

**Conditions d'optimalité
en
optimisation avec contraintes**

Multiplicateurs de Lagrange

Considérons le problème de programmation mathématique suivant

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x) \\ &\text{Sujet à } f_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad x \in X \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $X \subset R^n$ et les fonctions $f : X \rightarrow R^1$, $f_i : X \rightarrow R^1, i = 1, \dots, m$.

Le **lagrangien** associé au problème (5.1) est obtenu comme suit en associant un **multiplicateur de lagrange** λ_i à chaque fonction de contrainte f_i :

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x).$$

Sans faire d'hypothèse particulière sur X ou sur les fonctions f et f_i , nous pouvons obtenir des conditions suffisantes très générales pour qu'un point x^* soit une solution optimale globale du problème (5.1).

Considérons le problème de programmation mathématique suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujet à} & f_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{array} \quad (5.1)$$

Théorème 5.1: Supposons que le lagrangien associé au problème (5.1)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X lorsque le vecteur de multiplicateur $\lambda = \lambda^*$. Si $f_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, alors x^* est une solution optimale globale de (5.1).

Preuve. La preuve se fait par contradiction en supposant que x^* n'est pas une solution optimale de (5.1). Alors il existe un $\bar{x}$ tel que $f_i(\bar{x}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, et $f(\bar{x}) < f(x^*)$.

Théorème 5.1: Supposons que le lagrangien associé au problème (5.1)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X lorsque le vecteur de multiplicateur $\lambda = \lambda^*$. Si $f_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, alors x^* est une solution optimale globale de (5.1).

Preuve. La preuve se fait par contradiction en supposant que x^* n'est pas une solution optimale de (5.1). Alors il existe un $\bar{x}$ tel que $f_i(\bar{x}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, et $f(\bar{x}) < f(x^*)$.

Par conséquent, pour tout λ

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*) = 0$$

et ainsi

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\bar{x}) < f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*).$$

En prenant $\lambda = \lambda^*$ la relation précédente contredit le fait que x^* est un minimum global du lagrangien sur X lorsque $\lambda = \lambda^*$. □

Considérons maintenant le problème de programmation mathématique suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujet à} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{array} \quad (5.2)$$

Théorème 5.2: Supposons que le lagrangien associé au problème (5.2)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X lorsque le vecteur de multiplicateur $\lambda = \lambda^*$. Si $f_i(x^*) \leq 0$, $\lambda_i^* \geq 0$ et $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, alors x^* est une solution optimale globale de (5.2).

Preuve. La preuve se fait par contradiction en supposant que x^* n'est pas une solution optimale de (5.2). Alors il existe un $\bar{x}$ tel que $f_i(\bar{x}) \leq 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, et $f(\bar{x}) < f(x^*)$.

Théorème 5.2: Supposons que le lagrangien associé au problème (5.2)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X lorsque le vecteur de multiplicateur $\lambda = \lambda^*$. Si $f_i(x^*) \leq 0$, $\lambda_i^* \geq 0$ et $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, alors x^* est une solution optimale globale de (5.2).

Preuve. La preuve se fait par contradiction en supposant que x^* n'est pas une solution optimale de (5.2). Alors il existe un $\bar{x}$ tel que $f_i(\bar{x}) \leq 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, et $f(\bar{x}) < f(x^*)$.

Par conséquent, pour $\lambda^* \geq 0$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = 0$$

et ainsi

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\bar{x}) < f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*).$$

La relation précédente contredit le fait que x^* est un minimum global du lagrangien sur X lorsque $\lambda = \lambda^*$. □

Conditions d'optimalite de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de premier ordre

Pour obtenir des conditions plus facilement vérifiables, il faut poser des hypothèses sur X et les fonctions f et f_i .

Si X est convexe, si f et f_i sont différentiables et convexes dans le problème (5.2)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujet à} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{array} \quad (5.2)$$

et si $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$,

alors le lagrangien
$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

est aussi une fonction convexe sur X puisque

$$\lambda_i \geq 0 \text{ et } f_i(x) \text{ convexe} \Rightarrow \lambda_i f_i(x) \text{ convexe}$$

$$f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \text{ somme de fonctions convexes.}$$

Si f et f_i sont différentiables et convexes, alors le lagrangien

$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ est une fonction différentiable et convexe en x ,

et il s'ensuit qu'il possède un minimum global en x^* sur X lorsque $\lambda = \lambda^*$ si

$$\nabla_x L(\lambda^*, x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0.$$

Alors le Théorème 5.2 peut s'écrire:

Théorème 5.2: Supposons que
le lagrangien associé au problème (5.2)

$$L(\lambda, x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

possède un minimum global x^* sur X
lorsque le vecteur de multiplicateur λ^* .

Si $f_i(x^*) \leq 0$, $\lambda_i^* \geq 0$ et $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$

pour tout $i = 1, \dots, m$,

alors x^* est une solution optimale globale de (5.2).

K-K-T

S'il existe un λ^* tel que

$$\nabla_x L(\lambda^*, x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$f_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Conditions K-K-T suffisantes

En utilisant le Théorème 5.2 nous venons de démontrer que les conditions K-K-T sont suffisantes sous les hypothèses supplémentaires que X est convexe et que les fonctions f et f_i sont convexes sur X .

Nous pouvons démontrer ce résultat en utilisant plutôt l'inégalité du gradient.

Théorème 5.3: Supposons que X est convexe et que les fonctions f et f_i sont différentiables et convexes. Si les conditions de K-K-T sont vérifiées à x^* , alors x^* est un minimum global du problème (5.2).

Preuve. Le lagrangien étant convexe (démontrer précédemment), alors par l'inégalité du gradient il s'ensuit que pour tout $x \in X$

$$f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) + \left[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) \right]^T (x - x^*)$$

Théorème 5.3: Supposons que X est convexe et que les fonctions f et f_i sont différentiables et convexes. Si les conditions de K-K-T sont vérifiées à x^* , alors x^* est un minimum global du problème (5.2).

Preuve. Le lagrangien étant convexe (démontrer précédemment), alors par l'inégalité du gradient il s'ensuit que pour tout $x \in X$

$$f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \geq \underbrace{f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*)}_0 + \underbrace{\left[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) \right]^T}_{0} (x - x^*)$$

K-K-T

$$\nabla_x L(\lambda^*, x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$f_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Alors, pour tout $x \in X$

$$f(x^*) - f(x) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \leq 0$$

et

$$f(x^*) \leq f(x). \quad \square$$

Conditions K-K-T nécessaires

L'analyse de la nécessité des conditions K-K-T est plus complexe et requiert l'introduction de notions et de résultats préliminaires reliés aux théorèmes d'alternatives.

Définitions.

L'hyperplan spécifié par le point $a \in R^n$ et le scalaire β est l'ensemble de R^n

$$H(a, \beta) = \{x \in R^n : a^T x = \beta\}.$$

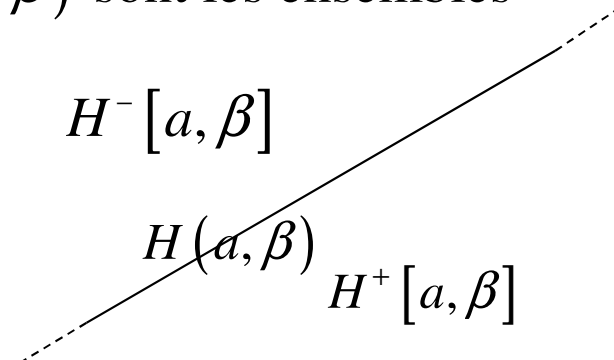
Les demis espaces (fermés) associés à l'hyperplan $H(a, \beta)$ sont les ensembles suivants de R^n :

$$H^+[a, \beta] = \{x \in R^n : a^T x \geq \beta\}$$

$$H^-[a, \beta] = \{x \in R^n : a^T x \leq \beta\}.$$

$$H^-[a, \beta]$$

$$H(a, \beta)$$

$$H^+[a, \beta]$$


Note. Il est facile de vérifier que tous ces ensembles sont convexes.

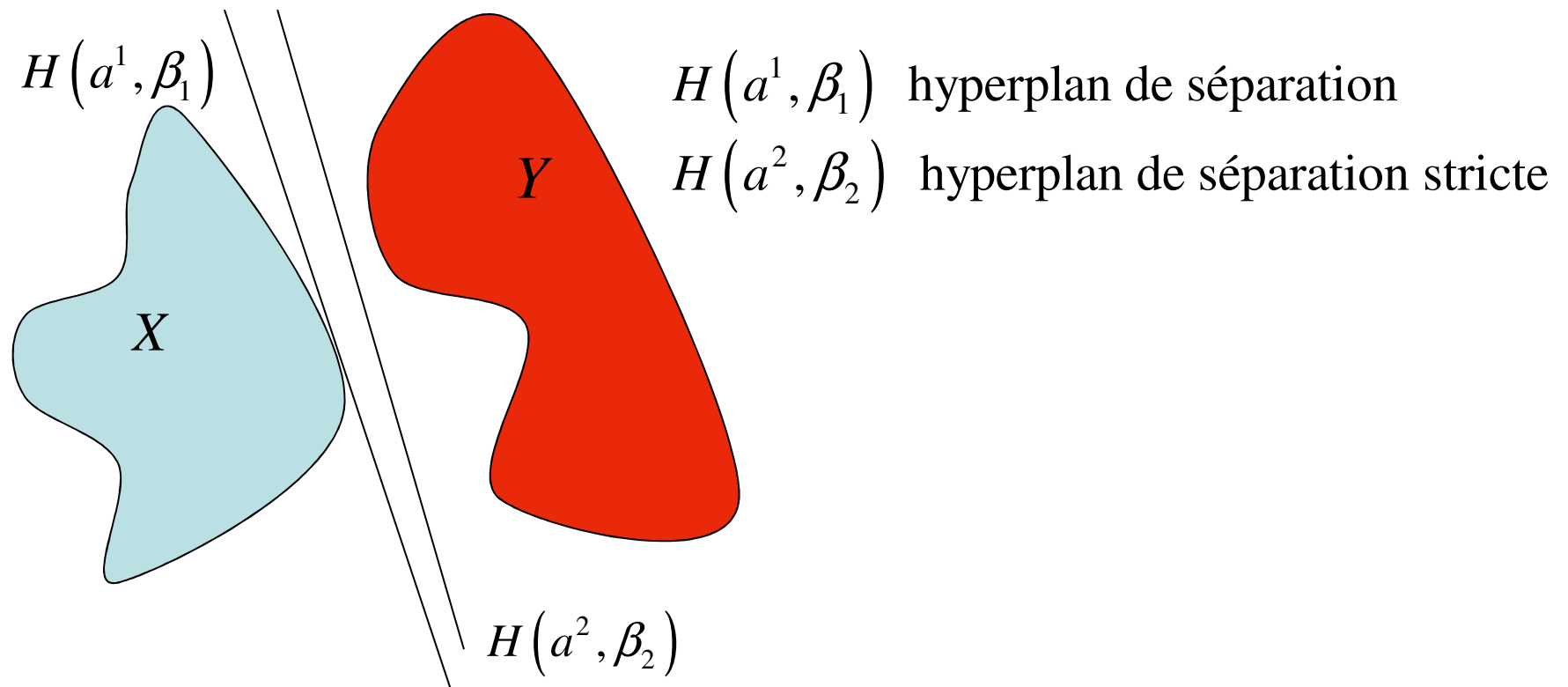
Définition. Hyperplan de séparation.

L'hyperplan $H(a, \beta)$ sépare deux ensembles non vides X et Y si

$$a^T x \geq \beta \text{ pour tout } x \in X \text{ (i.e., } X \subset H^+[a, \beta])$$

$$a^T y \leq \beta \text{ pour tout } y \in Y \text{ (i.e., } Y \subset H^-[a, \beta]).$$

La **séparation** est **stricte** si les inégalités dans les relations précédentes sont strictes.

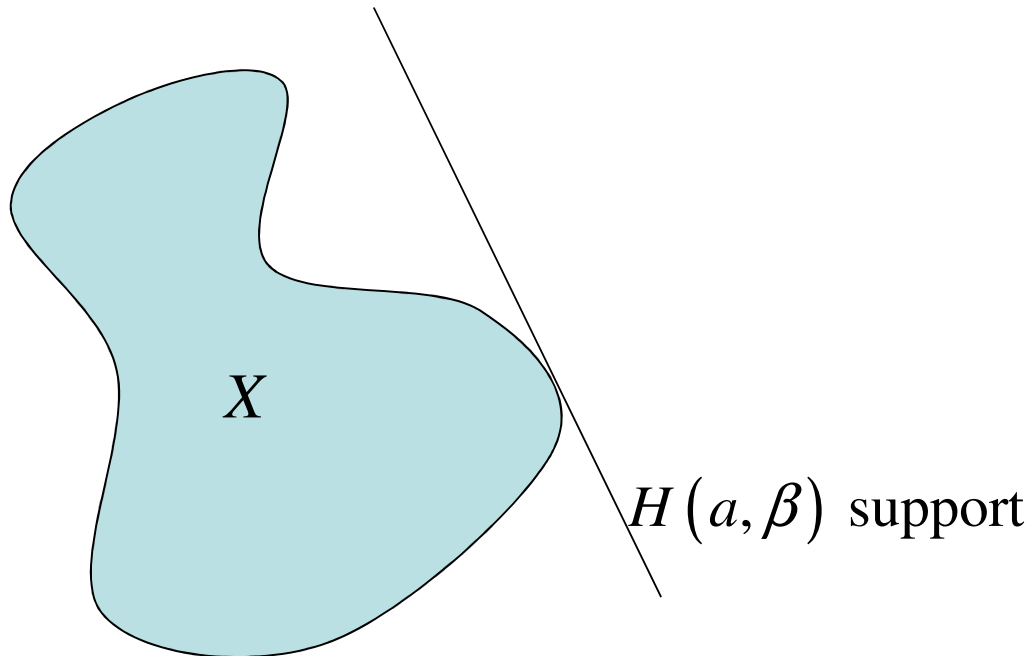


Définition. Étant donné un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}^n$ l'hyperplan $H(a, \beta)$ est un **support** de X si

$$H(a, \beta) \cap \bar{X} \neq \emptyset \text{ et}$$

$$X \subset H^+[a, \beta] \text{ ou } X \subset H^-[a, \beta]$$

(où $\bar{X}$ dénote la **fermeture** de l'ensemble X).



Théorème 5.4: Soient les vecteurs $x, y, a \in R^n$. Si $a^T y < a^T x$, alors pour tout $\theta \in (0,1)$,

$$a^T y < a^T (\theta x + (1-\theta) y) < a^T x.$$

Preuve. $a^T (\theta x + (1-\theta) y) < a^T (\theta x + (1-\theta) x) = a^T x.$

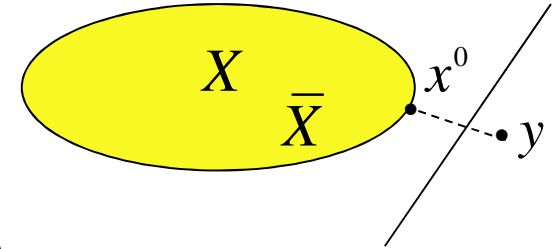
$$a^T (\theta x + (1-\theta) y) > a^T (\theta y + (1-\theta) y) = a^T y.$$

□

Théorème 5.5: (Théorème de séparation) Si $X \subset R^n$ est un ensemble convexe non vide et si $y \notin \bar{X}$, alors il existe un hyperplan qui sépare (strictement) $\bar{X}$ et y .

Preuve. Il existe un point $x^0 \in \bar{X}$ tel que

$$\|x^0 - y\| = \min_{x \in \bar{X}} \|x - y\|$$



(où $\|z\| = \sqrt{z^T z}$ dénote la norme euclidienne de z).

Il est facile de vérifier que $\bar{X}$ est un ensemble convexe, et par conséquent le segment de droite $\mathfrak{S}(x^0, x) \subset \bar{X}$ pour tout $x \in \bar{X}$. Donc pour tout $\theta \in [0, 1]$

$$\|x^0 - y\| \leq \|(\theta x + (1 - \theta)x^0) - y\|.$$

Ainsi pour tout $\theta \in [0, 1]$

$$(x^0 - y)^T (x^0 - y) \leq ((\theta x + (1 - \theta)x^0) - y)^T ((\theta x + (1 - \theta)x^0) - y)$$

$$(x^0 - y)^T (x^0 - y) \leq ((x^0 - y) + \theta(x - x^0))^T ((x^0 - y) + \theta(x - x^0))$$

$$(x^0 - y)^T (x^0 - y) \leq (x^0 - y)^T (x^0 - y) + 2\theta(x - x^0)^T (x^0 - y) + \theta^2(x - x^0)^T (x - x^0)$$

Ainsi pour tout $\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned}(x^0 - y)^T (x^0 - y) &\leq \left((\theta x + (1-\theta)x^0) - y \right)^T \left((\theta x + (1-\theta)x^0) - y \right) \\(x^0 - y)^T (x^0 - y) &\leq \left((x^0 - y) + \theta(x - x^0) \right)^T \left((x^0 - y) + \theta(x - x^0) \right) \\ \cancel{(x^0 - y)^T (x^0 - y)} &\leq \cancel{(x^0 - y)^T (x^0 - y)} + 2\theta(x - x^0)^T (x^0 - y) + \\ &\quad \theta^2(x - x^0)^T (x - x^0).\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $\theta \in [0,1]$

$$2\theta(x - x^0)^T (x^0 - y) + \theta^2(x - x^0)^T (x - x^0) \geq 0.$$

Mais alors ceci implique que $(x - x^0)^T (x^0 - y) \geq 0$.

$(x - x^0)^T (x^0 - y) < 0$, alors pour $\tilde{\theta} > 0$ suffisamment petit

$$2\tilde{\theta} \left| (x - x^0)^T (x^0 - y) \right| > \tilde{\theta}^2 \left| (x - x^0)^T (x - x^0) \right|$$

et alors nous aurions que

$$2\tilde{\theta}(x - x^0)^T (x^0 - y) + \tilde{\theta}^2(x - x^0)^T (x - x^0) < 0.$$

Nous avons donc que $(x - x^0)^T (x^0 - y) \geq 0$ ou encore

$$x^{0T} (x^0 - y) \leq x^T (x^0 - y). \quad (5.3)$$

Puisque $y \notin \bar{X}$, $\|x^0 - y\|^2 = (x^0 - y)^T (x^0 - y) > 0$, ou encore

$$y^T (x^0 - y) < x^{0T} (x^0 - y). \quad (5.4)$$

Alors en appliquant le Théorème 5.4 avec les vecteurs $(x^0 - y)$,

x^0 , y , et avec $\theta = \frac{1}{2}$, et utilisant la relation (5.4)

$$y^T (x^0 - y) < \frac{1}{2} (x^0 + y)^T (x^0 - y) < x^{0T} (x^0 - y).$$

En utilisant maintenant la relation (5.3),

$$y^T (x^0 - y) < \frac{1}{2} (x^0 + y)^T (x^0 - y) < x^{0T} (x^0 - y) \leq x^T (x^0 - y).$$

En utilisant maintenant la relation (5.3),

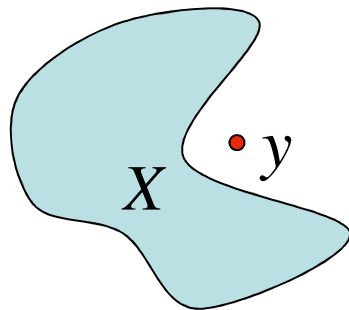
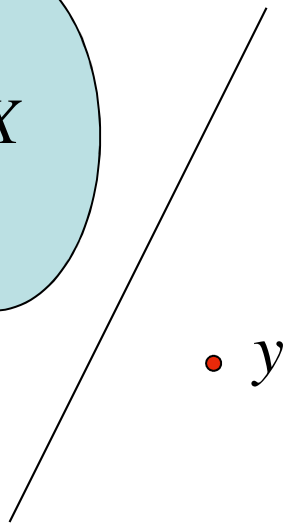
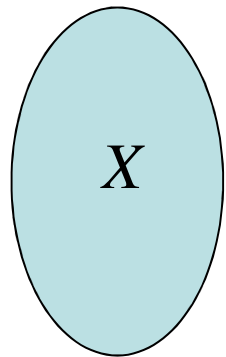
$$y^T (x^0 - y) < \frac{1}{2} (x^0 + y)^T (x^0 - y) < x^{0T} (x^0 - y) \leq x^T (x^0 - y).$$

Par conséquent nous avons que

$$y^T (x^0 - y) < \frac{1}{2} (x^0 + y)^T (x^0 - y) < x^T (x^0 - y).$$

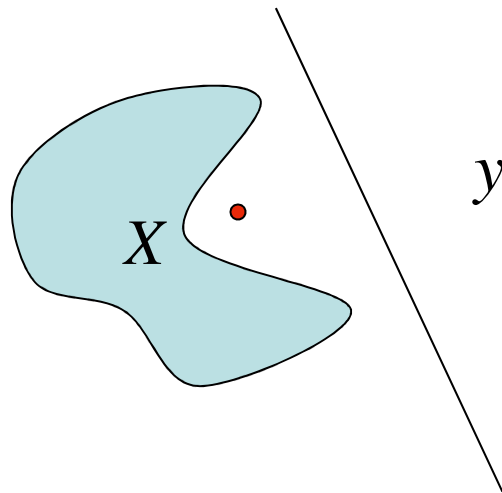
Puisque cette relation est valable pour tout $x \in \bar{X}$, il s'ensuit que l'hyperplan $H(a, \beta)$ où $a = (x^0 - y)$ et

$$\beta = \frac{1}{2} (x^0 + y)^T (x^0 - y) \text{ sépare (strictement) } \bar{X} \text{ et } y. \quad \square$$



Dans le Théorème 5.5, la convexité de X est une condition suffisante pour assurer l'existence d'un hyperplan le séparant (strictement) de $y \notin \bar{X}$.

Mais comme l'illustre la figure suivante, la convexité de X n'est pas une condition nécessaire.



Théorème 5.6:(Théorème de Farkas) Étant donné les vecteurs $a^1, \dots, a^n$ et $b \in R^m$, une condition suffisante pour que b s'exprime comme une combinaison linéaire non négative des a^j (i.e., une condition suffisante pour qu'il existe des scalaires non négatifs $x_1, \dots, x_n$ tels que $b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n$) est que tout $y \in R^m$ tel que $y^T a^j \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, vérifie nécessairement la relation $y^T b \geq 0$.

Preuve. Il faut démontrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } y \in R^m, \\ \text{si } y^T a^j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \text{alors nécessairement } y^T b \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tels que} \\ b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \end{array} \right\}$$

Preuve. Il faut démontrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } y \in R^m, \\ \text{si } y^T a^j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \text{alors nécessairement } y^T b \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tels que} \\ b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \end{array} \right\}$$

Nous allons plutôt démontrer la contraposé de l'implication:

$$\neg \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } y \in R^m, \\ \text{si } y^T a^j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \text{alors nécessairement } y^T b \geq 0 \end{array} \right\} \Leftarrow \neg \left\{ \begin{array}{l} \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tels que} \\ b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \end{array} \right\}$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \nexists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tels que} \\ b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in R^m, \text{ tel que} \\ y^T a^j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \text{et } y^T b < 0 \end{array} \right\}$$

Pour démontrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nexists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tels que} \\ b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in R^m, \text{ tel que} \\ y^T a^j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \text{et } y^T b < 0 \end{array} \right\}$$

considérons l'ensemble

$$Z = \left\{ z \in R^m : \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tel que } z = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \right\}.$$

Il est facile de démontrer que Z est convexe. Il est aussi possible de démontrer que Z est un ensemble fermé (i.e. $Z = \bar{Z}$).

$$z^1 = a^1 x_1^1 + \dots + a^n x_n^1$$

$$z^2 = a^1 x_1^2 + \dots + a^n x_n^2$$

$$\theta z^1 + (1 - \theta) z^2 = a^1 \left[\theta x_1^1 + (1 - \theta) x_1^2 \right] + \dots + a^n \left[\theta x_n^1 + (1 - \theta) x_n^2 \right]$$

$$\text{et alors } \theta z^1 + (1 - \theta) z^2 \in Z$$

Pour démontrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nexists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tels que} \\ b = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists y \in R^m, \text{ tel que} \\ y^T a^j \geq 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, \\ \text{et } y^T b < 0 \end{array} \right\}$$

considérons l'ensemble

$$Z = \left\{ z \in R^m : \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tel que } z = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \right\}.$$

Il est facile de démontrer que Z est convexe. Il est aussi possible de démontrer que Z est un ensemble fermé (i.e. $Z = \bar{Z}$).

Puisque par hypothèse de la contraposé $b \notin Z = \bar{Z}$, alors par le théorème 5.5 il existe un hyperplan $H(p, \beta)$ qui sépare strictement Z et b :

$$p^T b < \beta < p^T z \quad \text{pour tout } z \in Z. \quad (5.5)$$

$$Z = \left\{ z \in R^m : \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tel que } z = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \right\}.$$

Puisque par hypothèse de la contraposé $b \notin Z = \bar{Z}$, alors par le théorème 5.5 il existe un hyperplan $H(p, \beta)$ qui sépare strictement Z et b :

$$p^T b < \beta < p^T z \quad \text{pour tout } z \in Z. \quad (5.5)$$

Or $0 \in Z$, ce qui implique que $\beta < 0$ et par conséquent que

$$p^T b < 0.$$

Également, $p^T z \geq 0$ pour tout $z \in Z$. En effet, s'il existait un $\tilde{z} \in Z$ tel que $p^T \tilde{z} < 0$, alors puisque Z est un cône (i.e., si $z \in Z$ alors $\lambda z \in Z$ pour tout $\lambda \geq 0$), nous aurions que $p^T (\lambda \tilde{z}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} -\infty$ contredisant (5.5).

Or $0 \in Z$, ce qui implique que $\beta < 0$ et par conséquent que

$$p^T b < 0.$$

Également, $p^T z \geq 0$ pour tout $z \in Z$. En effet, s'il existait un $\tilde{z} \in Z$ tel que $p^T \tilde{z} < 0$, alors puisque Z est un cône (i.e., si $z \in Z$ alors $\lambda z \in Z$ pour tout $\lambda \geq 0$) nous aurions que $p^T (\lambda \tilde{z}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} -\infty$ contredisant (5.5).

Comme il est facile de vérifier que $a^j \in Z$, $j = 1, \dots, n$,

$$Z = \left\{ z \in R^m : \exists x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ tel que } z = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n \right\}$$

il s'ensuit que $p^T a^j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Nous avons donc démontré la contraposé puisque $p \in R^m$ est tel que $p^T a^j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ et $p^T b < 0$. □

Corollaire 5.7: (Théorème d'alternatives) Soit A une matrice $m \times n$. Exactement une des deux alternatives suivantes est vérifiée:

I Le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution $x \in R^n$

II Le système $A^T y \geq 0, b^T y < 0$ possède une solution $y \in R^m$.

Preuve. Il est facile de vérifier que les deux alternatives ne peuvent tenir en même temps, car autrement la relation suivante serait satisfaite:

$$0 > b^T y = x^T A^T y \geq 0$$

une contradiction.

- I Le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution $x \in R^n$

II Le système $A^T y \geq 0, b^T y < 0$ possède une solution $y \in R^m$.

Dénotons par $a_{\bullet j}$, $j = 1, \dots, n$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de A .

Considérant l'alternative II, celle-ci est vérifiée ou elle ne l'est pas.

Dans le cas où elle ne l'est pas, il s'ensuit que le système

$A^T y \geq 0, b^T y < 0$ ne possède pas de solution $y \in R^m$;

i.e., le système $a_{\bullet j}^T y \geq 0, j = 1, \dots, n, b^T y < 0$ ne possède pas

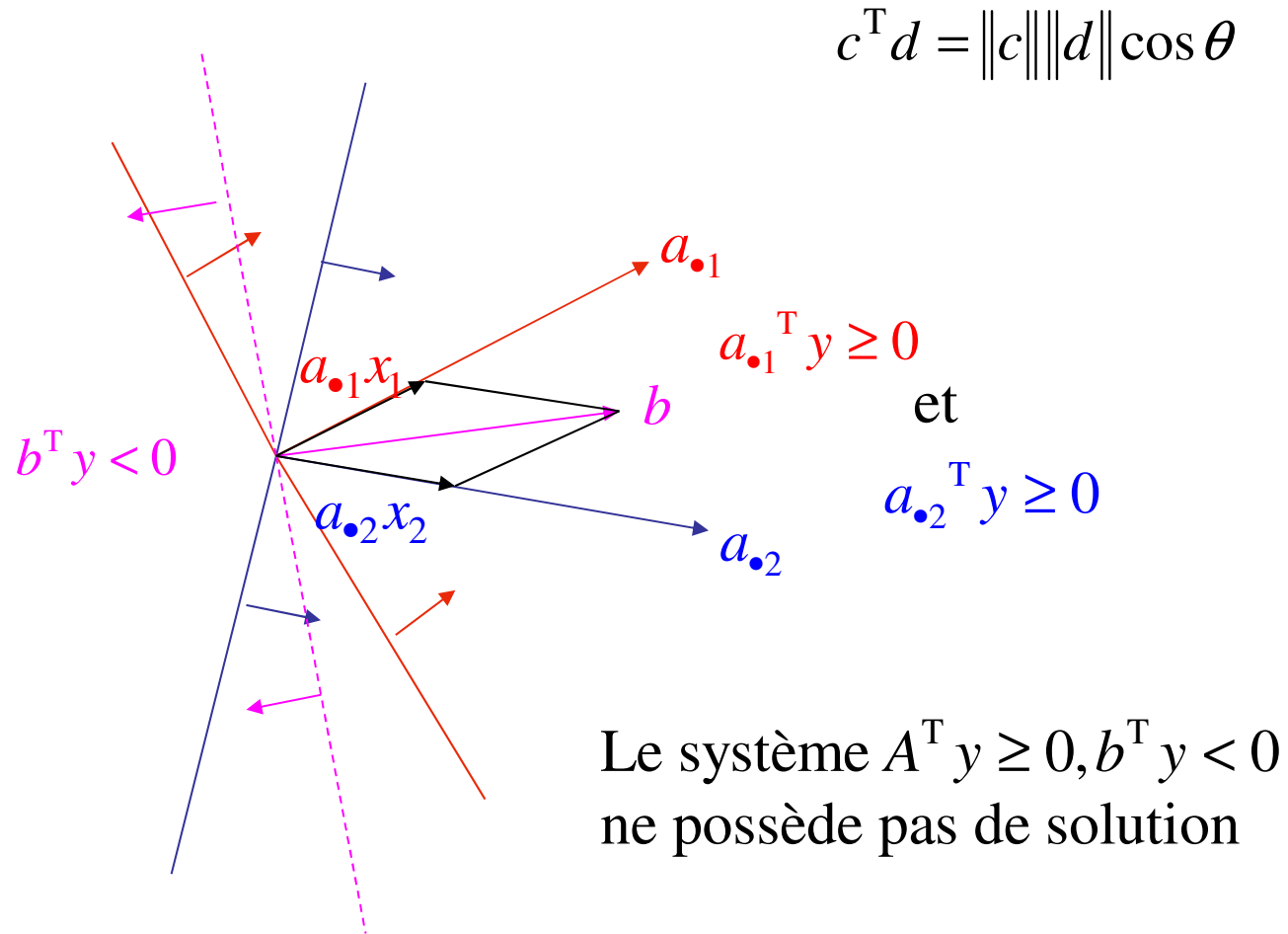
de solution $y \in R^m$. Ainsi pour tout $y \in R^m$,

si $a_{\bullet j}^T y \geq 0, j = 1, \dots, n$, alors nécessairement $b^T y \geq 0$.

Donc par le Théorème 5.6, il existe un vecteur $x \in R^n, x \geq 0$ tel que $Ax = a_{\bullet 1}x_1 + \dots + a_{\bullet n}x_n = b$, et l'alternative I tient. □

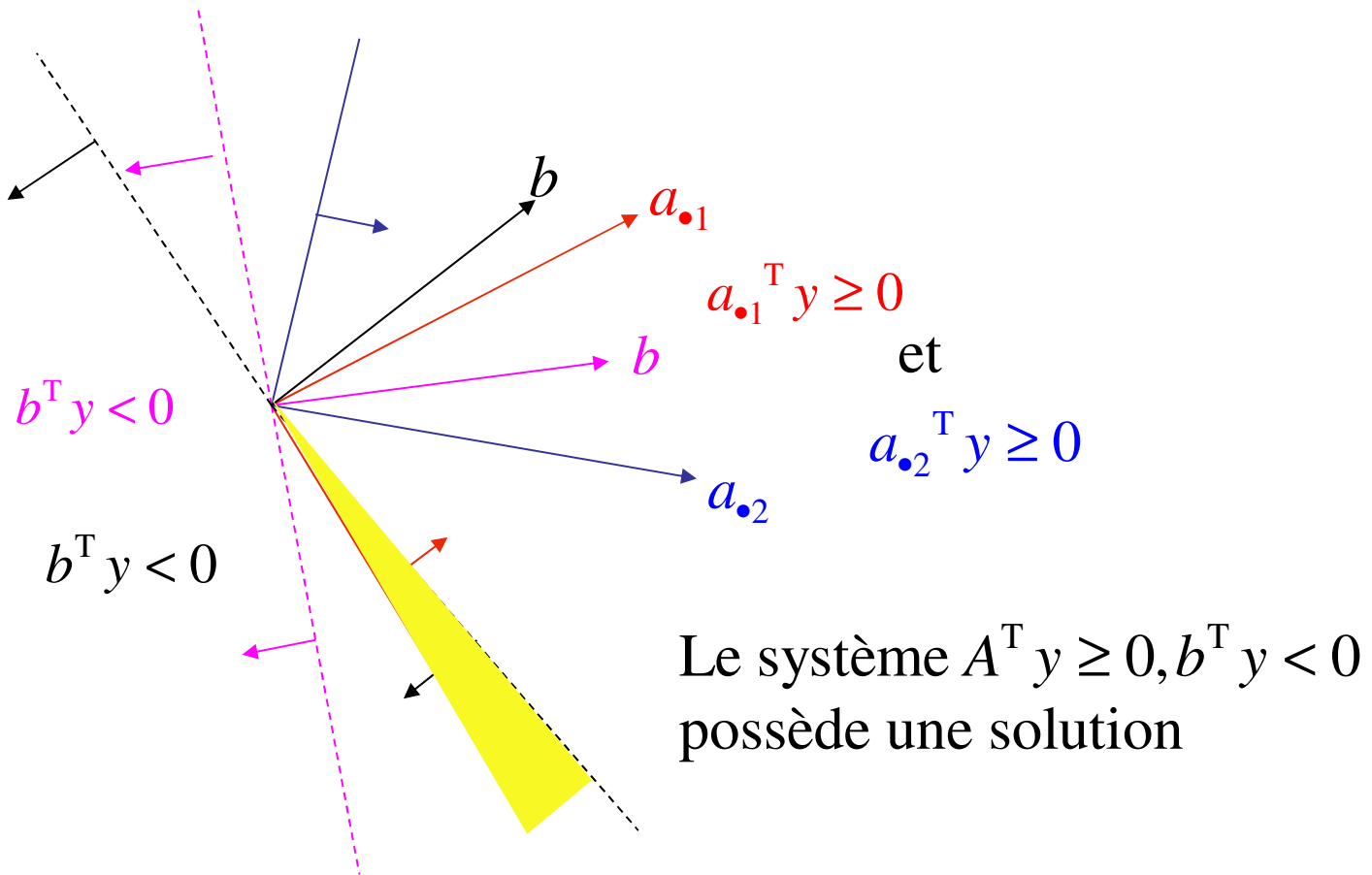
- I Le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution $x \in R^n$
 II Le système $A^T y \geq 0, b^T y < 0$ possède une solution $y \in R^m$

Illustration du cas où le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution.



- I Le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution $x \in \mathbb{R}^n$
- II Le système $A^T y \geq 0, b^T y < 0$ possède une solution $y \in \mathbb{R}^m$

Illustration du cas où le système $Ax = b, x \geq 0$ ne possède pas de solution.



Corollaire 5.7: (Théorème d'alternatives) Soit A une matrice $m \times n$. Exactement une des deux alternatives suivantes est vérifiée:

I Le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution $x \in R^n$

II Le système $A^T y \geq 0, b^T y < 0$ possède une solution $y \in R^m$.

Revenons à l'analyse de la nécessité des conditions K-K-T en exploitant le Corollaire 5.7.

Supposons que $x^* \in X$, $f_i(x^*) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, est une solution locale du problème (5.2).

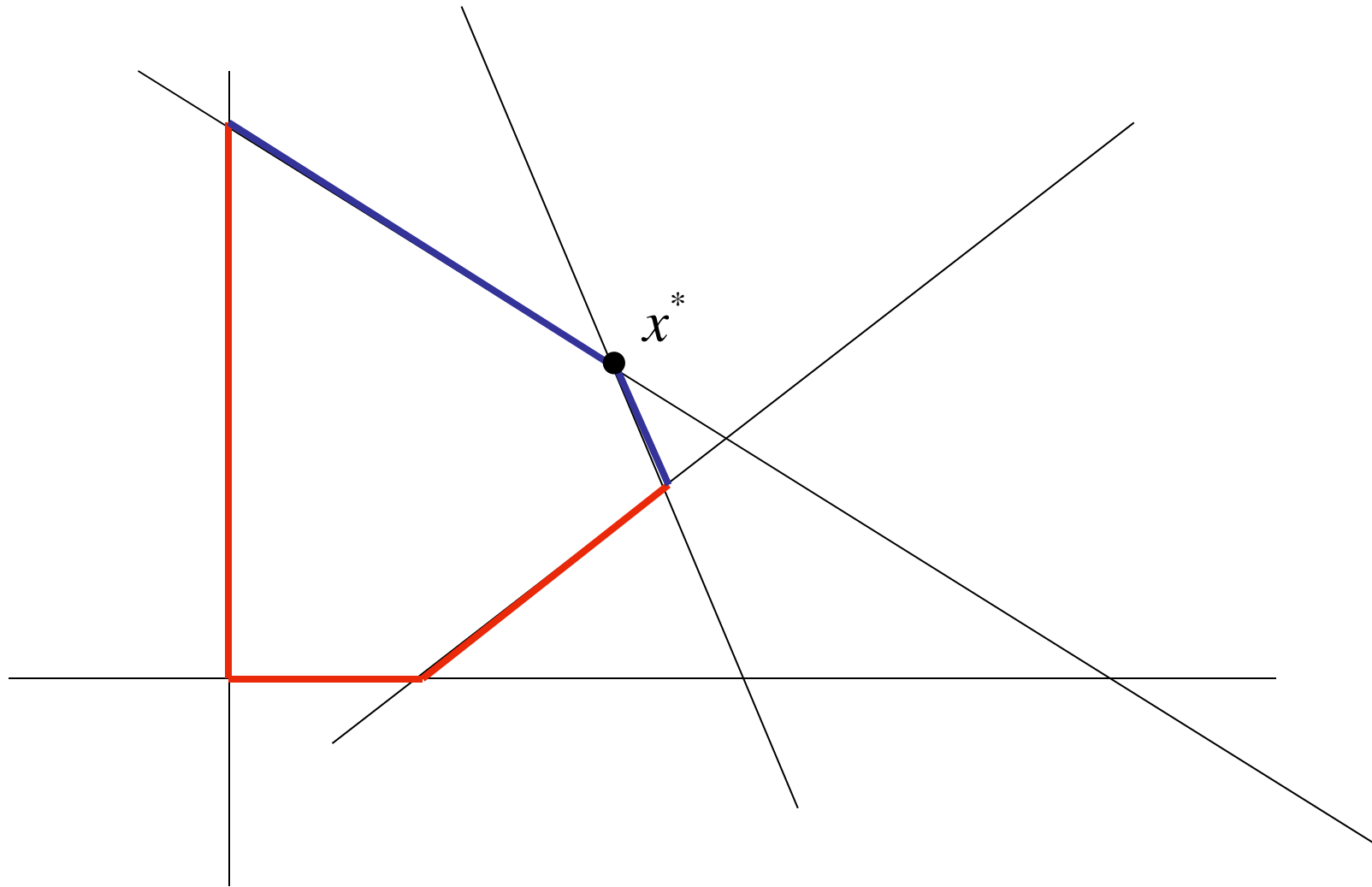
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujet à} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{array} \quad (5.2)$$

Notation: Dénotons l'ensemble des **contraintes actives**

$$A(x^*) = \{i : f_i(x^*) = 0\} = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}.$$

HYPOTHÈSE À VÉRIFIER : Supposons que nous pouvons démontrer qu'il n'existe pas de vecteur $d \in R^n$ tel que

$$\begin{array}{ll} \nabla f_i(x^*)^T d \leq 0 & i \in A(x^*) \\ \nabla f(x^*)^T d < 0 \end{array} \quad (5.6)$$



Revenons à l'analyse de la nécessité des conditions K-K-T en exploitant le Corollaire 5.7.

Supposons que $x^* \in X$, $f_i(x^*) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, est une solution locale du problème (5.2).

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujet à} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{array} \quad (5.2)$$

Notation: Dénotons l'ensemble des **contraintes actives**

$$A(x^*) = \{i : f_i(x^*) = 0\} = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}.$$

HYPOTHÈSE À VÉRIFIER : Supposons que nous pouvons démontrer qu'il n'existe pas de vecteur $d \in R^n$ tel que

$$\begin{array}{ll} \nabla f_i(x^*)^T d \leq 0 & i \in A(x^*) \\ \nabla f(x^*)^T d < 0 \end{array} \quad (5.6)$$

HYPOTHÈSE À VÉRIFIER : Supposons que nous pouvons démontrer

qu'il n'existe pas de vecteur $d \in R^n$ tel que

$$\nabla f_i (x^*)^T d \leq 0 \quad i \in A(x^*)$$

$$\nabla f(x^*)^T d < 0.$$

$$\begin{bmatrix} \nabla f_{i_1}(x^*)^T d \leq 0 \\ \vdots \\ \nabla f_{i_k}(x^*)^T d \leq 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla f_{i_1}(x^*)^T \\ \vdots \\ \nabla f_{i_k}(x^*)^T \end{bmatrix} d \leq 0$$

Ainsi le système

$$\begin{bmatrix} \nabla f_{i_1}(x^*), \dots, \nabla f_{i_k}(x^*) \end{bmatrix}^T d \leq 0,$$

$$\nabla f(x^*)^T d < 0$$

ne possède pas de solution.

Appliquons maintenant le Corollaire 5.7:

$$\left\{ \Pi : - \begin{bmatrix} \nabla f_{i_1}(x^*), \dots, \nabla f_{i_k}(x^*) \end{bmatrix}^T d \geq 0, \begin{bmatrix} \nabla f(x^*)^T \end{bmatrix} d < 0 \text{ n'as pas de solution } d \in R^n \right\}$$

implique que

$$\left\{ \text{I: } - \begin{bmatrix} \nabla f_{i_1}(x^*), \dots, \nabla f_{i_k}(x^*) \end{bmatrix} \tilde{\lambda}^* = \nabla f(x^*), \tilde{\lambda}^* = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1}^*, \dots, \lambda_{i_k}^* \end{bmatrix} \geq 0 \text{ possède une solution} \right\}$$

Corollaire 5.7: (Théorème d'alternatives) Soit A une matrice $m \times n$. Exactement une des deux alternatives suivantes est vérifiée:

I Le système $Ax = b, x \geq 0$ possède une solution $x \in R^n$

II Le système $A^T y \geq 0, b^T y < 0$ possède une solution $y \in R^m$.

Appliquons maintenant le Corollaire 5.7:

$$\left\{ \Pi : -\left[\nabla f_{i_1}(x^*), \dots, \nabla f_{i_k}(x^*) \right]^T d \geq 0, \nabla f(x^*)^T d < 0 \text{ n'as pas de solution } d \in R^n \right\}$$

implique que

$$\left\{ \text{I: } -\left[\nabla f_{i_1}(x^*), \dots, \nabla f_{i_k}(x^*) \right] \tilde{\lambda}^* = \nabla f(x^*), \tilde{\lambda}^* = [\lambda_{i_1}^*, \dots, \lambda_{i_k}^*] \geq 0 \text{ possède une solution } \right\}.$$

Ceci s'écrit également sous la forme

$$\left\{ \text{I: } - \sum_{i \in A(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = \nabla f(x^*), \tilde{\lambda}^* = [\lambda_{i_1}^*, \dots, \lambda_{i_k}^*] \geq 0 \text{ possède une solution } \right\}$$

Posons $\lambda_i^* = 0$ pour tout $i \notin A(x^*)$. Alors

$$\sum_{i \in A(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad \text{pour tout } i \notin A(x^*).$$

Ceci s'écrit également sous la forme

$$\left\{ \text{I: } - \sum_{i \in A(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = \nabla f(x^*), \tilde{\lambda}^* = [\lambda_{i_1}^*, \dots, \lambda_{i_k}^*] \geq 0 \text{ possède une solution} \right\}$$

$$0 = \nabla f(x^*) + \sum_{i \notin A(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i \in A(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*)$$

Posons $\lambda_i^* = 0$ pour tout $i \notin A(x^*)$. Alors

$$\sum_{i \notin A(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad \text{pour tout } i \notin A(x^*).$$

Par conséquent nous retrouvons les conditions K-K-T

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$f_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & f(x) \\
\text{Sujet à} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\
& x \in X
\end{array} \tag{5.2}$$

convexité $\Uparrow$ $\Downarrow$ conditions...

K-K-T

$$\nabla_x L(\lambda^*, x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$f_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$x^* \in X$$

Malheureusement

HYPOTHÈSE À VÉRIFIER : Supposons que nous pouvons démontrer qu'il n'existe pas de vecteur $d \in R^n$ tel que

$$\nabla f_i(x^*)^T d \leq 0 \quad i \in A(x^*) \quad (5.6)$$

$$\nabla f(x^*)^T d < 0$$

ne l'est pas nécessairement pour toute solution locale x^* de tout problème tel que l'illustre l'exemple suivant..

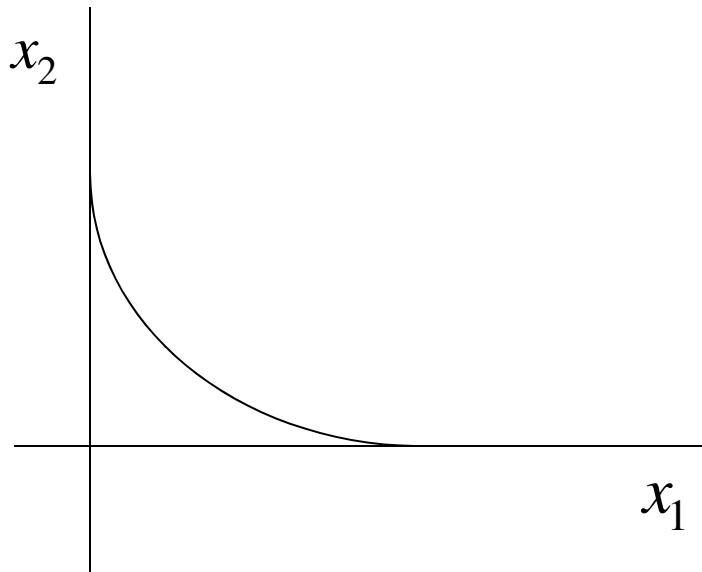
$$\text{Min } f(x_1, x_2) = -x_1$$

$$\text{Sujet à } f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0.$$

L'ensemble des solutions réalisables de ce problème est représentée par la region en-dessous de la courbe de $f_1(x_1, x_2)$ au-dessus de l'axe des x_1 et à droite de l'axe des x_2 .



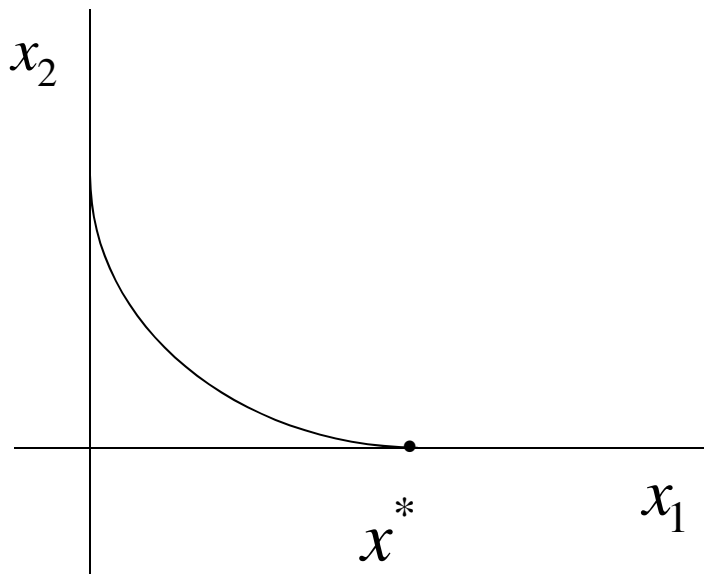
$$\text{Min } f(x_1, x_2) = -x_1$$

$$\text{Sujet à } f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0.$$

L'ensemble des solutions réalisables de ce problème est représentée par la région en-dessous de la courbe de $f_1(x_1, x_2)$ au-dessus de l'axe des x_1 et à droite de l'axe des x_2 .



Il est facile de vérifier que $x^* = [1, 0]^T$ est une solution optimale globale de ce problème. De plus $A(x^*) = \{1, 3\}$.

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = -x_1$$

$$\text{Sujet à } f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + x_2 \leq 0$$

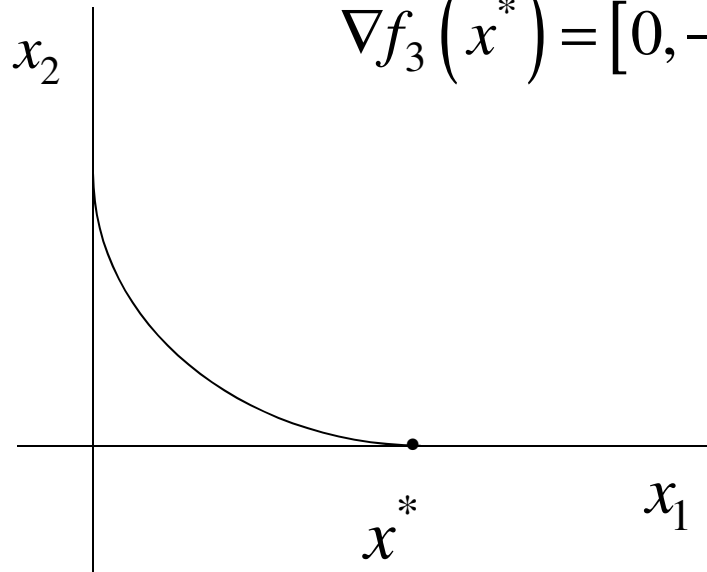
$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

$$f_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0.$$

$$\text{Or } \nabla f(x^*) = [-1, 0]^T,$$

$$\nabla f_1(x) = [3(x_1 - 1)^2, 1]^T \text{ et } \nabla f_1(x^*) = [0, 1]^T$$

$$\nabla f_3(x^*) = [0, -1]^T$$



Or $\nabla f(x^*) = [-1, 0]^T$,

$\nabla f_1(x) = [3(x_1 - 1)^2, 1]^T$ et $\nabla f_1(x^*) = [0, 1]^T$

$\nabla f_3(x^*) = [0, -1]^T$

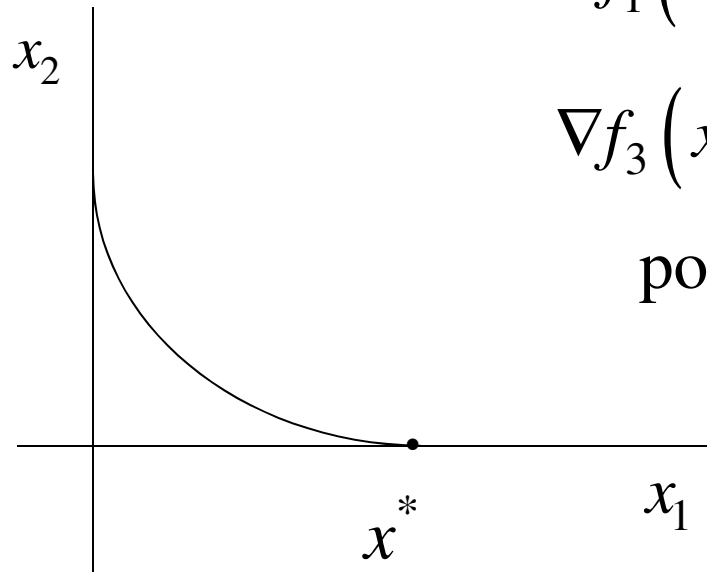
On aimerait que le système

$$\nabla f(x^*)^T d < 0$$

$$\nabla f_1(x^*)^T d \leq 0$$

$$\nabla f_3(x^*)^T d \leq 0$$

possède une solution d .



Ainsi le système

$$\nabla f(x^*)^T d = -d_1 < 0$$

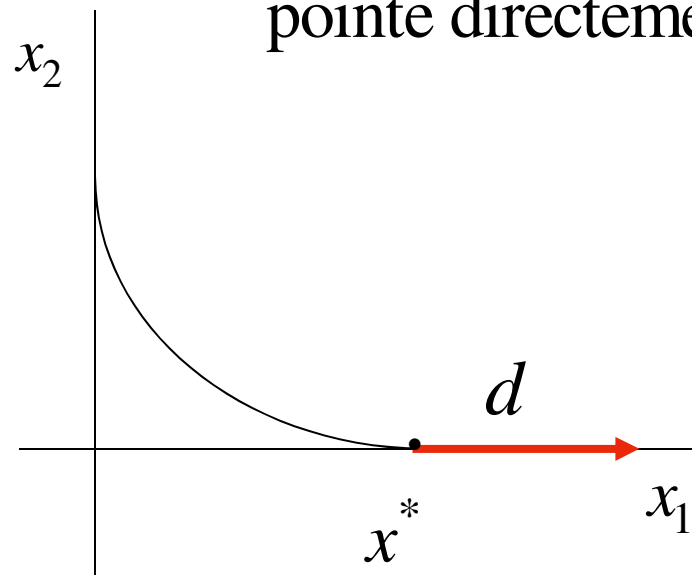
$$\nabla f_1(x^*)^T d = d_2 \leq 0$$

$$\nabla f_3(x^*)^T d = -d_2 \leq 0$$

possède une solution $d = [1, 0]$.

Notons qu'au point x^* la direction $d = [1, 0]$

pointe directement à l'extérieur du domaine réalisable.



Nous allons donc imposer certaines restrictions sur les contraintes des problèmes considérés pour éliminer de telles situations.

Restrictions sur les fonctions de contraintes de Kuhn-Tucker

Notation: $\tilde{R}$ dénote le domaine réalisable du problème (5.2)

$$\delta\tilde{R} = \left\{ x \in \tilde{R} : \exists i, 1 \leq i \leq m, \text{ tel que } f_i(x) = 0 \right\}.$$

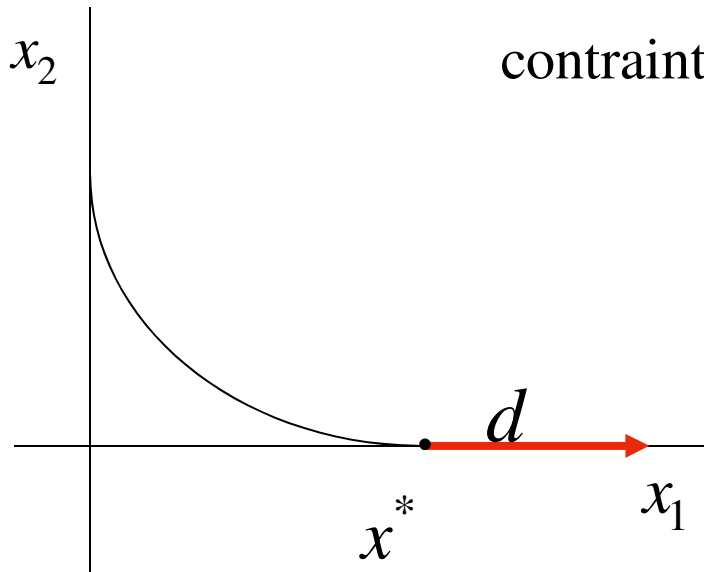
Définition. Étant donné un point $\bar{x} \in \delta\tilde{R}$, $f_1, \dots, f_m$ satisfont les restrictions sur les fonctions de contraintes au point $\bar{x}$ si pour tout vecteur $\hat{d}$ solution du système $\nabla f_i(\bar{x})^T d \leq 0, i \in A(\bar{x})$, il existe une fonction différentiable $\alpha: [0, 1] \rightarrow \tilde{R}$ tel que $\alpha(0) = \bar{x}$ et $\alpha'(0) = \sigma \hat{d}, \sigma > 0$.

Notation: $\tilde{R}$ dénote le domaine réalisable du problème (5.2)

$$\delta\tilde{R} = \left\{ x \in \tilde{R} : \exists i, 1 \leq i \leq m, \text{ tel que } f_i(x) = 0 \right\}.$$

Définition. Étant donné un point $\bar{x} \in \delta\tilde{R}$, $f_1, \dots, f_m$ satisfont les **restrictions sur les fonctions de contraintes** au point $\bar{x}$ si pour tout vecteur $\hat{d}$ solution du système $\nabla f_i(\bar{x})^T d \leq 0, i \in A(\bar{x})$, il existe une fonction différentiable $\alpha: [0, 1] \rightarrow \tilde{R}$ tel que $\alpha(0) = \bar{x}$ et $\alpha'(0) = \sigma \hat{d}, \sigma > 0$.

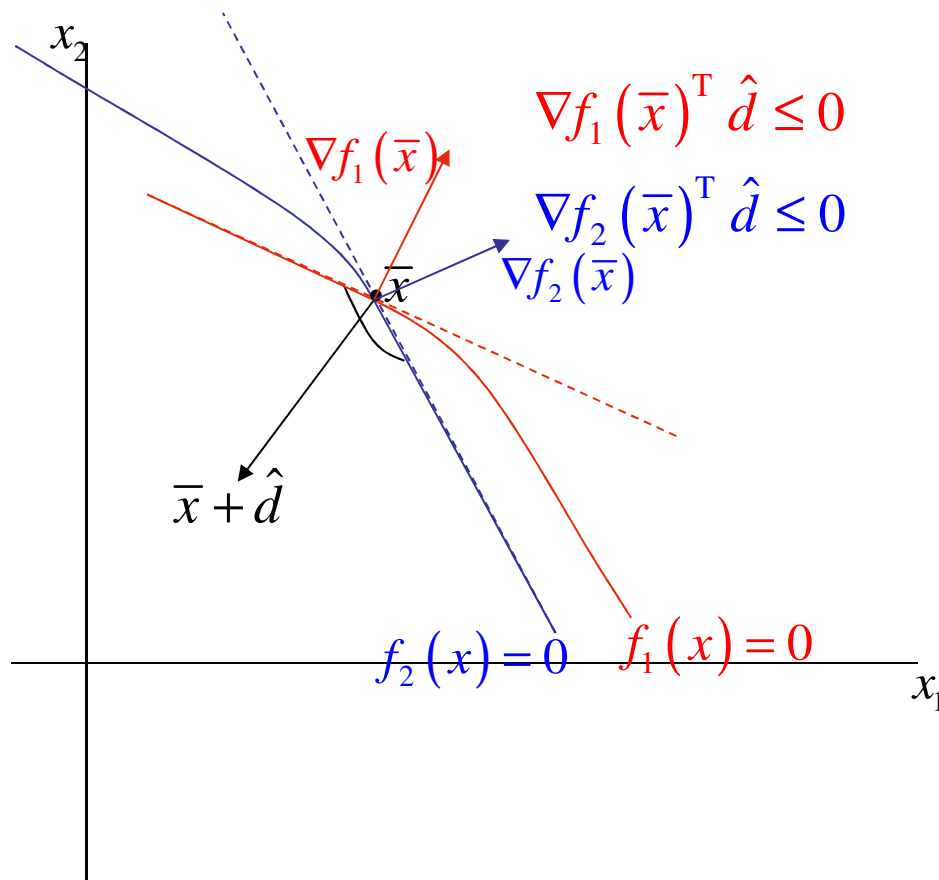
Dans l'exemple précédent, les contraintes f_1, f_2, f_3 ne satisfont pas les restrictions sur les fonctions de contraintes au point $x^* \in \delta\tilde{R}$.



En effet, il n'existe pas de fonction différentiable α prenant ses valeurs dans $\tilde{R}$ dont la pente à 0 est un multiple positif de d , puisque d pointe à l'extérieur de $\tilde{R}$.

Définition. Étant donné un point $\bar{x} \in \delta\tilde{R}$, $f_1, \dots, f_m$ satisfont les **restrictions sur les fonctions de contraintes** au point $\bar{x}$ si pour tout vecteur $\hat{d}$ solution du système $\nabla f_i(\bar{x})^T d \leq 0$, $i \in A(\bar{x})$, il existe une fonction différentiable $\alpha: [0,1] \rightarrow \tilde{R}$ tel que $\alpha(0) = \bar{x}$ et $\alpha'(0) = \sigma \hat{d}$, $\sigma > 0$.

Interprétation géométrique.



$$\begin{aligned}\alpha(\theta) &= \bar{x} + \theta \hat{d} \\ \alpha(0) &= \bar{x} \\ \alpha'(0) &= \hat{d}\end{aligned}$$

Définition. Étant donné un point $\bar{x} \in \delta\tilde{R}$, $f_1, \dots, f_m$ satisfont les restrictions sur les fonctions de contraintes au point $\bar{x}$ si pour tout vecteur $\hat{d}$ solution du système $\nabla f_i(\bar{x})^T d \leq 0, i \in A(\bar{x})$, il existe une fonction différentiable $\alpha: [0,1] \rightarrow \tilde{R}$ tel que $\alpha(0) = \bar{x}$ et $\alpha'(0) = \sigma \hat{d}, \sigma > 0$.

Interprétation

Se référant à la notion de direction de descente, lorsque $\nabla f_i(\bar{x})^T d < 0$, alors pour un faible déplacement $\tau > 0$ dans la direction d , $f_i(\bar{x} + \tau d) < f_i(\bar{x}) = 0$. Ainsi, ce déplacement nous garde dans le domaine réalisable par rapport à cette contrainte. Les restrictions sur les fonctions de contraintes prolongent en quelque sorte cette propriété même si $\nabla f_i(\bar{x})^T d = 0$ puisque la fonction α prend ses valeurs dans le domaine réalisable $\tilde{R}$.

Théorème 5.8: (Nécessité des conditions K-K-T) Soit $x^* \in X$ une solution optimale locale du problème (5.2) où X est ouvert. Supposons de plus que si $x^* \in \tilde{R}$, alors $f_1, \dots, f_m$ satisfont les restrictions sur les fonctions de contraintes au point x^* . Alors il existe un vecteur de multiplicateurs $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*] \geq 0$ tel que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{Sujet à} & f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{array}$
--

Preuve. Si x^* est un point intérieur du domaine réalisable $\tilde{R}$ (i.e., $f_i(x^*) < 0$ pour tout i), il suffit de prendre $\lambda_i^* = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$.
cas si $\nabla f(x^*)$ prenait une valeur différente de 0, il suffirait direction $d = -\nabla f(x^*)$ qui serait une direction de descente de f à x^* . Ainsi, il existerait un $\tau > 0$ suffisamment petit pour que $(x^* + \tau d) \in B_\varepsilon(x^*) \cap \tilde{R}$ avec $f(x^* + \tau d) < f(x^*)$, une contradiction.

Soit $x^* \in \delta\tilde{R}$.

HYPOTHÈSE À VÉRIFIER : Supposons que nous pouvons démontrer qu'il n'existe pas de vecteur $d \in R^n$ tel que

$$\nabla f_i(x^*)^T d \leq 0 \quad i \in A(x^*) \quad (5.6)$$

$$\nabla f(x^*)^T d < 0$$

est effectivement vérifiée sous les hypothèses du théorème. En effet, pour fin de contradiction, supposons qu'un tel vecteur $\hat{d}$ existerait. Puisque $f_1, \dots, f_m$ satisfont les restrictions sur les fonctions de contraintes au point x^* , alors il existe une fonction différentiable $\alpha : [0,1] \rightarrow \tilde{R}$ telle que $\alpha(0) = x^*$ et $\alpha'(0) = \sigma \hat{d}, \sigma > 0$. Mais ainsi,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x + \theta d) - f(x)}{\theta} = \nabla f(x)^T d$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(\theta)) - f(x^*)}{\theta} = \nabla f(x^*)^T \alpha'(0) = \sigma \nabla f(x^*)^T \hat{d} < 0,$$

ce qui implique l'existence d'un $\hat{\theta} \in [0,1]$ assez petit pour que $\alpha(\hat{\theta}) \in B_\varepsilon(x^*)$ tel que $f(\alpha(\hat{\theta})) < f(x^*)$, une contradiction puisque $\alpha(\hat{\theta}) \in \tilde{R}$.

Le reste de la preuve se fait comme précédemment lorsque nous supposons que l'hypothèse était vérifiée.

Conditions K-K-T pour la programmation linéaire

Conditions K-K-T $\leftrightarrow$ résultats de dualité et d'écarts complémentaires.

Pour la programmation linéaire,

- conditions K-K-T sont suffisantes puisque les fonctions linéaires sont convexes.
- conditions K-K-T sont nécessaires parce que les fonctions linéaires satisfont toujours les restrictions sur les fonctions de contraintes.

Soit le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Soit le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ce problème s'écrit également

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à} \quad & -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & -x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Associons un multiplicateur λ_i à chacune des m premières contraintes et un multiplicateur λ_{m+j} à chacune des n dernières contraintes.

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
& \text{Sujet à} \quad - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad \lambda_i \\
& \quad \quad \quad - x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n. \quad \lambda_{m+j}
\end{aligned}$$

Associons un multiplicateur λ_i à chacune des m premières contraintes et un multiplicateur λ_{m+j} à chacune des n dernières contraintes.

Les conditions K-K-T s'écrivent comme suit:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$- x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m+n.$$

$$\text{Primal} \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Dual} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n$$

Considérons maintenant le problème dual:

Primal Min $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

Sujet à $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$
 $x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Dual Max $\sum_{i=1}^m b_i y_i$

Sujet à $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$
 $y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n$$

Le vecteur $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ est solution réalisable pour le dual: pour $j = 1, \dots, n$

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0$$

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} = \lambda_{m+j} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \leq c_j$$

De plus

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Considérons maintenant le problème dual:

$$\text{Primal} \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Dual} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n$$

Considérons maintenant le problème dual:

$$\text{Primal} \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Dual} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m+n$$

Le vecteur $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ est solution optimale pour le dual: pour $j = 1, \dots, n$

$$x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} \right) = 0$$

$$c_j x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} x_j = \lambda_{m+j} x_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} x_j$$

Considérons maintenant le problème dual:

$$\text{Primal} \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m+n$$

$$\text{Dual} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Le vecteur $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ est solution optimale pour le dual:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} x_j$$

Pour $i = 1, \dots, m$

$$\lambda_i \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0$$

$$\lambda_i b_i = \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i a_{ij} x_j$$

Considérons maintenant le problème dual:

$$\text{Primal} \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Dual} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m+n$$

Le vecteur $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ est solution optimale pour le dual:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} x_j$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i a_{ij} x_j$$

Par conséquent

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$$

et le résultat découle du théorème de dualité faible.

Considérons maintenant le problème dual:

$$\text{Primal} \quad \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{Dual} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Sujet à} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Conditions K-K-T

$$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$- \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m+n$$

Considérons maintenant le problème dual:

Primal Min $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

Sujet à $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Dual Max $\sum_{i=1}^m b_i y_i$

Sujet à $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, \dots, n$

$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$

Conditions K-K-T

$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$\lambda_i \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$

$\lambda_{m+j} (-x_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$

$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$

$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m+n$

Pour $j = 1, \dots, n$

$c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = 0$

$x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} \right) = 0$

$x_j \left(c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \right) = x_j \lambda_{m+j} = 0.$

Pour $i = 1, \dots, m$

$\lambda_i \left(-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) = 0.$