

**Rappel de certains
résultats de calcul .**

Convergence d'algorithme

Notation et définitions

- **Notation**

R^n espace vectoriel des vecteurs de dimension n .

$f : R^n \rightarrow R^1$ une fonction à valeurs réelles (prenant ses valeurs dans R^1)

Pour $x \in R^n$

$\|x\| = \sqrt{x^T x}$ est la norme euclidienne et

$x^T x = \sum_{j=1}^n x_j^2$ dénote le produit scalaire de x avec lui-même

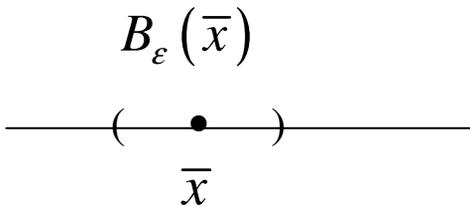
Notation et définitions

Définition. Un point $\bar{x} \in R^n$ est un **minimum local** de f s'il existe

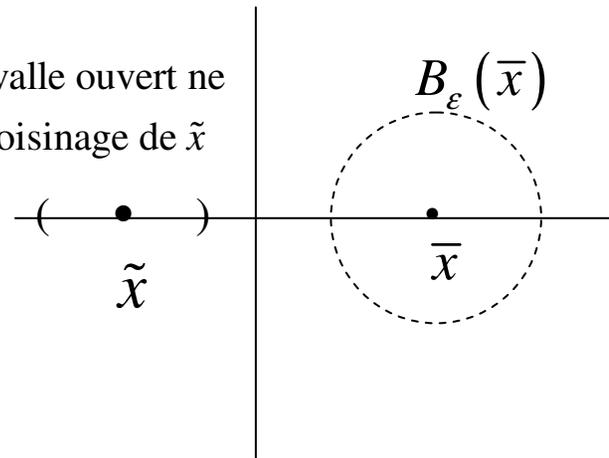
un voisinage de \bar{x} dénoté $B_\varepsilon(\bar{x}) = \left\{ x \in R^n : \|x - \bar{x}\| = \sqrt{(x - \bar{x})^T (x - \bar{x})} < \varepsilon \right\}$

tel que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$$



Les points de l'intervalle ouvert ne constituent pas un voisinage de \tilde{x}

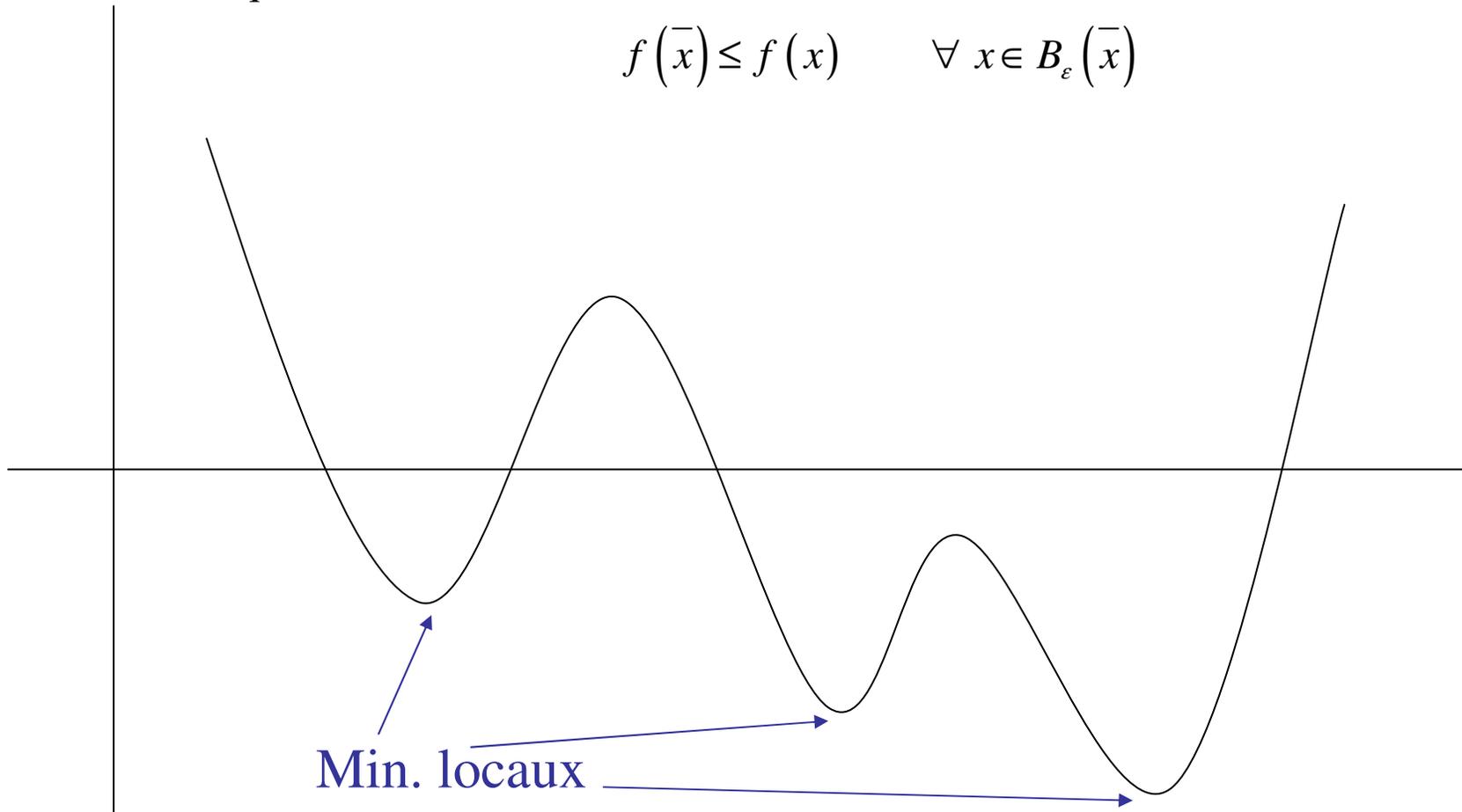


Définition. Un point $\bar{x} \in R^n$ est un **minimum local** de f s'il existe

un voisinage de \bar{x} dénoté $B_\varepsilon(\bar{x}) = \left\{ x \in R^n : \|x - \bar{x}\| = \sqrt{(x - \bar{x})^T (x - \bar{x})} < \varepsilon \right\}$

tel que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$$



Notation et définitions

Définition. Un point $\bar{x} \in R^n$ est un **minimum local** de f s'il existe

un voisinage de \bar{x} dénoté $B_\varepsilon(\bar{x}) = \left\{ x \in R^n : \|x - \bar{x}\| = \sqrt{(x - \bar{x})^T (x - \bar{x})} < \varepsilon \right\}$

tel que

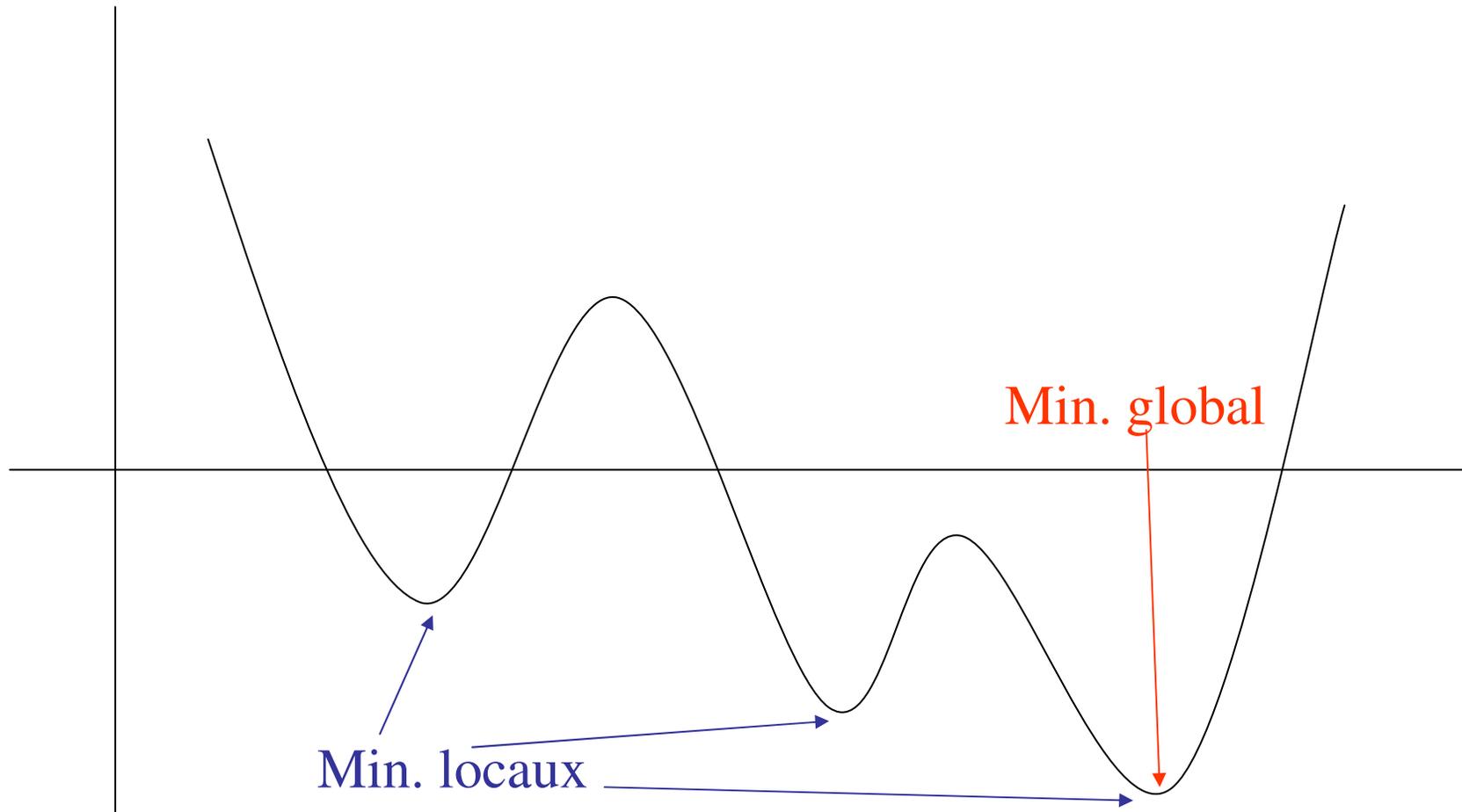
$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$$

Définition. Un point $\bar{x} \in R^n$ est un **minimum global** de f si

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in R^n$$

Définition. Un point $\bar{x} \in R^n$ est un **minimum global** de f si

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in R^n$$



Résultats pour les fonctions avec une seule variable

- Fonctions avec une seule variable: $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$

Résultat 1.1 Soit $c \in \mathbb{R}^1$ tel que

$$f'(c) = \frac{df(c)}{dx} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \neq 0.$$

Alors c est ni un minimum local ni un maximum local de f .

Résultat 1.1 Soit $c \in \mathbb{R}^1$ tel que

$$f'(c) = \frac{df(c)}{dx} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \neq 0.$$

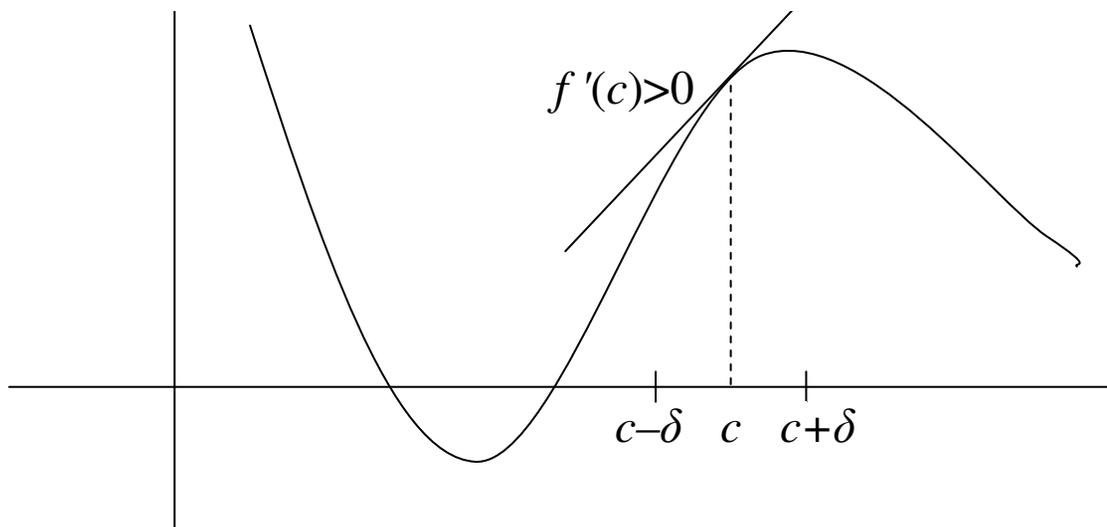
Alors c est ni un minimum local ni un maximum local de f .

De plus,

i) si $f'(c) > 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$f(x) < f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f(c) < f(x) \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

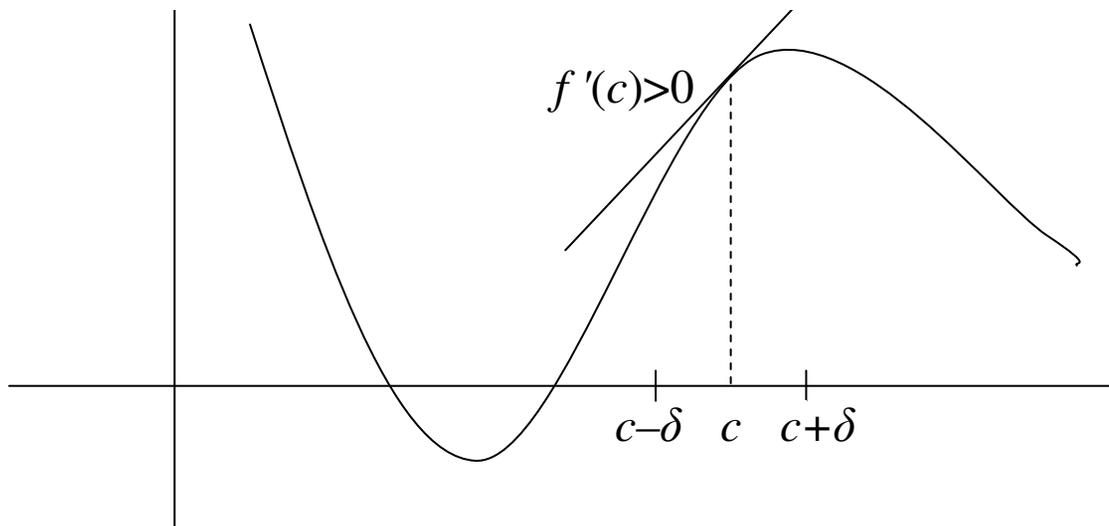


Preuve de *i*) : Puisque $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$, alors par définition de la

limite il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta), x \neq c.$$

Par conséquent, les signes de $f(x) - f(c)$ et de $x - c$ doivent être identiques, d'où le résultat.



Résultat 1.1 Soit $c \in \mathbb{R}^1$ tel que

$$f'(c) = \frac{df(c)}{dx} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \neq 0.$$

Alors c est ni un minimum local ni un maximum local de f .

De plus,

i) si $f'(c) > 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

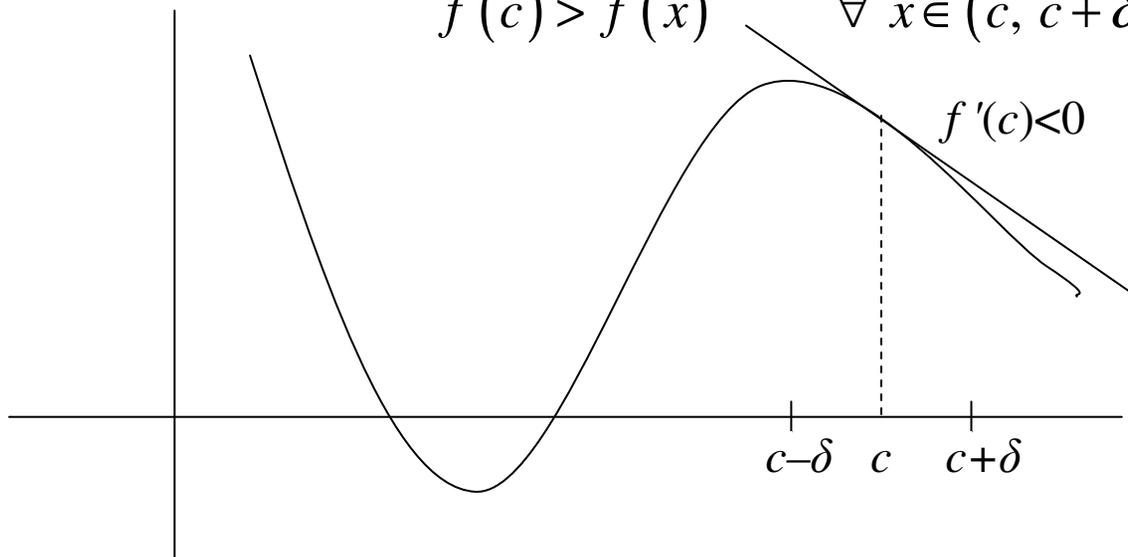
$$f(x) < f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f(c) < f(x) \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

ii) si $f'(c) < 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$f(x) > f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f(c) > f(x) \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$



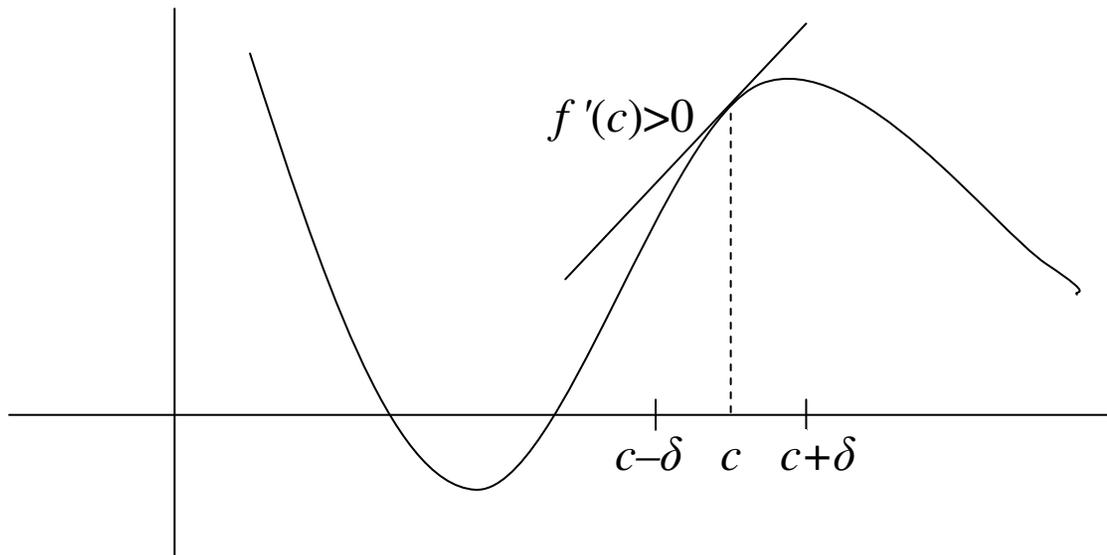
Corollaire 1.2 Soit $c \in \mathbb{R}^1$

i) si $f'(c) > 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$f(x) < f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f(c) < f(x) \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

et la fonction f est **croissante** au point c .



Corollaire 1.2 Soit $c \in \mathbb{R}^1$.

i) si $f'(c) > 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$f(x) < f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f(c) < f(x) \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

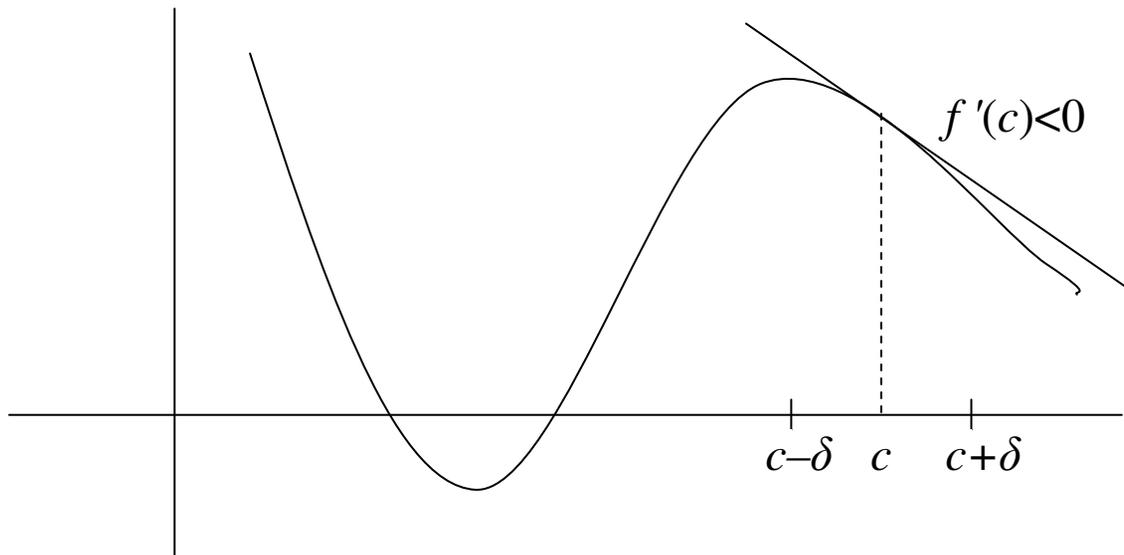
et la fonction f est **croissante** au point c .

ii) si $f'(c) < 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$f(x) > f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f(c) > f(x) \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

et la fonction f est **décroissante** au point c .



Corollaire 1.2 Soit $c \in \mathbb{R}^1$.

i) si $f'(c) > 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &< f(c) & \forall x \in (c - \delta, c) \\ f(c) &< f(x) & \forall x \in (c, c + \delta) \end{aligned}$$

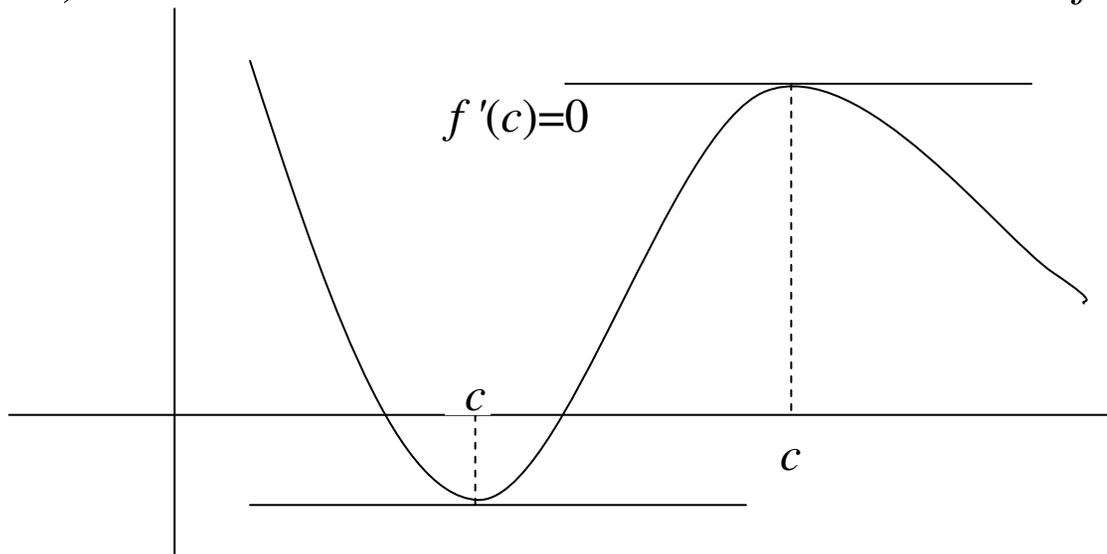
et la fonction f est **croissante** au point c .

ii) si $f'(c) < 0$, il existe un intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ avec $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &> f(c) & \forall x \in (c - \delta, c) \\ f(c) &> f(x) & \forall x \in (c, c + \delta) \end{aligned}$$

et la fonction f est **décroissante** au point c .

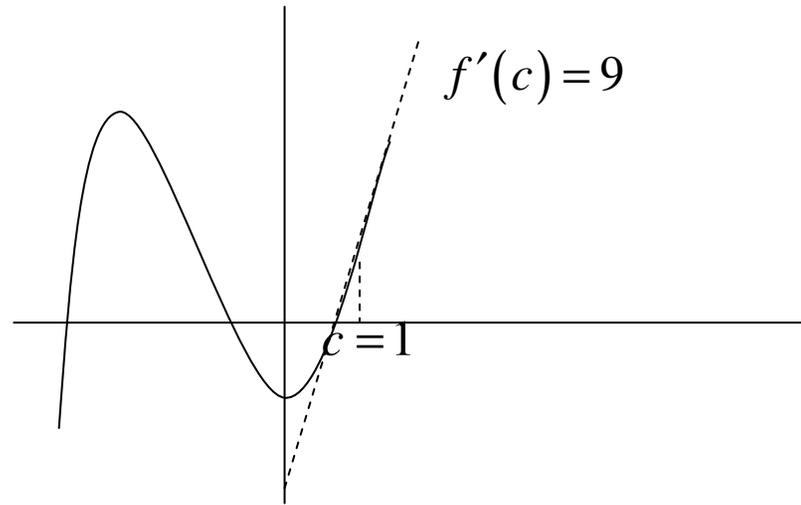
iii) si c est un **minimum** ou un **maximum local** de f , alors $f'(c) = 0$.



Exemple:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$



Si $c = 1$, $f'(1) = 3 + 6 = 9$.

Considérons l'intervalle $(1-1, 1+1) = (0, 2)$.

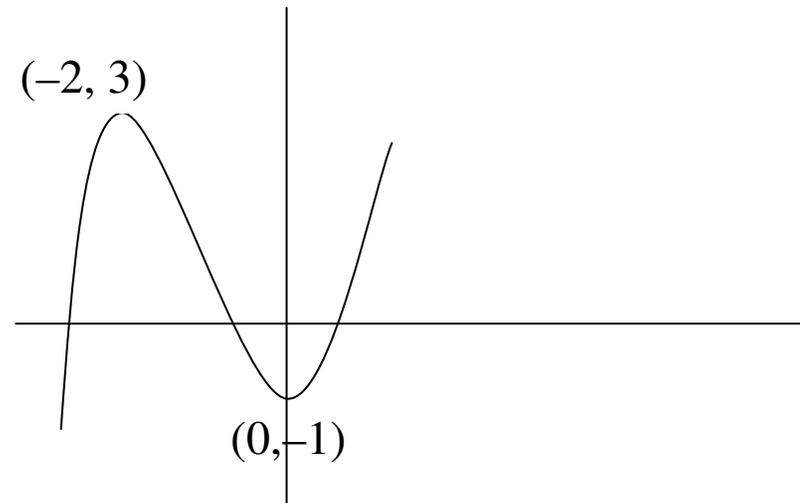
Si $x \in (0, 1)$, alors $f(x) < f(1)$,

et si $x \in (1, 2)$, alors $f(x) > f(1)$.

Exemple:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$



$x = -2$ est un maximum local et $f'(-2) = 0$

$x = 0$ est un minimum local et $f'(0) = 0$.

Résultat 1.3: (Test de la dérivé seconde)

Soit $c \in \mathbb{R}^1$ tel que $f'(c) = 0$. Supposons également que la dérivée $f'(x)$ existe $\forall x \in B_\varepsilon(c)$.

i) Si $f''(c) < 0$, alors c est un maximum local de f .

ii) Si $f''(c) > 0$, alors c est un minimum local de f .

Note: $f''(c)$ dénote la dérivée seconde de f à c :

$$f''(c) = \frac{df'}{dx}(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{d^2 f}{dx^2}(c).$$

Justification intuitive de ii):

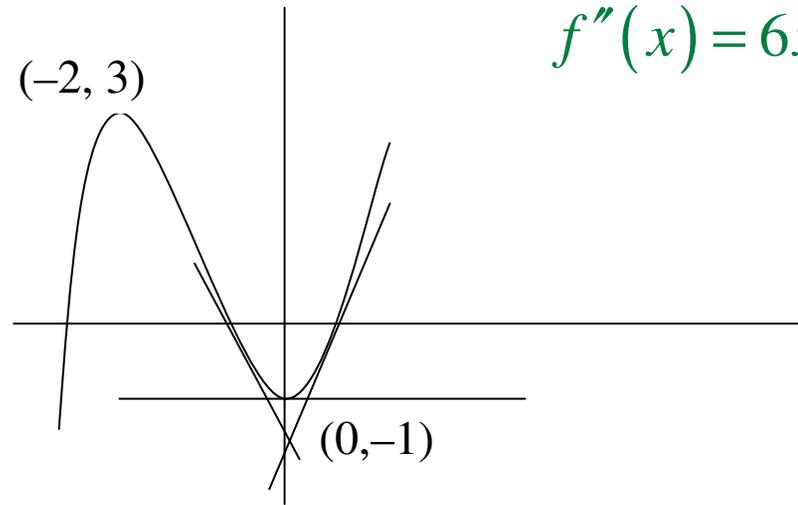
Si $f''(c) > 0$, alors f' est une fonction croissante à c et par conséquent c est un minimum local.

Exemple:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

$$f''(x) = 6x + 6$$



Pour $x = -2$: $f'(x) = 0$
 $f''(x) = -12 + 6 = -6 < 0$
et $x = -2$ est un maximum local

Pour $x = 0$: $f'(x) = 0$
 $f''(x) = 0 + 6 = 6 > 0$
et $x = 0$ est un minimum local

Pour une fonction f qui n'est pas définie sur tout R^n mais plutôt sur $X \subset R^n$ ($f : X \rightarrow R^1$).

Définition: Soit $f : X \rightarrow R^1$.

$c \in X$ est un **minimum local** de f sur X s'il existe un voisinage $B_\varepsilon(c)$ tel que

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(c) \cap X$$

$c \in X$ est un **minimum global** de f sur X si

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$

Convergence d'algorithme

- Résolution de problèmes d'optimisation à l'aide d'**algorithme** ou **processus itératif** générant une suite de points, très souvent dans le domaine réalisable du problème.

Définition: Soit $\{r^k\}$ une suite de vecteurs dans R^n convergente vers r^* .

L'**ordre de convergence** de $\{r^k\}$ est le supremum des nombres non négatifs p satisfaisant la relation

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|^p} < \infty.$$

Définition: Soit $\{r^k\}$ une suite de vecteurs dans R^n convergente vers r^* .
L'ordre de convergence de $\{r^k\}$ est le supremum des nombres non négatifs p satisfaisant la relation

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|^p} < \infty.$$

Plus la valeur de p est grande, plus la convergence est rapide à la limite puisque la distance à r^* décroît plus rapidement. En effet, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|^p} = \beta$$

alors asymptotiquement

$$\|r^{k+1} - r^*\| = \beta \|r^k - r^*\|^p.$$

Définition: Soit $\{r^k\}$ une suite de vecteurs dans R^n convergente vers r^* .

L'ordre de convergence de $\{r^k\}$ est le supremum des nombres non négatifs p satisfaisant la relation

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|^p} < \infty.$$

Exemples: pour une valeur de a , $0 < a < 1$

i) $\{a^k\} \rightarrow 0$ avec un ordre de convergence au moins égal à 1

$$\text{puisque } \frac{\|a^{k+1} - 0\|}{\|a^k - 0\|} = \frac{a^{k+1}}{a^k} = a.$$

ii) $\{a^{2^k}\} \rightarrow 0$ avec un ordre de convergence au moins égal à 2

$$\text{puisque } \frac{\|a^{2^{k+1}} - 0\|}{\left(\|a^{2^k} - 0\|\right)^2} = \frac{a^{2^{k+1}}}{\left(a^{2^k}\right)^2} = \frac{a^{2^{k+1}}}{a^{2^k \cdot 2}} = \frac{a^{2^{k+1}}}{a^{2^{k+1}}} = 1.$$

Définition: Soit $\{r^k\}$ une suite de vecteurs dans R^n convergente vers r^* telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|} = \beta < 1.$$

Alors la suite $\{r^k\}$ converge **linéairement** avec un **rapport de convergence de β** .

Notes:

- i)* **convergence linéaire** aussi dénotée **convergence géométrique**.
- ii)* Le cas $\beta = 0$ est dénoté par **convergence super linéaire**.

Définition: Soit $\{r^k\}$ une suite de vecteurs dans R^n convergente vers r^* telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|} = \beta < 1.$$

Alors la suite $\{r^k\}$ converge **linéairement** avec un **rapport de convergence de β** .

Notes:

- i) **convergence linéaire** aussi dénotée **convergence géométrique**.
- ii) Le cas $\beta = 0$ est dénoté par **convergence super linéaire**.

Exemple: convergence d'ordre 1 mais pas linéaire

$$\left\{ \frac{1}{k} \right\} \rightarrow 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 1 - 0 = 1$$

Définition: Soit $\{r^k\}$ une suite de vecteurs dans R^n convergente vers r^* telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r^{k+1} - r^*\|}{\|r^k - r^*\|} = \beta < 1.$$

Alors la suite $\{r^k\}$ converge **linéairement** avec un **rapport de convergence** de β .

Notes:

- i) **convergence linéaire** aussi dénotée **convergence géométrique**.
- ii) Le cas $\beta = 0$ est dénoté par **convergence super linéaire**.

Exemple: convergence super linéaire

$$\left\{ \left(\frac{1}{k} \right)^k \right\} \rightarrow 0$$
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{k+1} \right)^{k+1}}{\left(\frac{1}{k} \right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{k+1} \right) \left(\frac{1}{k+1} \right)^k}{\left(\frac{1}{k} \right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right)^k \frac{1}{k+1}$$
$$= \lim_{k \rightarrow \infty} 1 \frac{1}{k+1} = 0.$$