

Formulation de problèmes mixtes

a) Problème où au moins une de deux contraintes doit être satisfaite:

$$a_1^T x \leq b_1 \quad \text{ou} \quad a_2^T x \leq b_2$$

doit être satisfaite.

Reformulons cette restriction dans un format acceptable dans un problème de programmation linéaire mixte.

Soit M un nombre très grand.

Écrivons la formulation comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 \\ \text{et } a_2^T x \leq b_2 + M \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{contrainte effective}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 + M \\ \text{et } a_2^T x \leq b_2 \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{contrainte effective}$$

Soit M un nombre très grand.

Écrivons la formulation comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 \\ \text{et } a_2^T x \leq b_2 + M \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{contrainte effective}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 + M \\ \text{et } a_2^T x \leq b_2 \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{contrainte effective}$$

R eformulons à l'aide de variables binaires comme suit:

$$a_1^T x \leq b_1 + y_1 M$$

$$a_2^T x \leq b_2 + y_2 M$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 = 0 \text{ ou } 1$$

$$a_1^T x - y_1 M \leq b_1$$

$$a_2^T x - y_2 M \leq b_2$$

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \text{ entiers}$$

b) Problème où au moins k parmi n contraintes doivent être satisfaites:

$$a_1^T x \leq b_1$$

$$a_2^T x \leq b_2$$

\vdots

$$a_n^T x \leq b_n$$

Soit M un nombre très grand.

Par analogie avec le cas précédent

$$a_1^T x \leq b_1 + y_1 M$$

$$a_2^T x \leq b_2 + y_2 M$$

\vdots

$$a_n^T x \leq b_n + y_n M$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq n - k$$

$$y_i = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_1^T x - y_1 M \leq b_1$$

$$a_2^T x - y_2 M \leq b_2$$

\vdots

$$a_n^T x - y_n M \leq b_n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq n - k$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i \text{ entier}, \quad i = 1, \dots, n$$

c) Problème où une fonction doit prendre une valeur parmi n :

$$a^T x = b_1 \text{ ou bien } b_2 \text{ ou bien } \dots \text{ ou bien } b_n$$

Reformulons comme suit:

$$a^T x = \sum_{i=1}^n b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1$$

$$y_i = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a^T x - \sum_{i=1}^n b_i y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1$$

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i \text{ entier}, \quad i = 1, \dots, n$$

d) Problème avec coût de mise en marche:

Supposons que la fonction économique est de la forme suivante:

$$\min \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

où

$$f_j(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = 0 \\ k_j + c_j x_j & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

avec $k_j > 0$, $j = 1, \dots, n$

Reformulons le problème comme suit:

$$\min \sum_{j=1}^n k_j y_j + c_j x_j$$

où

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = 0 \\ 1 & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

Reformulons le problème comme suit:

$$\min \sum_{j=1}^n k_j y_j + c_j x_j$$

où

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = 0 \\ 1 & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

Reformulons des contraintes sur les variables y_j comme suit:

Surement

$$\{y_j = 0 \text{ ou } 1, \quad j = 1, \dots, n\} \equiv \begin{cases} 0 \leq y_j \leq 1, & j = 1, \dots, n \\ y_j \text{ entier, } & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

D'autre part, en considérant un nombre M très grand

les contraintes suivantes sont aussi nécessaires

$$x_j \leq M y_j \quad j = 1, \dots, n$$

Reformulons le problème comme suit:

$$\min \sum_{j=1}^n k_j y_j + c_j x_j$$

où $k_j > 0$ et

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = 0 \\ 1 & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

Reformulons des contraintes sur les variables y_j comme suit:

Surement

$$\{y_j = 0 \text{ ou } 1, j = 1, \dots, n\} \equiv \begin{cases} 0 \leq y_j \leq 1, & j = 1, \dots, n \\ y_j \text{ entier, } & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

D'autre part, en considérant un nombre M très grand les contraintes suivantes sont aussi nécessaires

$$x_j \leq My_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_j \leq My_j \quad j = 1, \dots, n$$

i) Si $x_j > 0$, alors $y_j = 1$

ii) Lorsque $x_j = 0$,

la contrainte $x_j \leq My_j$ permet à y_j de prendre les valeurs 0 ou 1.

Mais puisque l'objectif est de minimiser la fonction économique et puisque $k_j > 0$, alors $y_j = 0$.

Reformulons le problème comme suit:

$$\min \sum_{j=1}^n k_j y_j + c_j x_j$$

où $k_j > 0$ et

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j = 0 \\ 1 & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

Reformulons des contraintes sur les variables y_j comme suit:

Surement

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_j \text{ entier}, \quad j = 1, \dots, n$$

D'autre part, en considérant un nombre M très grand les contraintes suivantes sont aussi nécessaires

$$x_j \leq M y_j \quad j = 1, \dots, n$$

Le problème devient donc le suivant:

$$\min \sum_{j=1}^n k_j y_j + c_j x_j$$

en ajoutant les contraintes

$$\left. \begin{array}{l} x_j \leq M y_j \\ 0 \leq y_j \leq 1 \\ y_j \text{ entier} \end{array} \right\} j = 1, \dots, n$$