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j \leq (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) \iff \sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j + x_\tau = (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i)$$

où x_τ est une variable d'écart avec coût nul, au dernier tableau du simplexe pour générer une solution de base au nouveau problème en considérant x_τ comme la variable de base dans la nouvelle ligne du tableau.

var										terme
base	x_1	$x_2 \dots$	$x_k \dots$	$x_{j_1} \dots$	$x_j \dots$	$x_{j_m} \dots$	x_n	x_τ	$-z$	droite
x_{j_1}	t_{11}	$t_{12} \dots$	$0 \dots$	$1 \dots$	$t_{1j} \dots$	$0 \dots$	t_{1n}	0	0	\bar{b}_1
\vdots										
x_k	t_{i1}	$t_{i2} \dots$	$1 \dots$	$0 \dots$	$t_{ij} \dots$	$0 \dots$	t_{in}	0	0	\bar{b}_i
\vdots										
x_{j_m}	t_{m1}	$t_{m2} \dots$	$0 \dots$	$0 \dots$	$t_{mj} \dots$	$1 \dots$	t_{mn}	0	0	\bar{b}_m
x_τ	$\lfloor t_{i1} \rfloor - t_{i1}$	$\lfloor t_{i2} \rfloor - t_{i2} \dots$	$0 \dots$	$0 \dots$	$\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij} \dots$	$0 \dots$	$\lfloor t_{in} \rfloor - t_{in}$	1	0	$\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i$
$-z$	\bar{c}_1	$\bar{c}_2 \dots$	$0 \dots$	$0 \dots$	$\bar{c}_j \dots$	$0 \dots$	\bar{c}_n	0	1	$-\bar{z}$

Pour poursuivre la résolution, il suffit d'introduire la contrainte

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j \leq (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) \iff \sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j + x_\tau = (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i)$$

où x_τ est une variable d'écart avec coût nul, au dernier tableau du simplexe pour générer une solution de base au nouveau problème en considérant x_τ comme la variable de base dans la nouvelle ligne du tableau.

Cette solution de base n'est pas réalisable puisque $x_\tau = (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) < 0$.

Il suffit de poursuivre la résolution avec l'algorithme dual du simplexe.

Notes:

1) Si $\lfloor t_{ij} \rfloor = t_{ij}$ (i.e., t_{ij} est entier) $\forall j \in J$, et si \bar{b}_i n'est pas entier, alors

$$x_k + \sum_{j \in J} t_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad (1)$$

indique que (P) n'est pas réalisable puisque le terme de gauche prend une valeur entière pour toute solution réalisable de (P) alors que le terme de droite n'est pas entier.

2) Une dérivation similaire s'applique à toutes les itérations.

Considérons le problème suivant

$$\text{Min } -21x_1 - 11x_2$$

$$\text{Sujet à } 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ entiers}$$

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j \leq (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i) \Leftrightarrow \sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j + x_\tau = (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i)$$

Itération 1:

Solution de base optimal de (\bar{P})

$$x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = \frac{13}{7}$$

valeur opt. = -39

Nouvelle contrainte:

$$\left(\left\lfloor \frac{4}{7} \right\rfloor - \frac{4}{7} \right) x_2 + \left(\left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor - \frac{1}{7} \right) x_3 + x_4 = \left\lfloor \frac{13}{7} \right\rfloor - \frac{13}{7}$$

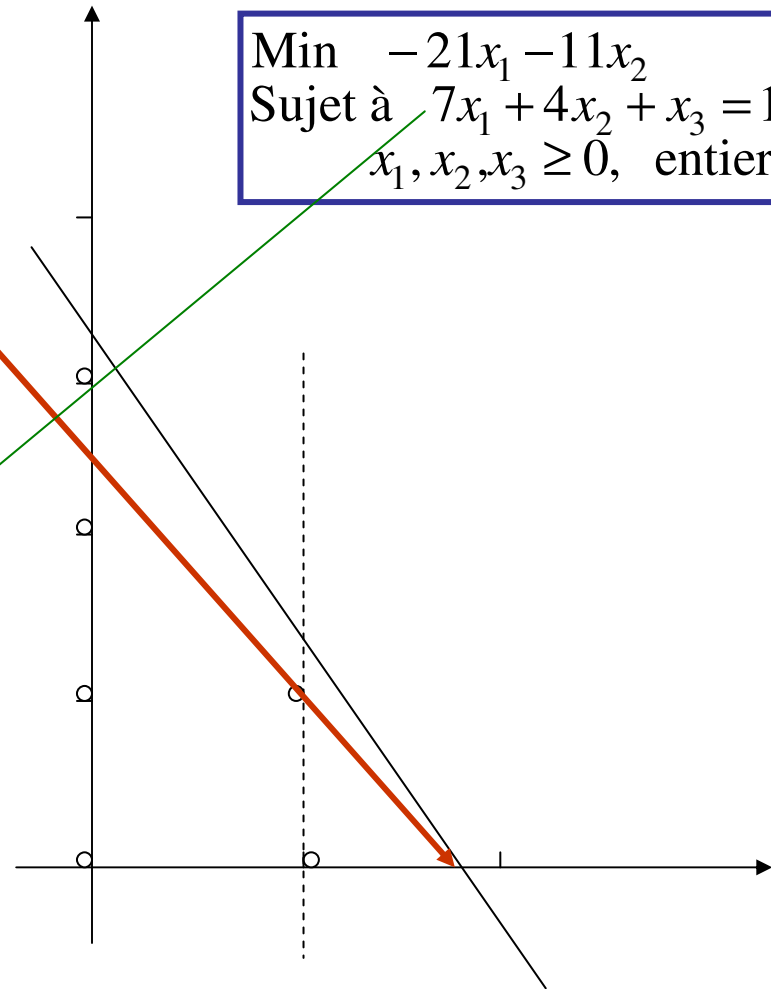
$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad -21x_1 - 11x_2 \\ \text{Sujet à} \quad 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ entiers} \end{array}$$

Interprétation géométrique :

$$-\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 \leq -\frac{6}{7} \Leftrightarrow -4x_2 - x_3 \leq -6.$$

Or $x_3 = 13 - 7x_1 - 4x_2$. Ainsi

$$-4x_2 - 13 + 7x_1 + 4x_2 \leq -6 \Leftrightarrow x_1 \leq 1$$



Itération 2 :

Résoudre le problème relaxé de

$$\text{Min } -21x_1 - 11x_2$$

$$\text{Sujet à } 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13$$

$$-\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_4 = -\frac{6}{7}$$

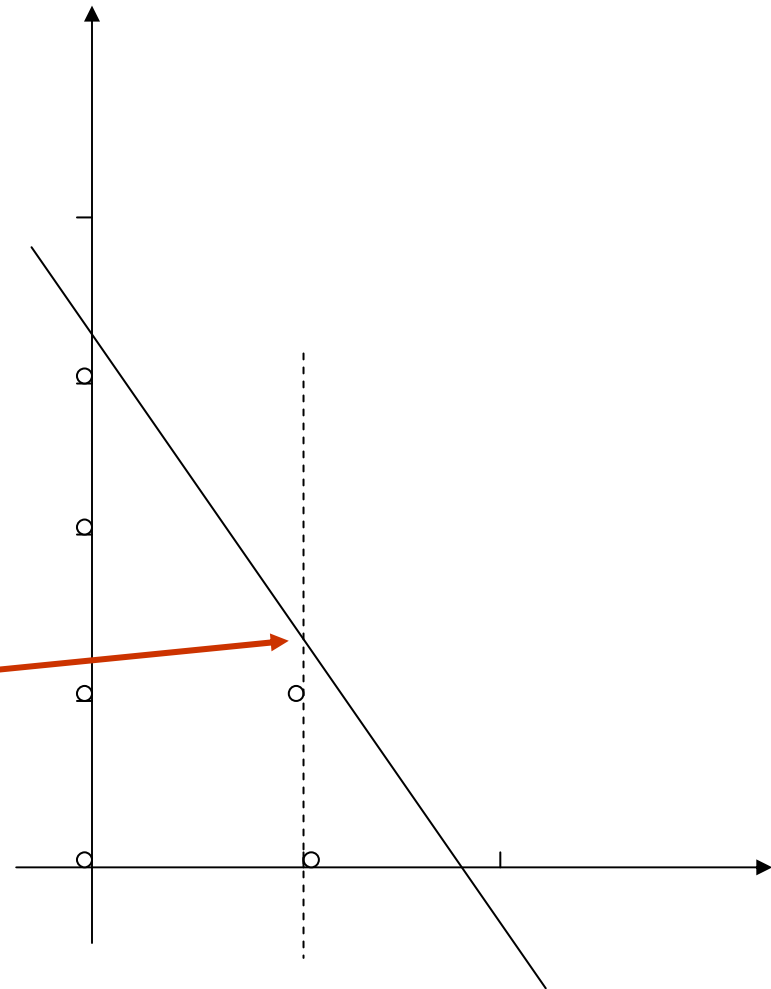
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \text{ entiers}$$

Nous obtenons

$$x_1 + x_4 = 1$$

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = \frac{3}{2}$$

$$\text{valeur opt.} = -37\frac{1}{2}$$



Nouvelle contrainte à partir de la 2ième ligne

$$\left(\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor - \frac{1}{4} \right) x_3 + \left(\left\lfloor -\frac{7}{4} \right\rfloor + \frac{7}{4} \right) x_4 + x_5 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor - \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{4} x_3 - \frac{1}{4} x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

Interprétation géométrique

$$-x_3 - x_4 \leq -2$$

Substituons la valeur de x_4 tirée de la dernière contrainte ajoutée

$$-\frac{4}{7} x_2 - \frac{1}{7} x_3 + x_4 = -\frac{6}{7}$$

pour obtenir

$$-x_3 - \frac{4}{7} x_2 - \frac{1}{7} x_3 + \frac{6}{7} \leq -2.$$

Substituons maintenant la valeur de x_3

$$x_3 = 13 - 7x_1 - 4x_2$$

pour obtenir

$$-\frac{8}{7} 13 + 8x_1 + \frac{32}{7} x_2 - \frac{4}{7} x_2 + \frac{6}{7} \leq -2$$

$$\Leftrightarrow 8x_1 + 4x_2 \leq -2 + \frac{8}{7} 13 - \frac{6}{7} \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 \leq 3$$

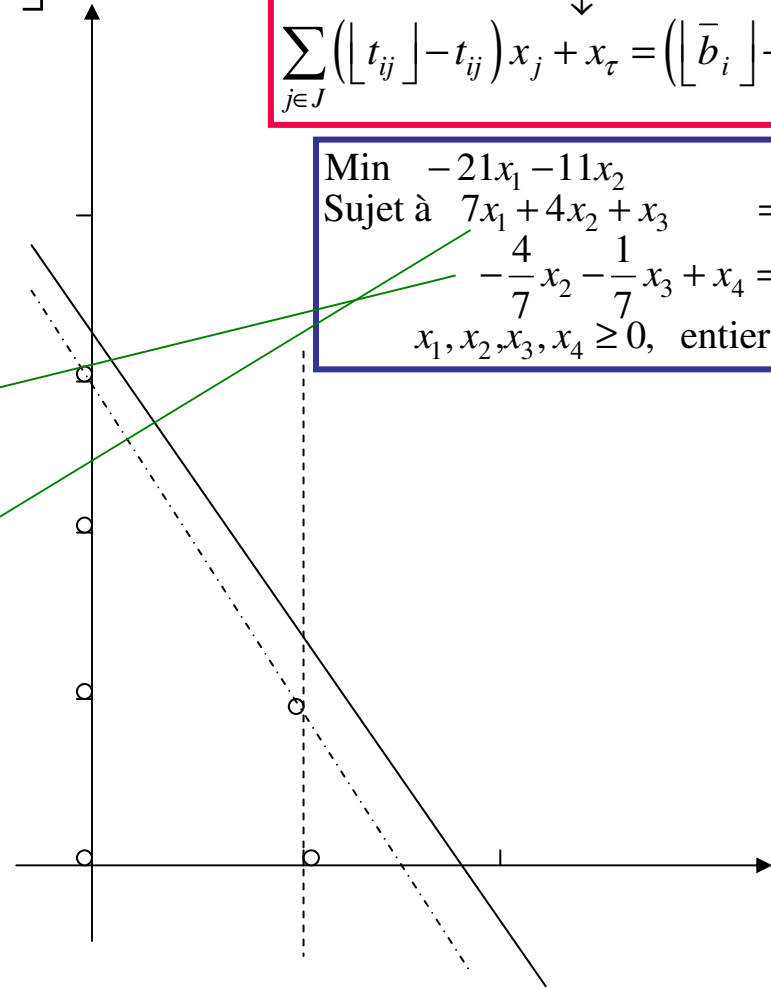
$$x_2 + \frac{1}{4} x_3 - \frac{7}{4} x_4 = \frac{3}{2}:$$

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j \leq (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i)$$

\Downarrow

$$\sum_{j \in J} (\lfloor t_{ij} \rfloor - t_{ij}) x_j + x_\tau = (\lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -21x_1 - 11x_2 \\ \text{Sujet à} & 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13 \\ & -\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_4 = -\frac{6}{7} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \text{ entiers} \end{array}$$



Itération 3 :

Résoudre le problème

$$\text{Min } -21x_1 - 11x_2$$

$$\text{Sujet à } x_1 + x_4 = 1$$

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{ entiers}$$

Nous obtenons

$$-x_1 + x_3 - x_5 = 1$$

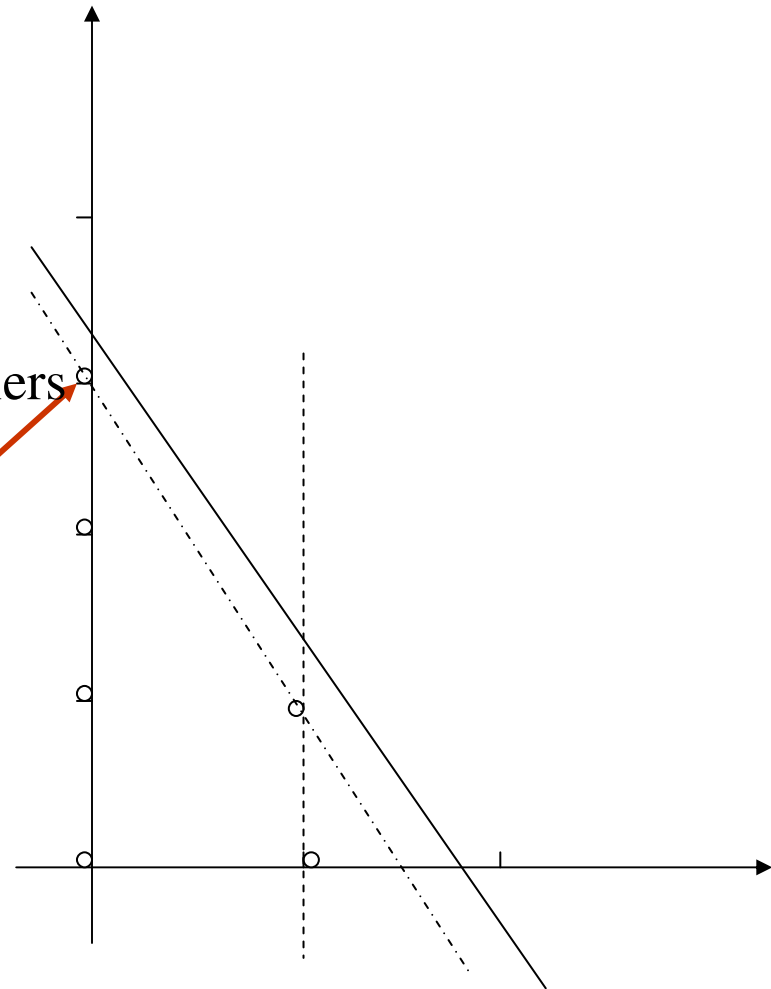
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1 + x_4 = 1$$

Donc solution optimale entière :

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1$$

$$\text{Valeur optimale} = -33$$



Convergence de la méthode de coupes de Gomory

Référence:

A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming,
Wiley & Sons, 1986, 354 - 357

En faisant certaines hypothèses sur le choix de la ligne du tableau pour spécifier la prochaine coupe, l'auteur démontre:
"... the cutting plane method terminates"

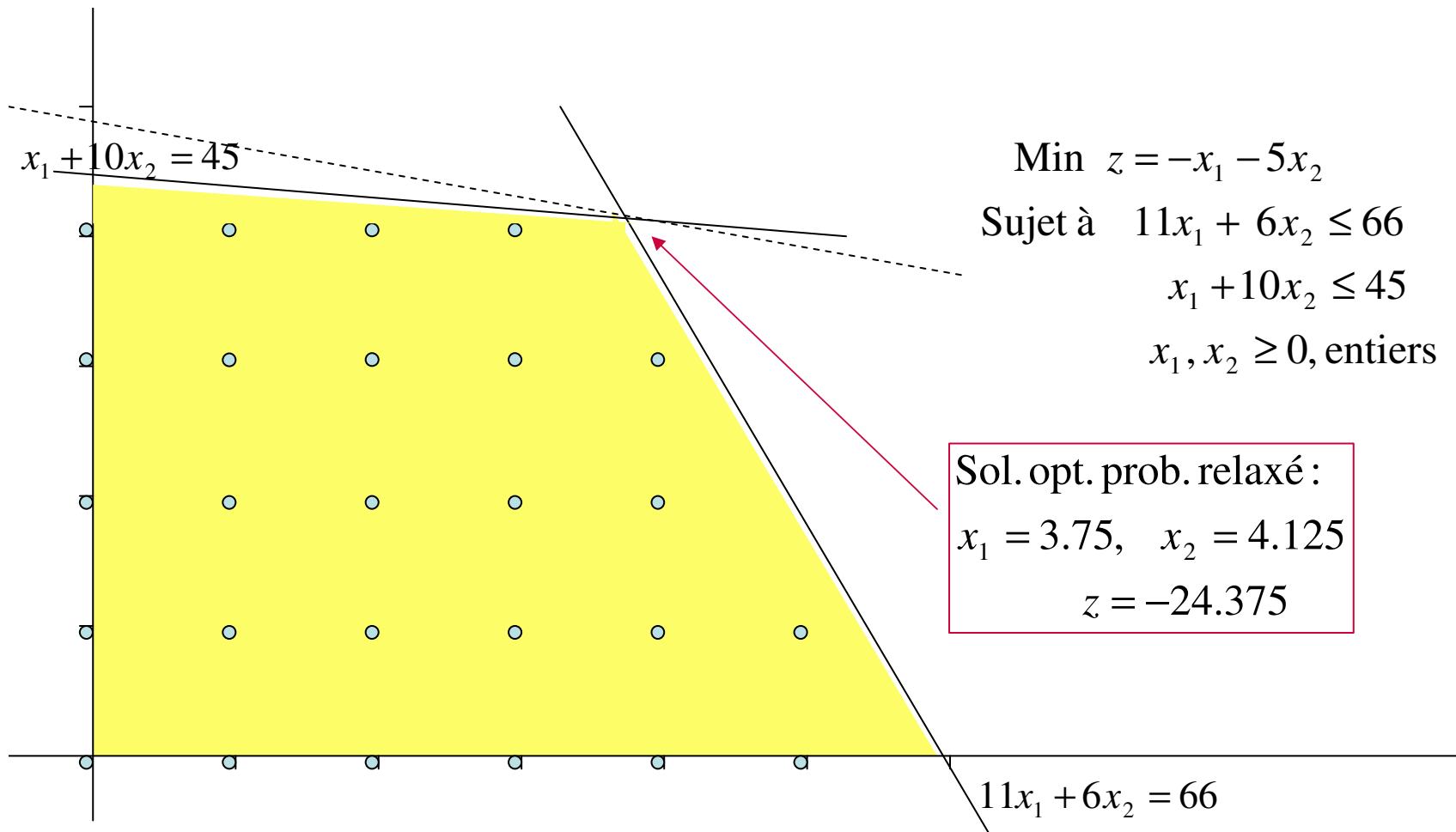
$\text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j$ $(P) \text{ Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1, \dots, m$ $x_j \geq 0, \text{ entier } j=1, \dots, n$	Méthode de Branch & Bound	$\text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j$ $(\bar{P}) \text{ Sujet à } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1, \dots, m$ $x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n$
---	--------------------------------------	---

- Dans cette méthode nous résolvons également une suite de problèmes relaxés.
- Nous résolvons d'abord (\bar{P}) . Si la solution optimale \bar{x} est entière, alors cette solution est optimale pour le problème original (P) .
- Sinon, nous utilisons une variable x_i dont la valeur \bar{x}_i n'est pas entière.
- Nous considérons deux nouvelles contraintes

$$x_i \leq \lfloor \bar{x}_i \rfloor \quad (\text{plancher de } x_i)$$

ou

$$x_i \geq \lceil \bar{x}_i \rceil \quad (\text{plafond de } x_i)$$



Sol. opt. prob. relaxé :

$x_1 = 3.75, \quad x_2 = 4.125$
 $z = -24.375$

Nouvelles contraintes considérées:

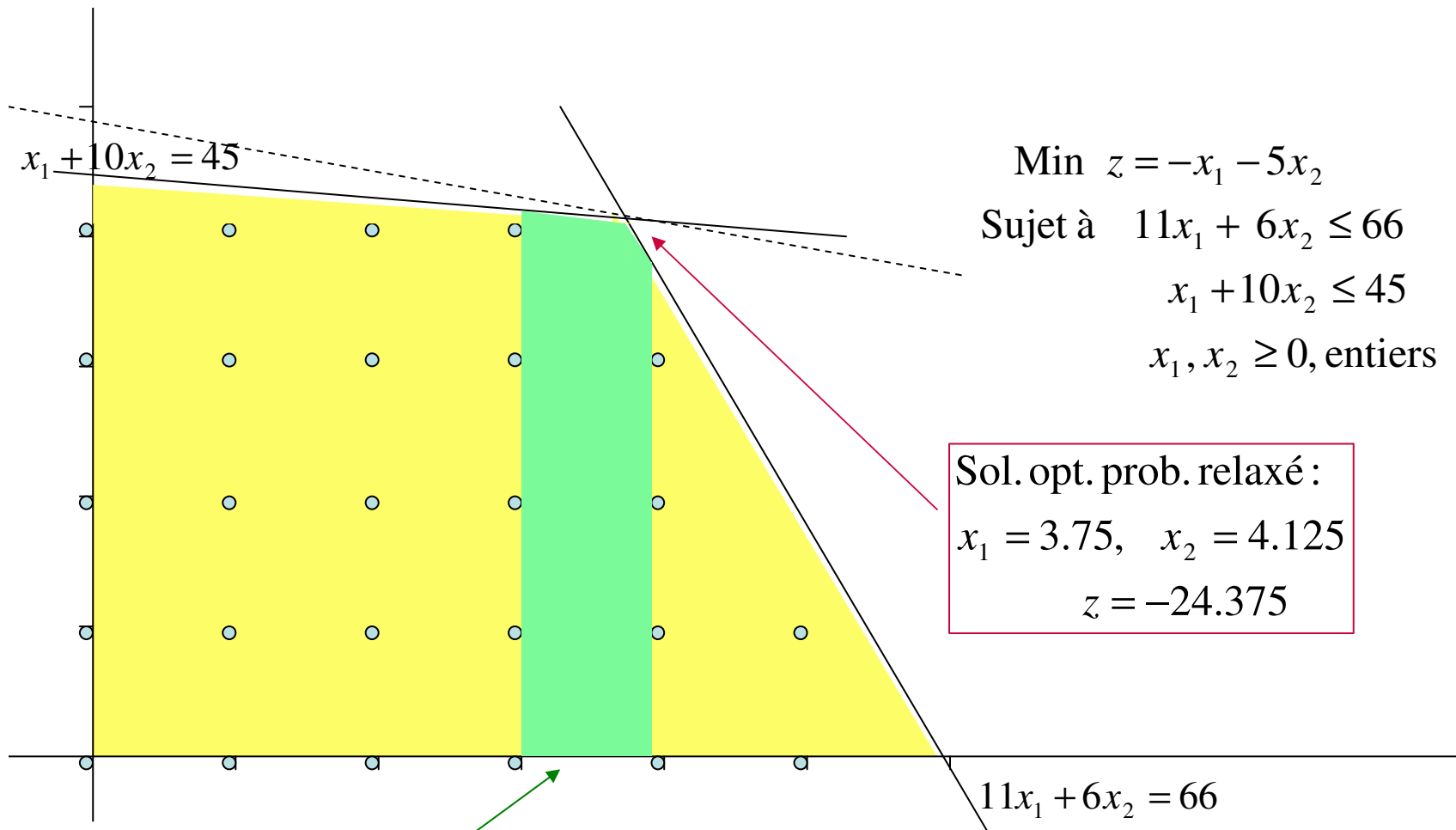
$$x_1 \leq \lfloor 3.75 \rfloor = 3$$

ou

$$x_1 \geq \lceil 3.75 \rceil = 4$$

Avec ces deux nouvelles contraintes

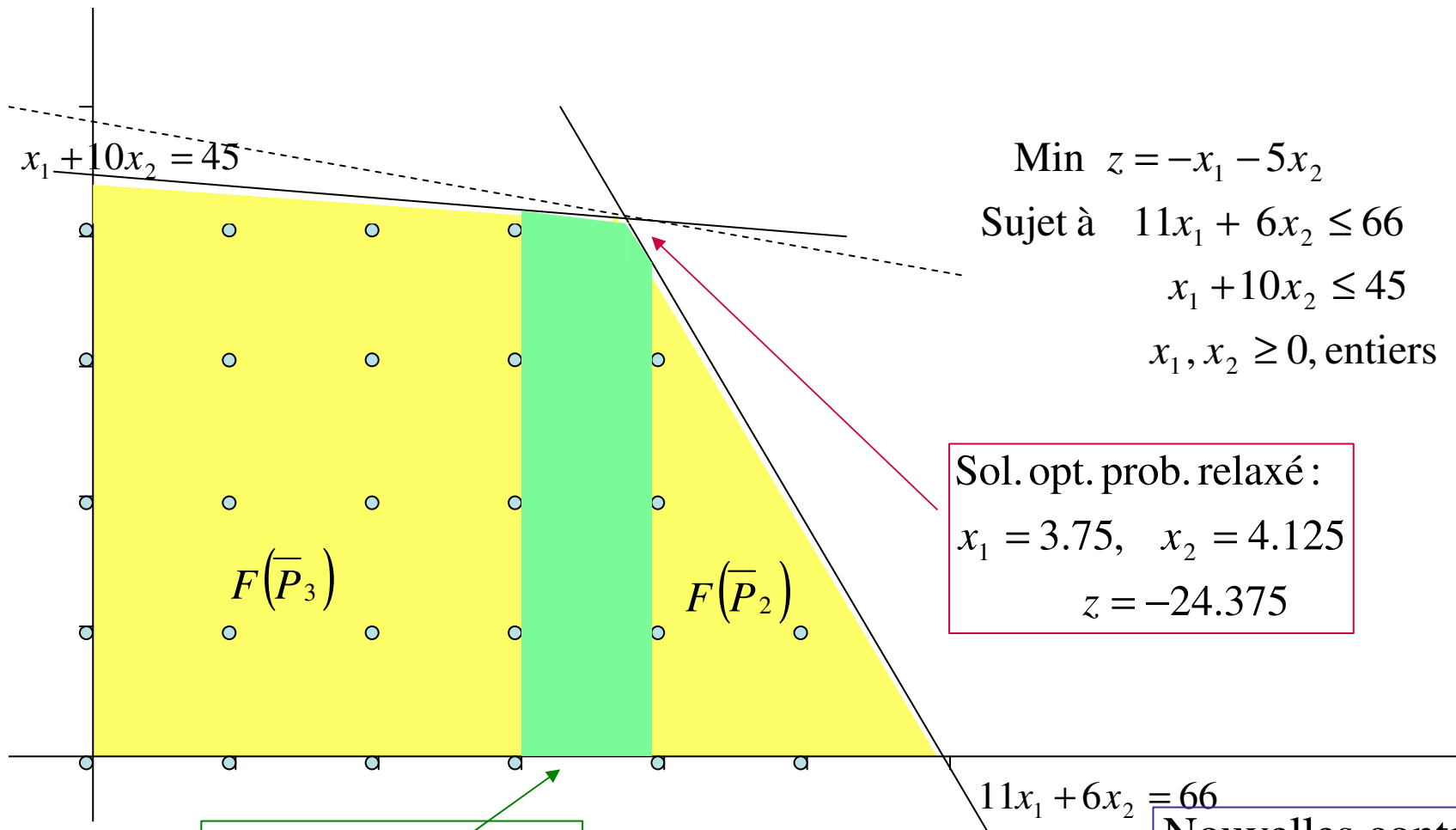
- points réalisables de (P) sont conservés
- une tranche du domaine réalisable du problème relaxé est éliminée



Sol. opt. prob. relaxé :
 $x_1 = 3.75, x_2 = 4.125$
 $z = -24.375$

Tranche de $F(\bar{P})$
 éliminée

Nouvelles contraintes considérées:
 $x_1 \leq \lfloor 3.75 \rfloor = 3$
 ou
 $x_1 \geq \lceil 3.75 \rceil = 4$



Min $z = -x_1 - 5x_2$

Sujet à $11x_1 + 6x_2 \leq 66$

$x_1 + 10x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$, entiers

Sol. opt. prob. relaxé :

$x_1 = 3.75, x_2 = 4.125$

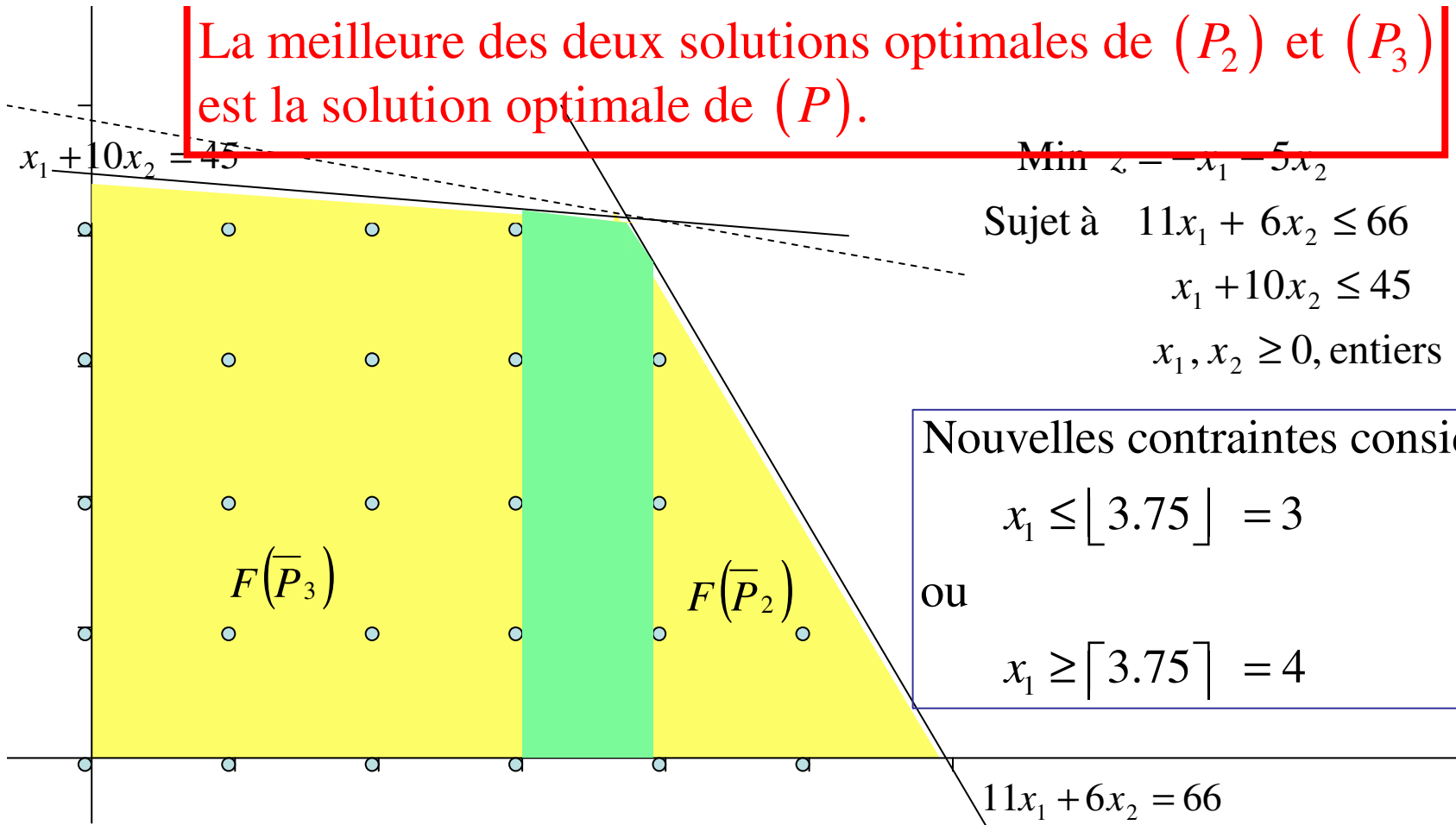
$z = -24.375$

Tranche de $F(\bar{P})$
éliminée

Nouvelles contraintes :
 $x_1 \leq \lfloor 3.75 \rfloor = 3$
 ou
 $x_1 \geq \lceil 3.75 \rceil = 4$

Par contre, ce qui reste de $F(\bar{P})$ n'est plus connexe puisqu'il comporte deux sous-ensembles $F(\bar{P}_2)$ et $F(\bar{P}_3)$.

La meilleure des deux solutions optimales de (P_2) et (P_3) est la solution optimale de (P) .



$$\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}$$

Nouvelles contraintes considérées:

$$x_1 \leq \lfloor 3.75 \rfloor = 3$$

ou

$$x_1 \geq \lceil 3.75 \rceil = 4$$

Poursuivre la résolution en associant des problèmes (P_2) à $F(\bar{P}_2)$

$$(P_2) \quad \text{Min } z = -x_1 - 5x_2$$

et (P_3) à $F(\bar{P}_3)$

$$\text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}$$

$$(P_3) \quad \text{Min } z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

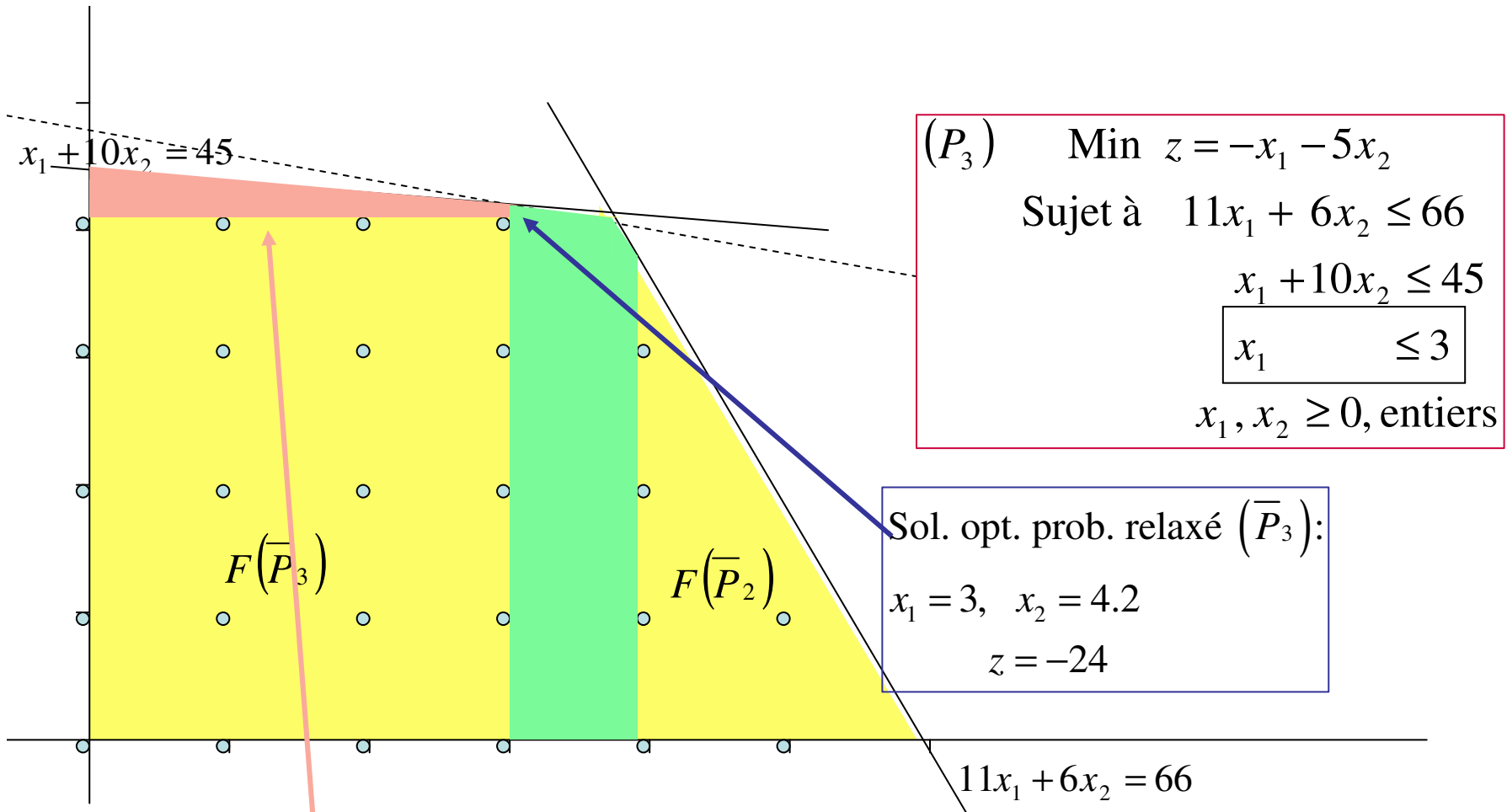
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}$$

- **Prochaine itération**

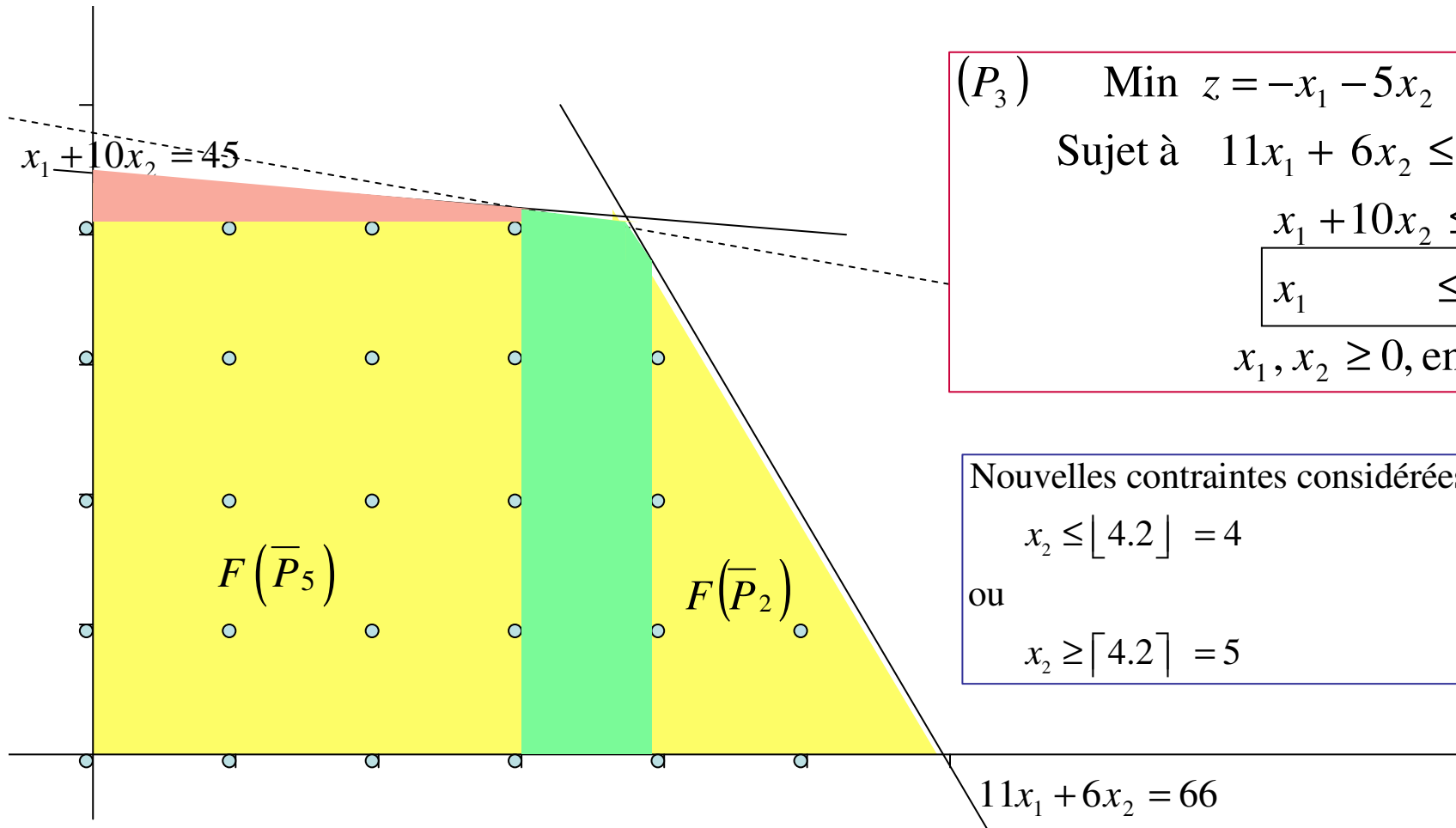
Choisir un des deux problèmes (P_2) ou (P_3)

Le traiter comme nous avons fait pour P .

- Dans notre exemple, nous choisissons le problème (P_3)



Nouvelles contraintes considérées:
 $x_2 \leq \lfloor 4.2 \rfloor = 4$
 ou
 $x_2 \geq \lceil 4.2 \rceil = 5$



$$\begin{aligned}
 (P_3) \quad & \text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\
 & \text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 10x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad \boxed{x_1 \leq 3} \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}
 \end{aligned}$$

Nouvelles contraintes considérées:

$$x_2 \leq \lfloor 4.2 \rfloor = 4$$

ou

$$x_2 \geq \lceil 4.2 \rceil = 5$$

$$\begin{aligned}
 (P_4) \quad & \text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\
 & \text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 10x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \leq 3 \\
 & \quad \quad \quad \boxed{x_2 \geq 5} \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}
 \end{aligned}$$

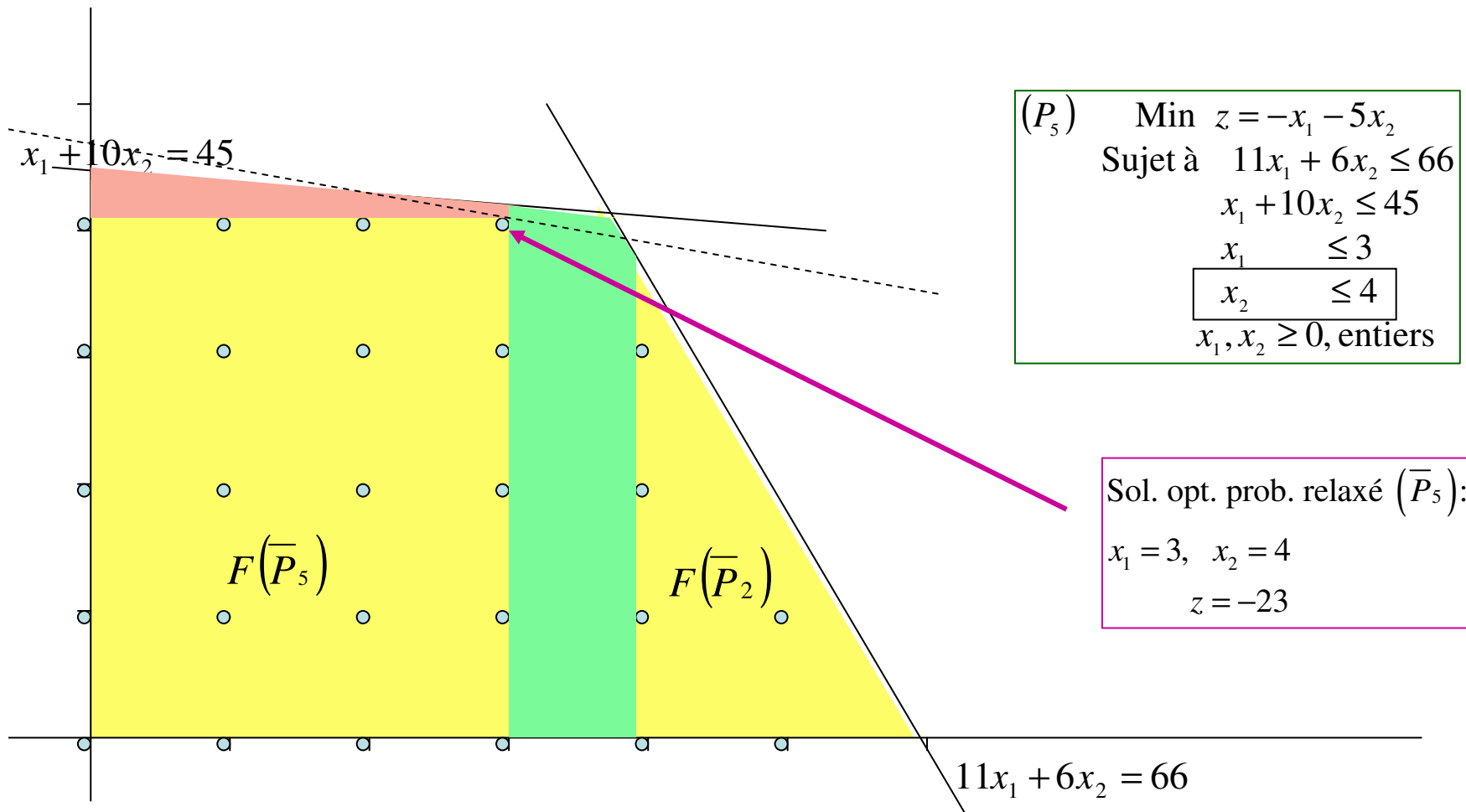
$$\begin{aligned}
 (P_5) \quad & \text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\
 & \text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 10x_2 \leq 45 \\
 & \quad \quad \quad x_1 \leq 3 \\
 & \quad \quad \quad \boxed{x_2 \leq 4} \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}
 \end{aligned}$$

- **Prochaine itération**

Choisir un des problèmes $\{P_5, P_4, P_2\}$ qui n'a pas encore été traité.

Le traiter comme nous avons fait pour P .

- Dans notre exemple, nous choisissons le problème (P_5)



Puisque la solution du sous-problème relaxé est entière, elle est une solution réalisable de (P) .

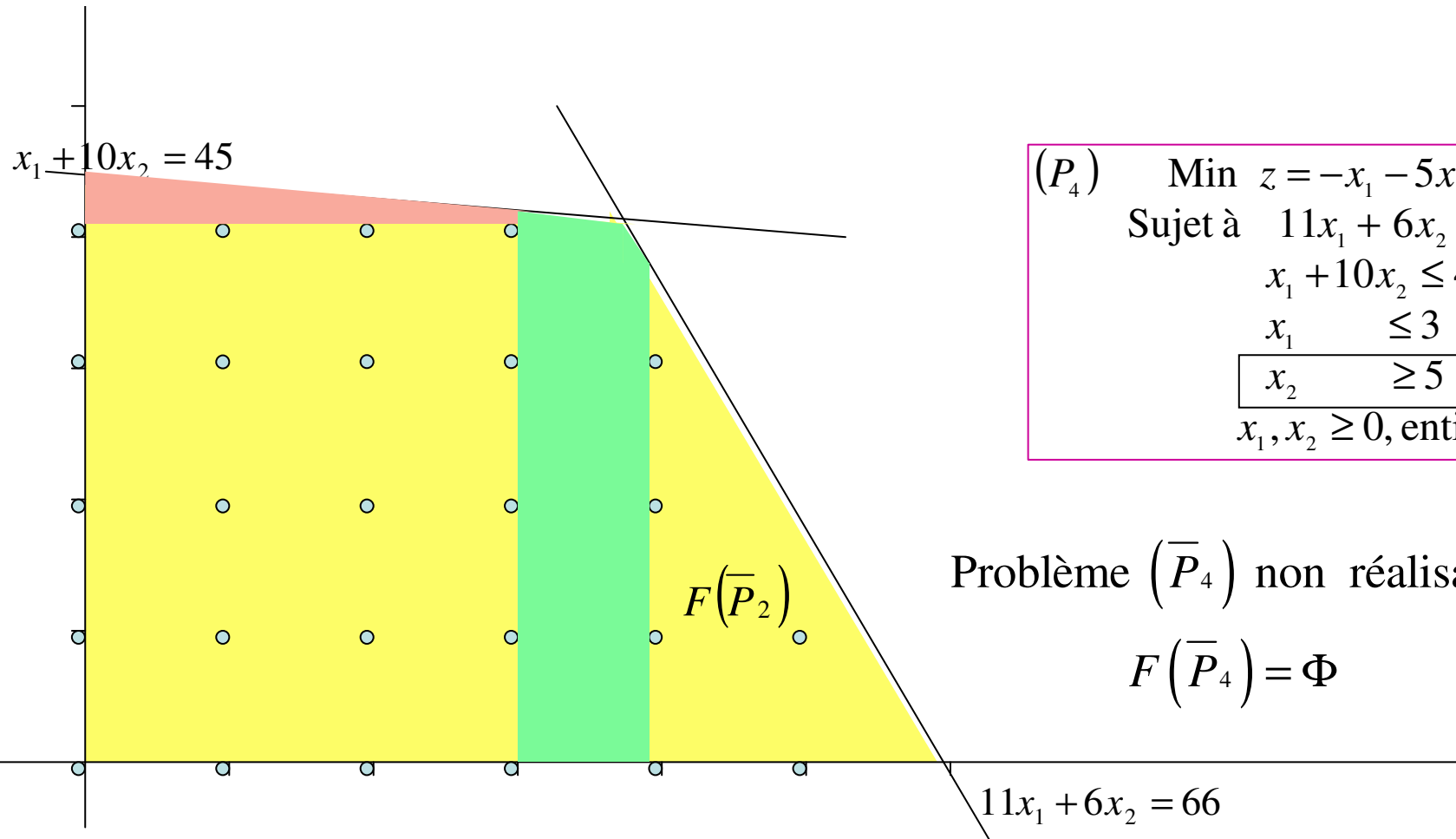
Nous ne générons pas de nouveau sous-problème puisque nous avons identifié la meilleure solution de cette région du domaine réalisable de (P) .

Au cours du processus, nous conservons la meilleure solution entière rencontrée dont la valeur constitue une borne supérieure BS sur la valeur optimale de (P) .

- **Prochaine itération**

Choisir un des problèmes $\{P_4, P_2\}$ qui n'a pas encore été traité.
Le traiter comme nous avons fait pour (P) .

- Dans notre exemple, nous choisissons le problème (P_4)



$$\begin{aligned}
 (P_4) \quad & \text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\
 \text{Sujet à } & 11x_1 + 6x_2 \leq 66 \\
 & x_1 + 10x_2 \leq 45 \\
 & x_1 \leq 3 \\
 & \boxed{x_2 \geq 5} \\
 & x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers}
 \end{aligned}$$

Problème (\bar{P}_4) non réalisable

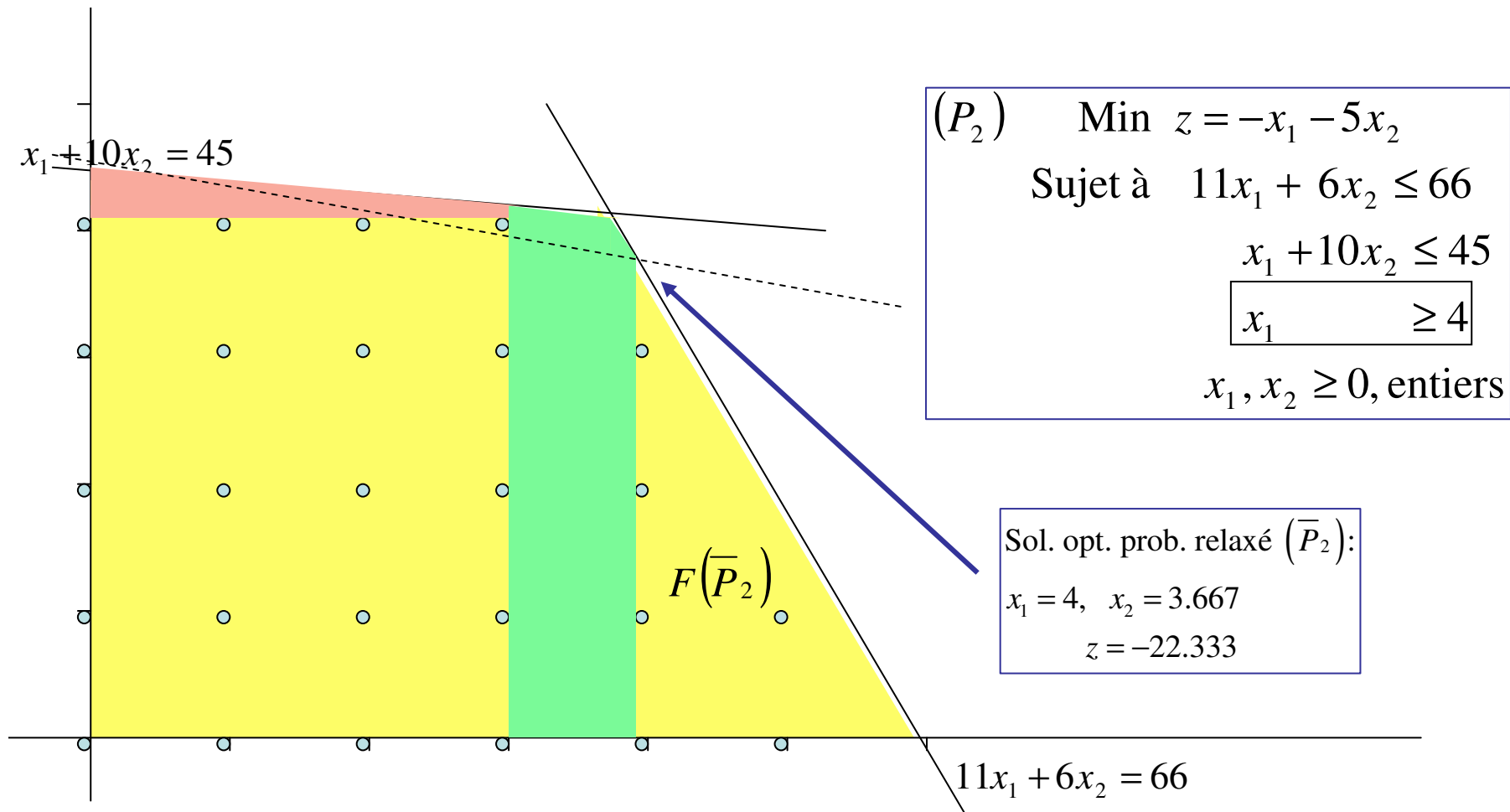
$$F(\bar{P}_4) = \Phi$$

Il n'y a donc pas lieu de poursuivre la fouille dans cette partie du domaine réalisable de (P) qui est vide.

- **Prochaine itération**

Choisir un des problèmes $\{P_2\}$ qui n'a pas encore été traité.
Le traiter comme nous avons fait pour (P) .

- Dans notre exemple, il ne reste que le problème (P_2)



La solution optimale du problème relaxé n'est pas entière mais sa valeur $z = -22.333 > BS = -23$

Il n'y a donc pas lieu de poursuivre la fouille dans cette partie du domaine réalisable de (P) car il est impossible d'y trouver une solution entière de valeur inférieure à -23 .

- La procédure s'arrête quand tous les problèmes relaxés générés ont été résolus
- La solution entière dont la valeur est égale à BS est une solution optimale de (P) .

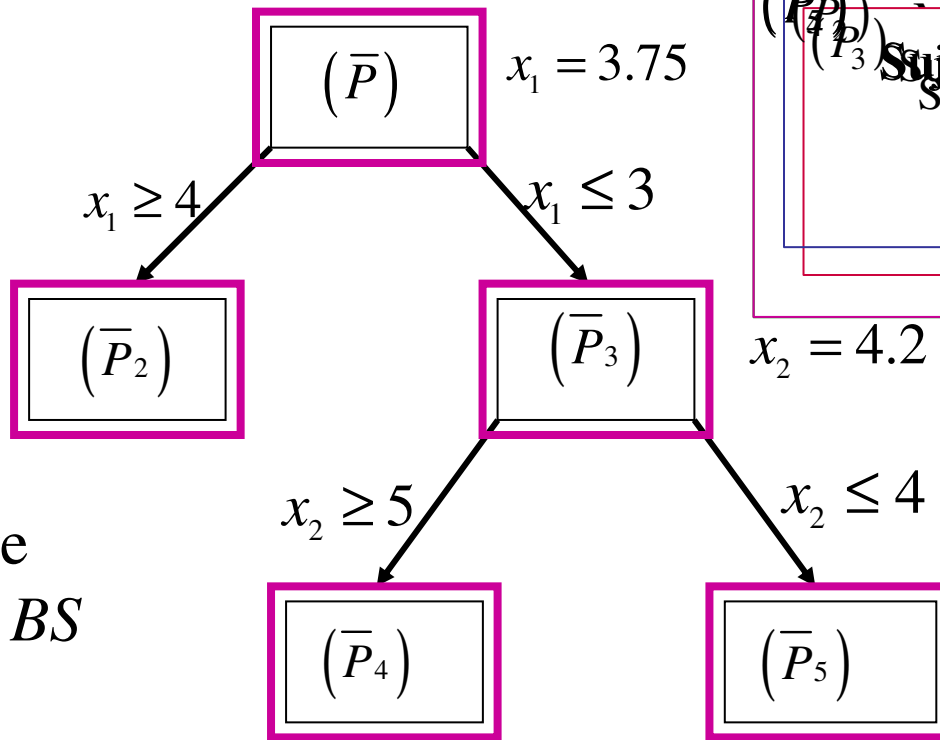
Représentation comme un arbre d'énumération

Problèmes candidats

(P_5)

(P_4)

(P_2)



(P_5) $\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$
 (P_4) $\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$
 (P_3) $\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$
 Sujet à $11x_1 + 6x_2 \leq 66$
 $x_1 + 10x_2 \leq 45$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Sol. non entière

$z = -22.333 > BS$

Solution
Non-réalisable

Sol. entière
 $BS = -23$



Solution optimale

Approche du Branch & Bound

- Approche itérative.
- À chaque itération,
 - il y a une liste de problèmes candidats à être analysés. Au départ, la liste contient uniquement le problème original (P).
 - nous choisissons un problème candidat et nous résolvons le problème relaxé correspondant
 - la solution optimale du problème relaxé nous permet de mettre à jour la liste de problèmes candidats ou la borne supérieure de même que la meilleure solution rencontrée

Procédure du Branch & Bound

- **Initialisation**

Liste de problème candidat contient uniquement (P)

$$BS = \infty$$

Aller à l'étape 2.

- **Étape 1**

Si la liste est vide, terminer. La solution optimale est celle associée à BS , à moins que $BS = \infty$ dans lequel cas le problème P n'as pas de solution.

- **Étape 2**

Choisir le premier problème candidat (PC) en tête de liste.

- **Étape 1**

Si la liste est vide, terminer. La solution optimale est celle associée à BS , à moins que $BS = \infty$ dans lequel cas le problème n'as pas de solution.

- **Étape 2**

Choisir le premier problème candidat (PC) en tête de liste.

- **Étape 3**

Analyser (PC) en solutionnant (\overline{PC}) .

Si $F(\overline{PC}) = \Phi$, aller à l'étape 1.

Si $v(\overline{PC}) \geq BS$, aller à l'étape 1.

Si la solution optimale de (\overline{PC}) est entière, alors
si $v(\overline{PC}) < BS$, alors $BS := v(\overline{PC})$,
aller à l'étape 1.

- **Étape 3**

Analyser (PC) en solutionnant (\overline{PC}) .

Si $F(\overline{PC}) = \Phi$, aller à l'étape 1.

Si $v(\overline{PC}) \geq BS$, aller à l'étape 1.

Si la solution optimale de (\overline{PC}) est entière, alors
si $v(\overline{PC}) < BS$, alors $BS := v(\overline{PC})$,
aller à l'étape 1.

- **Étape 4**

Choisir une variable x_j qui n'est pas entière.

Générer un premier nouveau problème en ajoutant la contrainte

$x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$ au problème (PC) et le placer en tête de la liste

Générer un deuxième nouveau problème en ajoutant la contrainte

$x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ au problème (PC) et le placer en tête de la liste

Aller à l'étape 2.

- **Étape 1**

Si la liste est vide, terminer. La solution optimale est celle associée à BS , à moins que $BS = \infty$ dans lequel cas le problème n'a pas de solution.

- **Étape 2**

Choisir le premier problème candidat (PC) en tête de liste.

- **Étape 3**

Analyser (PC) en solutionnant (\overline{PC}) .

Si $F(\overline{PC}) = \Phi$, aller à l'étape 1.

Si $v(\overline{PC}) \geq BS$, aller à l'étape 1.

Si la solution optimale de (\overline{PC}) est entière, alors
si $v(\overline{PC}) < BS$, alors $BS := v(\overline{PC})$,
aller à l'étape 1.

Principe de fouille dans l'arbre

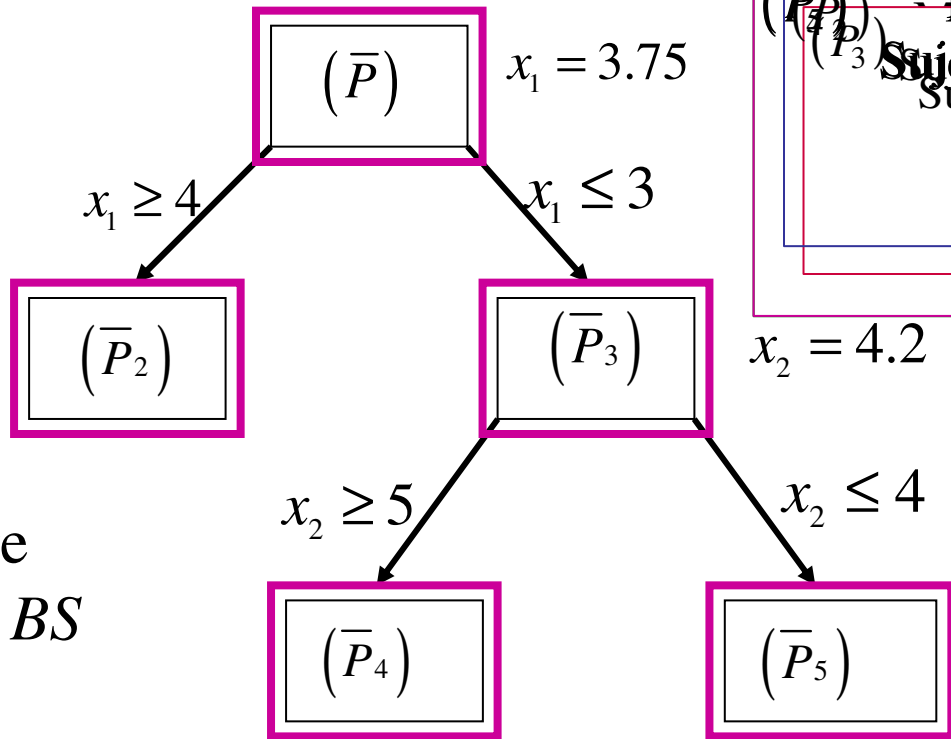
Représentation comme un arbre d'énumération

Problèmes candidats

(P_5)

(P_4)

(P_2)



(P_4) $\text{Min } z = -x_1 - 5x_2$

(P_3) $\text{Sujet à } 11x_1 + 6x_2 \leq 66$

$\text{Sujet à } x_1 + 10x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$

Sol. non entière

$z = -22.333 > BS$

Solution
Non-réalisable

Sol. entière
 $BS = -23$



Solution optimale

Principe de fouille dans l'arbre

a) Fouille en profondeur:

descendre rapidement dans l'arbre pour aller chercher le plus rapidement possible une première solution entière réalisable

b) Fouille au meilleur noeud potentiel:

faire quelques itérations à chaque noeud de la liste pour tenter d'identifier celui qui a le plus de potentiel de faire décroître la borne supérieure

c) Fouille en largeur:

compléter un étage de l'arbre avant de descendre dans celui-ci

Choix de la variable de séparation x_j ($x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$, $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$)

La variable x_j telle que

- a) $\bar{x}_j - \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ le plus grand
- b) $\bar{x}_j - \lceil \bar{x}_j \rceil$ le plus petit
- c) $\bar{x}_j - \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ le plus proche de 0.5

Utiliser l'algorithme dual pour résoudre le problème relaxé
choisi dans la liste

Solution optimale pour le problème courant (au point courant de l'arbre)
n'est pas réalisable pour le problème obtenu en ajoutant une contrainte
du type $x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$ ou $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$.

On peut donc utiliser l'algorithme dual pour résoudre ce nouveau problème
en partant de la solution optimale du problème précédent.

Référence.

A. Atamturk, M.W.P. Savelsbergh, "Integer-Programming Software Systems", *Annals of Operations Research* 140, 67-124, 2005.