

# Dualité lagrangienne

# Problème dual lagrangien

Considérons le problème de programmation mathématique suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Primal} & \text{Min } f(x) \\ & \text{Sujet à } f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \subset R^n . \end{array}$$

**Définition.** Le problème dual lagrangien associé au problème primal relativement aux contraintes  $f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$ , s'écrit

**Dual** 
$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right\} \right\}$$

La fonction économique du dual

$$g(\lambda) = \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right\}$$

est une fonction concave sur l'ensemble  $\{\lambda \in R^m : \lambda \geq 0\}$  pour toutes fonctions  $f$  et  $f_i$ .

Soient  $A \subset R^n$  et  $B \subset R^m$ . Si  $A$  est convexe et si pour toute valeur  $b \in B$ ,  $h(a, b) : A \times B \rightarrow R^1$  est convexe sur  $A$ , démontrer que

l'ensemble  $A^* = \left\{ a \in A : l(a) = \text{Sup}_{b \in B} \{ h(a, b) \} < \infty \right\}$  est convexe

et que  $l$  est convexe sur  $A^*$ .

La **valeur optimale** du problème

$$\begin{array}{ll} \text{Primal} & \text{Min } f(x) \\ & \text{Sujet à } f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

est le infimum de la fonction  $f(x)$  sur l'ensemble  $\{x \in X : f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m\}$ .

La **valeur optimale** du problème

$$\text{Dual} \quad \text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right\} \right\}$$

est le supremum de la fonction  $g(\lambda) = \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right\}$  sur l'ensemble  $\{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda \geq 0\}$ .

Par convention, le infimum (supremum) d'une fonction sur un ensemble vide est égal à  $\infty$  ( $-\infty$ ).

## Quelques définitions

Primal	Min $f(x)$
	Sujet à $f_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m$
	$x \in X \subset \mathbb{R}^n$ .

**Définition.** Une paire  $(x^*, \lambda^*)$  de points satisfait les **conditions d'optimalité** pour le problème primal si

i)  $x^*$  est un minimum global de  $f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x)$  sur  $X$

ii) 
$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = 0$$

iii)  $f_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$

iv)  $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m.$

**Note.** Similarité avec le théorème d'optimalité basé sur les multiplicateurs de Lagrange.

**Définition.** Une paire  $(x^*, \lambda^*)$  de points satisfait les conditions d'optimalité pour le problème primal si

i)  $x^*$  est un minimum global de  $f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x)$  sur  $X$

ii)  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) = 0$

iii)  $f_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$

iv)  $\lambda_i^* \leq 0, i = 1, \dots, m.$

<b>Primal</b>	Min $f(x)$
	Sujet à $f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$
	$x \in X \subset R^n .$

**Définition.**  $\lambda^*$  est dénoté un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le primal s'il existe un  $x^*$  tel que le couple  $(x^*, \lambda^*)$  satisfait les conditions d'optimalité pour le primal.

**Définition.** La **fonction de perturbation**  $v$  associée au problème primal est définie sur  $R^m$  de la façon suivante:

$$v(y) = \text{Inf}_{x \in X} \{ f(x) : f_i(x) \leq y_i, i = 1, \dots, m \}.$$

**Primal**      Min  $f(x)$   
Sujet à  $f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$   
 $x \in X \subset R^n$  .

**Définition.** Le problème primal est **stable** si  $v(0)$  prend une valeur finie et s'il existe un scalaire  $M > 0$  tel que pour tout  $y \neq 0$

$$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq M.$$

**Définition.** Le problème primal est **stable** si  $v(0)$  prend une valeur finie et s'il existe un scalaire  $M > 0$  tel que pour tout  $y \neq 0$

$$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq M.$$

**Définition équivalente.** Le problème primal est **stable** si  $v(0)$  prend une valeur finie et si la fonction  $v$  ne décroît pas très brusquement dans aucune direction de perturbation dans le voisinage de 0; i.e., pour tout  $y \neq 0$

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta > 0}} \left[ \frac{v(0) - v(\theta y)}{\theta \|y\|} \right] < \infty.$$

**Définition.** La fonction de perturbation  $v$  associée au problème primal est définie sur  $R^m$  de la façon suivante:

$$v(y) = \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) : f_i(x) \leq y_i, i = 1, \dots, m \right\}.$$

**Propriété.** Si les fonctions  $f$  et  $f_1, \dots, f_m$  sont convexes sur  $X$  alors la fonction de perturbation  $v$  est aussi convexe sur  $R^m$ .

**Démonstration.** Il faut démontrer que pour toute paire de points  $y^1, y^2 \in R^m$ ,

$$v(\theta y^1 + (1-\theta) y^2) \leq \theta v(y^1) + (1-\theta) v(y^2).$$

Or

$$v(\theta y^1 + (1-\theta) y^2) = \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) : f_i(x) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \right\}$$

$$v(y^1) = \text{Inf}_{x^1 \in X} \left\{ f(x^1) : f_i(x^1) \leq y_i^1, i = 1, \dots, m \right\}$$

$$v(y^2) = \text{Inf}_{x^2 \in X} \left\{ f(x^2) : f_i(x^2) \leq y_i^2, i = 1, \dots, m \right\}$$

$$\begin{aligned}
v(\theta y^1 + (1-\theta) y^2) &= \mathop{\text{Inf}}_{x \in X} \left\{ f(x) : f_i(x) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \right\} \\
&= \mathop{\text{Inf}}_{x^1, x^2 \in X} \left\{ \begin{array}{l} f(\theta x^1 + (1-\theta) x^2) : \\ f_i(\theta x^1 + (1-\theta) x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \end{array} \right\} \\
&\leq \mathop{\text{Inf}}_{x^1, x^2 \in X} \left\{ \begin{array}{l} \theta f(x^1) + (1-\theta) f(x^2) : \\ f_i(\theta x^1 + (1-\theta) x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \end{array} \right\} \\
&\hspace{15em} (\text{puisque } f \text{ est convexe sur } X) \\
&\leq \mathop{\text{Inf}}_{x^1, x^2 \in X} \left\{ \begin{array}{l} \theta f(x^1) + (1-\theta) f(x^2) : \\ \theta f_i(x^1) + (1-\theta) f_i(x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(puisque  $f_i$  est convexe sur  $X$ , alors

$$f_i(\theta x^1 + (1-\theta) x^2) \leq \theta f_i(x^1) + (1-\theta) f_i(x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2$$

$$v(\theta y^1 + (1-\theta) y^2) = \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) : f_i(x) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \right\}$$

$$\leq \text{Inf}_{x^1, x^2 \in X} \left\{ \begin{array}{l} \theta f(x^1) + (1-\theta) f(x^2) : \\ \theta f_i(x^1) + (1-\theta) f_i(x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

puisque  $f_i$  est convexe sur  $X$ , alors

$$f_i(\theta x^1 + (1-\theta) x^2) \leq \theta f_i(x^1) + (1-\theta) f_i(x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2$$

$$\leq \text{Inf}_{x^1, x^2 \in X} \left\{ \begin{array}{l} \theta f(x^1) + (1-\theta) f(x^2) : \\ f_i(x^1) \leq y_i^1 \text{ et } f_i(x^2) \leq y_i^2, i = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

puisque pour  $i = 1, \dots, m$

$$\left\{ x^1, x^2 \in X : f_i(x^1) \leq y_i^1 \text{ et } f_i(x^2) \leq y_i^2 \right\} \subset$$

$$\left\{ x^1, x^2 \in X : \theta f_i(x^1) + (1-\theta) f_i(x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
v(\theta y^1 + (1-\theta) y^2) &= \text{Inf}_{x \in X} \left\{ f(x) : f_i(x) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2, i = 1, \dots, m \right\} \\
&\leq \text{Inf}_{x^1, x^2 \in X} \left\{ \begin{array}{l} \theta f(x^1) + (1-\theta) f(x^2) : \\ f_i(x^1) \leq y_i^1 \text{ et } f_i(x^2) \leq y_i^2, i = 1, \dots, m \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

puisque pour  $i = 1, \dots, m$

$$\left\{ x^1, x^2 \in X : f_i(x^1) \leq y_i^1 \text{ et } f_i(x^2) \leq y_i^2 \right\} \subset$$

$$\left\{ x^1, x^2 \in X : \theta f_i(x^1) + (1-\theta) f_i(x^2) \leq \theta y_i^1 + (1-\theta) y_i^2 \right\}$$

$$\leq \theta \text{Inf}_{x^1 \in X} \left\{ f(x^1) : f_i(x^1) \leq y_i^1, i = 1, \dots, m \right\} +$$

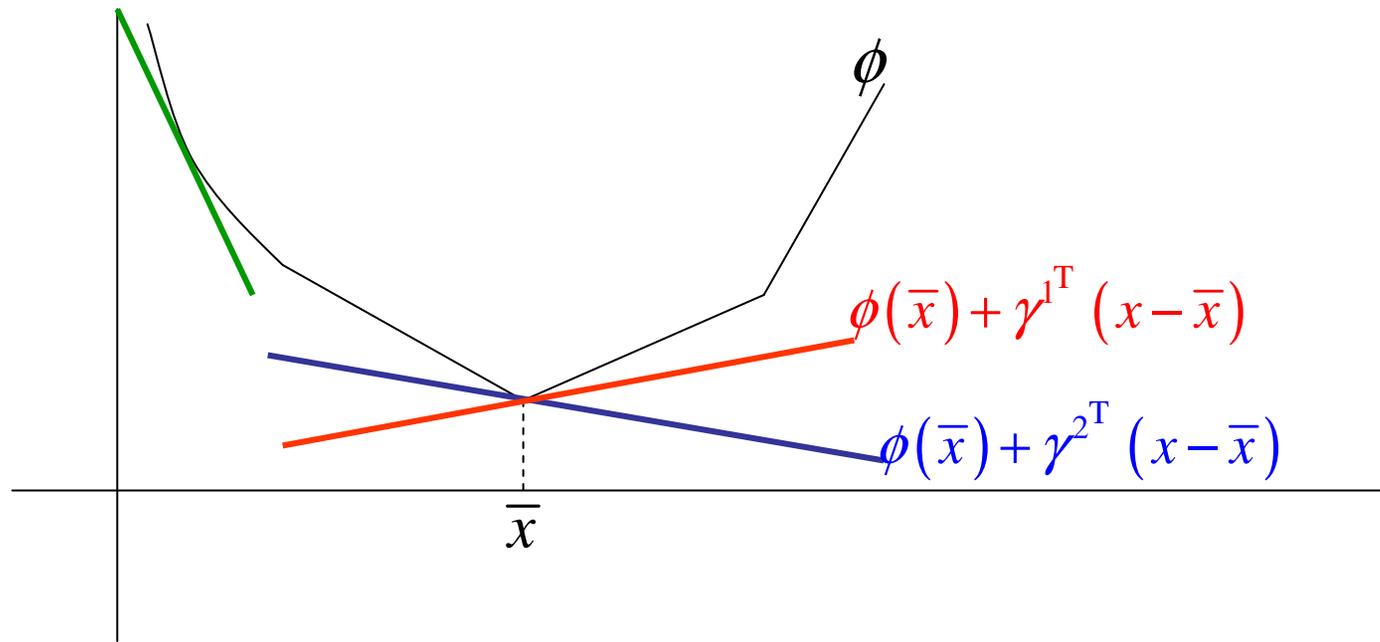
$$(1-\theta) \text{Inf}_{x^2 \in X} \left\{ f(x^2) : f_i(x^2) \leq y_i^2, i = 1, \dots, m \right\}$$

$$= \theta v(y^1) + (1-\theta) v(y^2)$$

□

**Définition:** Soient une fonction convexe  $\phi: X \rightarrow R^1$  où  $X \subset R^n$  et un point  $\bar{x} \in X$  où  $f$  prend une valeur finie. Un vecteur  $\gamma \in R^n$  est un **sous-gradient** de  $\phi$  à  $\bar{x}$  si pour tout  $x \in X$

$$\phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + \gamma^T (x - \bar{x})$$



**Remarque:** Aux points  $\bar{x} \in X$  où  $\phi$  est différentiable, le gradient est l'unique sous-gradient et par conséquent l'unique élément de  $\partial\phi(\bar{x})$ .

## Théorèmes de dualité

Pour le premier théorème de dualité faible, nous n'avons pas besoin d'hypothèses particulières sur  $X$ , ni sur les fonctions  $f$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$ .

**Théorème de dualité faible.** Si  $\bar{x}$  est une solution réalisable du primal et  $\bar{\lambda}$  une solution réalisable du dual, alors  $f(\bar{x}) \geq g(\bar{\lambda})$ .

**Preuve.** Considérons la quantité  $f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x})$ .

D'une part,

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$$

puisque  $f_i(\bar{x}) \leq 0$  et  $\bar{\lambda}_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ .

**Théorème de dualité faible.** Si  $\bar{x}$  est une solution réalisable du primal et  $\bar{\lambda}$  une solution réalisable du dual, alors  $f(\bar{x}) \geq g(\bar{\lambda})$ .

**Preuve.** Considérons la quantité  $f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x})$ .

D'une part,

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$$

puisque  $f_i(\bar{x}) \leq 0$  et  $\bar{\lambda}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

D'autre part,

$$g(\bar{\lambda}) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(x) \right\} \leq f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x})$$

puisque  $\bar{x} \in X$ .

Donc

$$g(\bar{\lambda}) = \inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(x) \right\} \leq f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x}). \quad \square$$

Pour les prochains théorèmes nous avons besoin de l'hypothèse de convexité des fonctions  $f$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$ , sur  $X$  convexe.

**Théorème.** Supposons que le problème primal possède une solution optimale, que  $X$  est convexe et que  $f$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$ , sont convexes. Alors

- i) il existe un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le primal si et seulement si le problème primal est stable;
- ii)  $\lambda$  est un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le problème primal si et seulement si  $-\lambda$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  au point  $y = 0$ .

**Remarques.** Dans i), la stabilité joue un rôle quelque peu similaire à celui des restrictions sur les fonctions de contraintes dans les conditions d'optimalité de KKT

i) il existe un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le primal si et seulement si le problème primal est stable;

**Remarques.** Dans i), la stabilité joue un rôle quelque peu similaire à celui des restrictions sur les fonctions de contraintes dans les conditions d'optimalité de KKT

Mais la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de multiplicateurs optimaux du primal alors que les restrictions sur les fonctions de contraintes ne sont que suffisantes pour les conditions d'optimalité de KKT.

Les restrictions sur les fonctions de contraintes ne font pas intervenir directement la fonction économique alors que la stabilité est définie à partir de la fonction de perturbation  $v$  qui fait intervenir directement la fonction économique.

i) il existe un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le primal si et seulement si le problème primal est stable;

### Remarques.

Certains problèmes sont stables même si les restrictions sur les fonctions de contraintes ne sont pas satisfaites. C'est le cas pour les problèmes où la fonction économique est constante.

De même, certains problèmes sont instables même si les restrictions sur les fonctions de contraintes sont satisfaites. Par exemple, dans le problème suivant

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) = -\sqrt{x} \\ \text{Sujet à} \quad & f_1(x) = x \leq 0 \\ & x \in X = \{x \in \mathbb{R}^1 : x \geq 0\}, \end{aligned}$$

les contraintes étant linéaires, les restrictions sur les fonctions de contraintes sont satisfaites. Mais le problème est instable puisque

$$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} = \frac{0 - (-\sqrt{y})}{\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

tend vers  $\infty$  lorsque  $y > 0$  est suffisamment près de 0.

**Théorème.** Supposons que le problème primal possède une solution optimale, que  $X$  est convexe et que  $f$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$ , sont convexes.

Alors

- i) il existe un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le primal si et seulement si le problème primal est stable;
- ii)  $\lambda$  est un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le problème primal si et seulement si  $-\lambda$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  au point  $y = 0$ .

ii) et analyse de sensibilité.

Soit  $\lambda^*$  un vecteur de multiplicateurs optimaux. Considérons le problème perturbé

$$(1) \quad v(\theta y) = \text{Min} \quad f(x) \\ \text{Sujet à} \quad f_i(x) \leq \theta y_i \quad i = 1, \dots, m \\ x \in X.$$

ii)  $\lambda$  est un vecteur de multiplicateurs optimaux pour le problème primal si et seulement si  $-\lambda$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  au point  $y = 0$ .

ii) et analyse de sensibilité.

Soit  $\lambda^*$  un vecteur de multiplicateurs optimaux. Considérons le problème perturbé

$$(1) \quad v(\theta y) = \text{Min} \quad f(x) \\ \text{Sujet à} \quad f_i(x) \leq \theta y_i \quad i = 1, \dots, m \\ x \in X.$$

Puisqu'alors  $-\lambda^*$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  à 0, il s'ensuit que

$$v(\theta y) \geq v(0) + (-\lambda^*)^T (\theta y - 0) = v(0) - \theta \lambda^{*T} y.$$

Ainsi,  $v(0) - \theta \lambda^{*T} y$  est une borne inférieure sur la valeur optimal du problème (1).

ii) et analyse de sensibilité.

$$(1) \quad v(\theta y) = \text{Min} \quad f(x)$$
$$\text{Sujet à } f_i(x) \leq \theta y_i \quad i = 1, \dots, m$$
$$x \in X.$$

Puisqu'alors  $-\lambda^*$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  à 0, il s'ensuit que

$$v(\theta y) \geq v(0) + (-\lambda^*)^T (\theta y - 0) = v(0) - \theta \lambda^{*\text{T}} y.$$

Également, si  $\theta > 0$ , alors

$$\frac{v(\theta y) - v(0)}{\theta} \geq -\lambda^{*\text{T}} y = \sum_{i=1}^m -\lambda_i^* y_i$$

et ainsi  $-\lambda^{*\text{T}} y$  est une borne inférieure sur la dérivée à droite de  $v(\theta y)$  à  $\theta = 0$ ; i.e.,

$$\frac{\partial^+ v(\theta y)}{\partial \theta} = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta > 0}} \frac{v(\theta y) - v(0)}{\theta} \geq -\lambda^{*\text{T}} y = \sum_{i=1}^m -\lambda_i^* y_i$$

## ii) et analyse de sensibilité.

$$(1) \quad v(\theta y) = \text{Min} \quad f(x)$$
$$\text{Sujet à } f_i(x) \leq \theta y_i \quad i = 1, \dots, m$$
$$x \in X.$$

Puisqu'alors  $-\lambda^*$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  à 0, il s'ensuit que

$$v(\theta y) \geq v(0) + (-\lambda^*)^T (\theta y - 0) = v(0) - \theta \lambda^{*\text{T}} y.$$

Également, si  $\theta > 0$ , alors

$$\frac{\partial^+ v(\theta y)}{\partial \theta} = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \theta > 0}} \frac{v(\theta y) - v(0)}{\theta} \geq -\lambda^{*\text{T}} y = \sum_{i=1}^m -\lambda_i^* y_i$$

Ainsi,  $-\lambda_i^*$  est une borne inférieure sur le taux marginal de variation de la valeur optimal du primal relativement à une augmentation de la valeur du terme de droite de la  $i^{\text{ième}}$  contrainte.

**Théorème de dualité forte.** Si le problème primal est stable,  $X$  est convexe et  $f$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$ , sont convexes sur  $X$ , alors

- i) le problème dual possède une solution optimale;
- ii) la valeur optimale du problème primal est égale à celle du problème dual;
- iii)  $\lambda^*$  est une solution optimale du problème dual si et seulement si  $-\lambda^*$  est un sous-gradient de la fonction de perturbation  $v$  du problème primal à  $y = 0$ ;
- iv) si  $\lambda^*$  est une solution optimale du problème dual, alors  $x^*$  est une solution optimale du problème primal si et seulement si  $(x^*, \lambda^*)$  satisfait les conditions d'optimalité.

## Interprétation géométrique

Considérons le problème primal suivant comportant une seule variable et une seule contrainte pour faciliter la présentation

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x) \\ & \text{Sujet à } f_1(x) \leq 0 \\ & \quad x \in R^1. \end{aligned}$$

Primal    Min  $f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

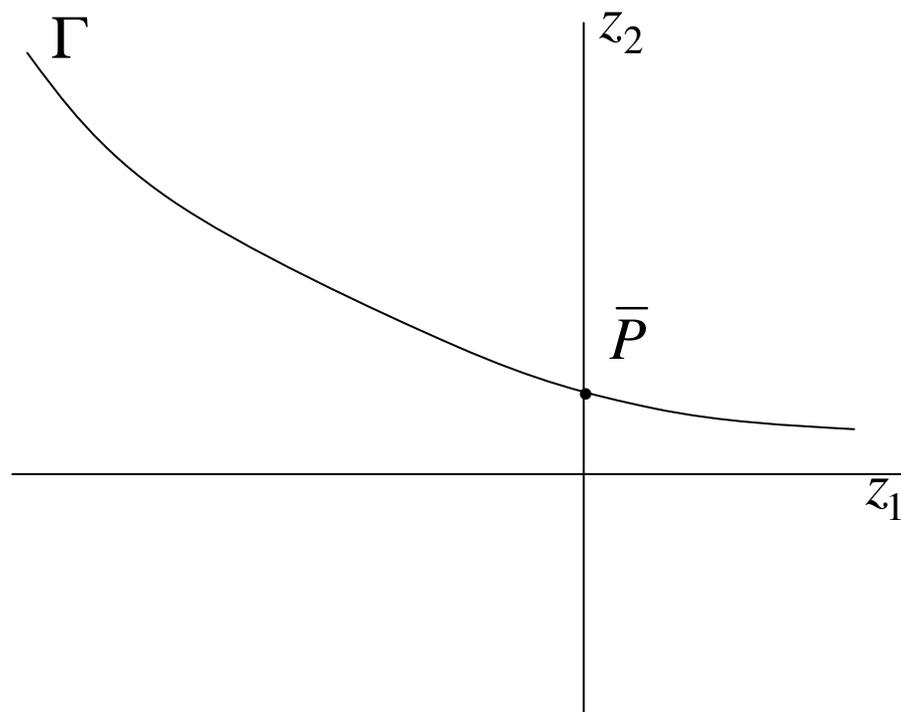
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Pour résoudre le problème primal, il suffit de trouver le point de  $\Gamma$  qui minimise la composante  $z_2$  sujet à la contrainte que  $z_1 \leq 0$ .

Sur la figure, le point

$$\bar{P} = (f_1(\bar{x}), f(\bar{x}))$$

à l'intersection de la courbe  $\Gamma$  et de l'axe des  $z_2$  est associé à la solution optimale  $\bar{x}$ .

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

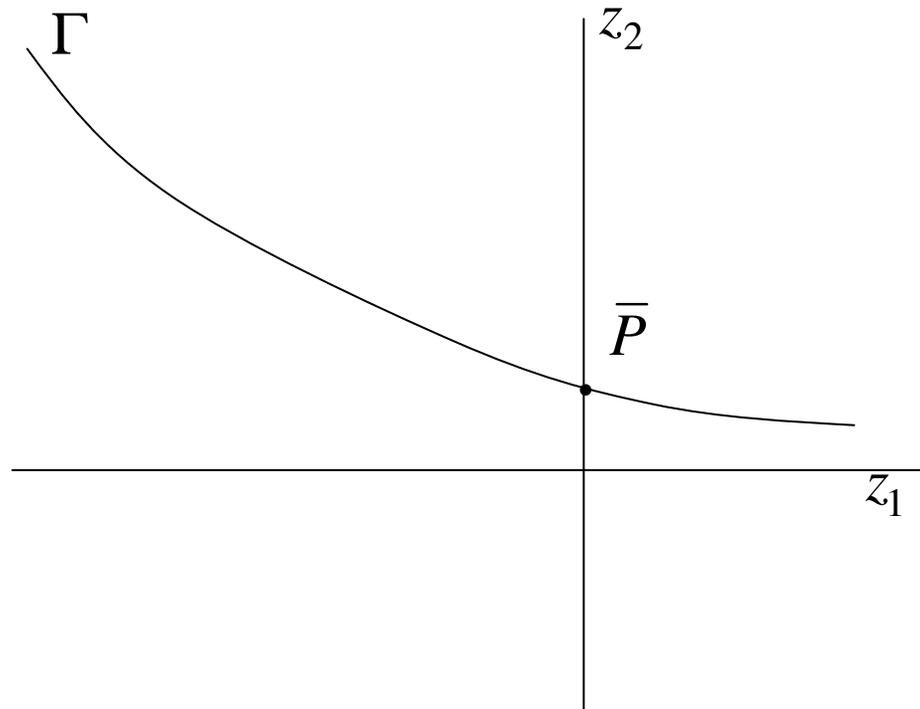
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Pour résoudre le problème dual, nous le formulons en termes des variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \} \right\}.$$

Considérons la minimisation interne

$$\text{Min}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \}.$$

Mais  $z_2 + \lambda z_1$  est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la droite de pente  $-\lambda$ .

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

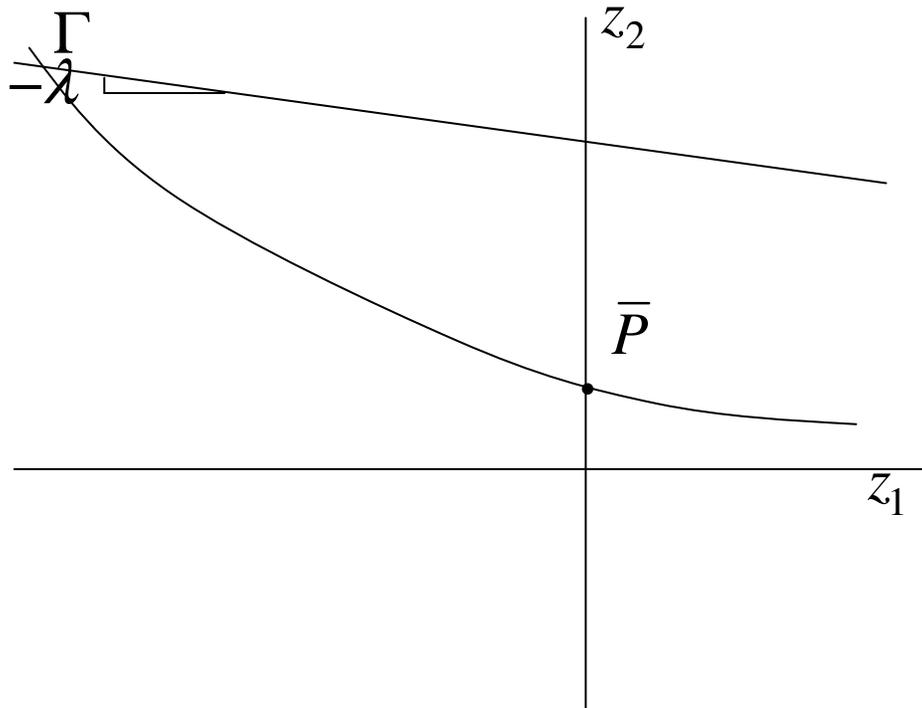
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Considérons la minimisation interne

$$\text{Min}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \}.$$

Mais  $z_2 + \lambda z_1$  est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la droite de pente  $-\lambda$ .

Pour résoudre le problème de minimisation interne, il suffit de déterminer la droite de pente  $-\lambda$  ayant la plus petite ordonnée à l'origine et ayant une intersection avec l'ensemble  $\Gamma$ .

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

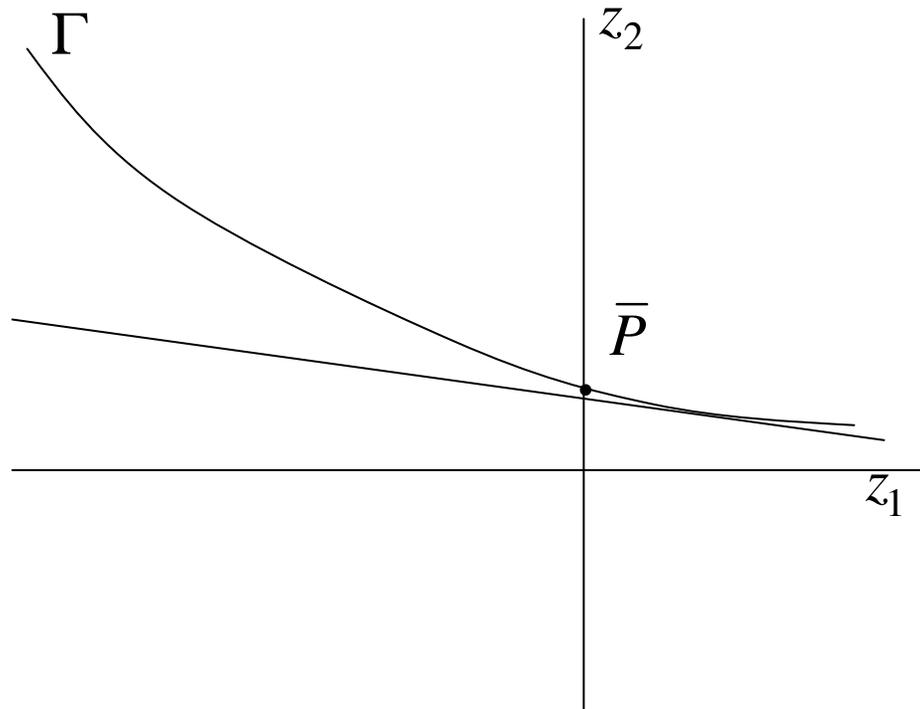
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \right\}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Considérons la minimisation interne

$$\text{Min}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \}.$$

Mais  $z_2 + \lambda z_1$  est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la droite de pente  $-\lambda$ .

Pour résoudre le problème de minimisation interne, il suffit de déterminer la droite de pente  $-\lambda$  ayant la plus petite ordonnée à l'origine et ayant une intersection avec l'ensemble  $\Gamma$ .

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

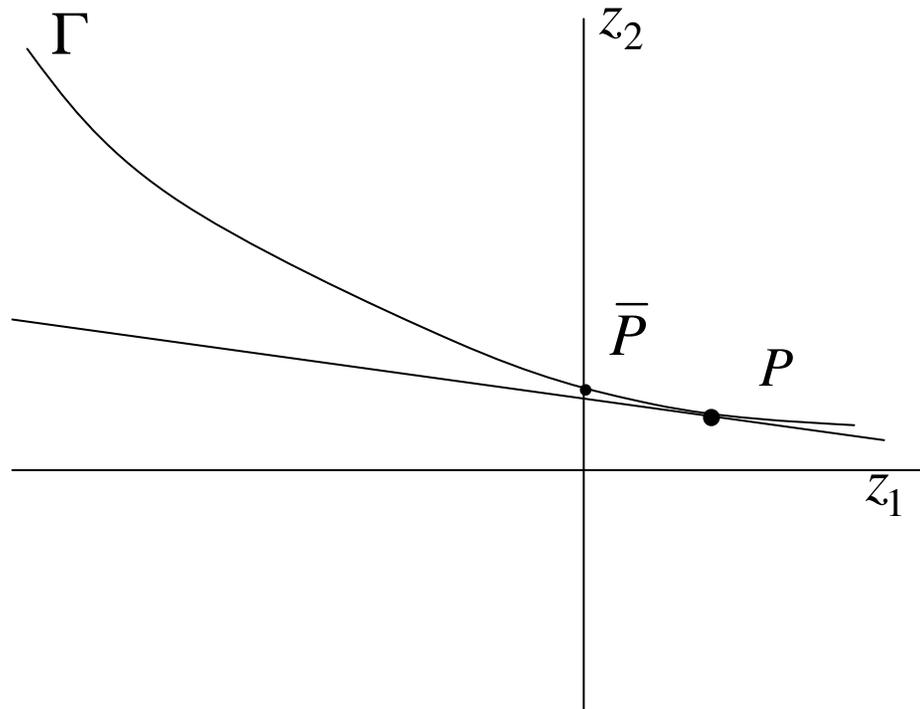
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \right\}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Considérons la minimisation interne

$$\text{Min}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \}.$$

Mais  $z_2 + \lambda z_1$  est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la droite de pente  $-\lambda$ .

Pour résoudre le problème de minimisation interne, il suffit de déterminer la droite de pente  $-\lambda$  ayant la plus petite ordonnée à l'origine et ayant une intersection avec l'ensemble  $\Gamma$ .

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

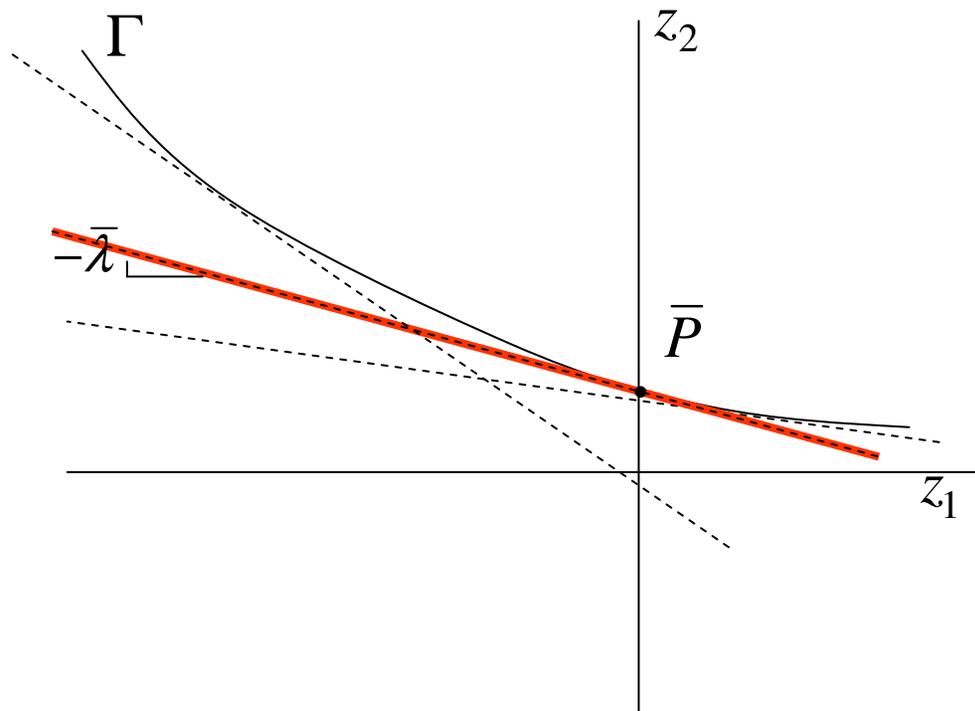
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Pour résoudre le problème dual, formulé en termes des variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \} \right\},$$

il suffit de déterminer la valeur  $\bar{\lambda}$  de  $\lambda \geq 0$  correspondant au négatif de la pente de la droite tangente à  $\Gamma$  ayant le plus grand ordonné à l'origine.

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

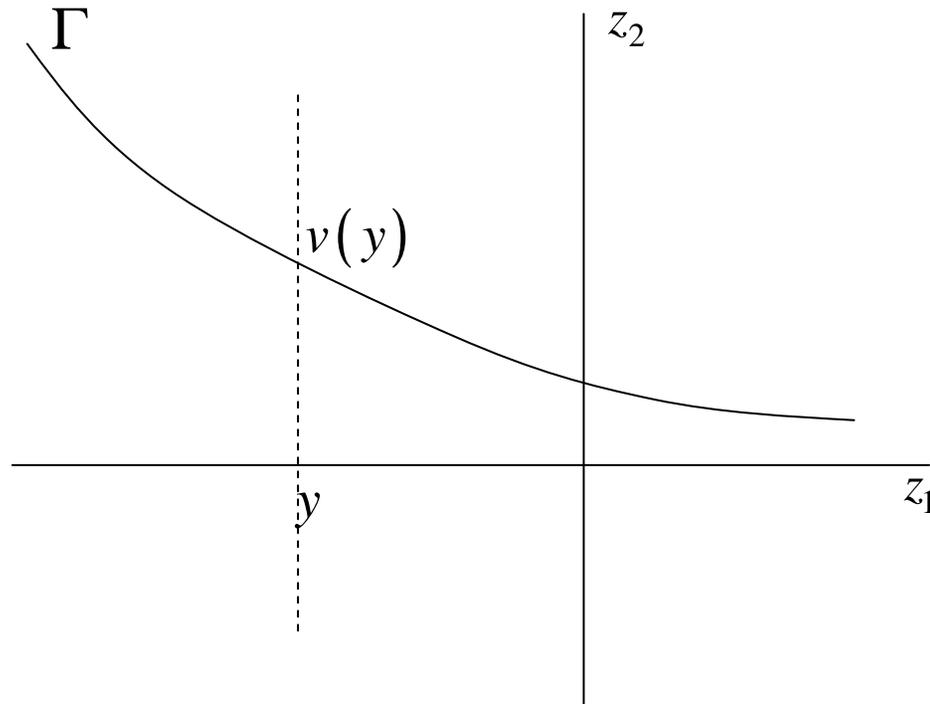
$x \in R^1.$

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



La fonction de perturbation  $v(y)$  est définie

$$v(y) = \text{Min } f(x)$$

Sujet à  $f_1(x) \leq y$

$x \in R^1$

et en termes de  $z_1$  et  $z_2$

$$v(y) = \text{Min } z_2$$

Sujet à  $z_1 \leq y$

$(z_1, z_2) \in \Gamma.$

Donc dans cet exemple,  $v(y)$  et  $\Gamma$  sont identiques.

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

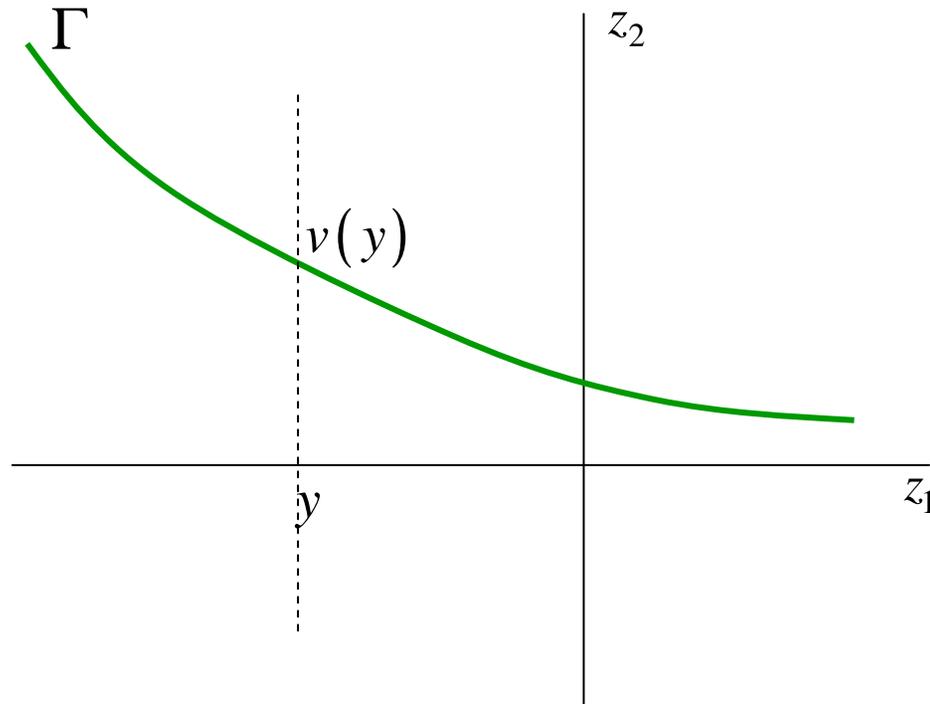
$x \in R^1.$

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



La fonction de perturbation  $v(y)$  est définie

$$v(y) = \text{Min } f(x)$$

Sujet à  $f_1(x) \leq y$

$x \in R^1$

et en termes de  $z_1$  et  $z_2$

$$v(y) = \text{Min } z_2$$

Sujet à  $z_1 \leq y$

$(z_1, z_2) \in \Gamma.$

Donc dans cet exemple,  $v(y)$  et  $\Gamma$  sont identiques.

Primal    Min  $f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

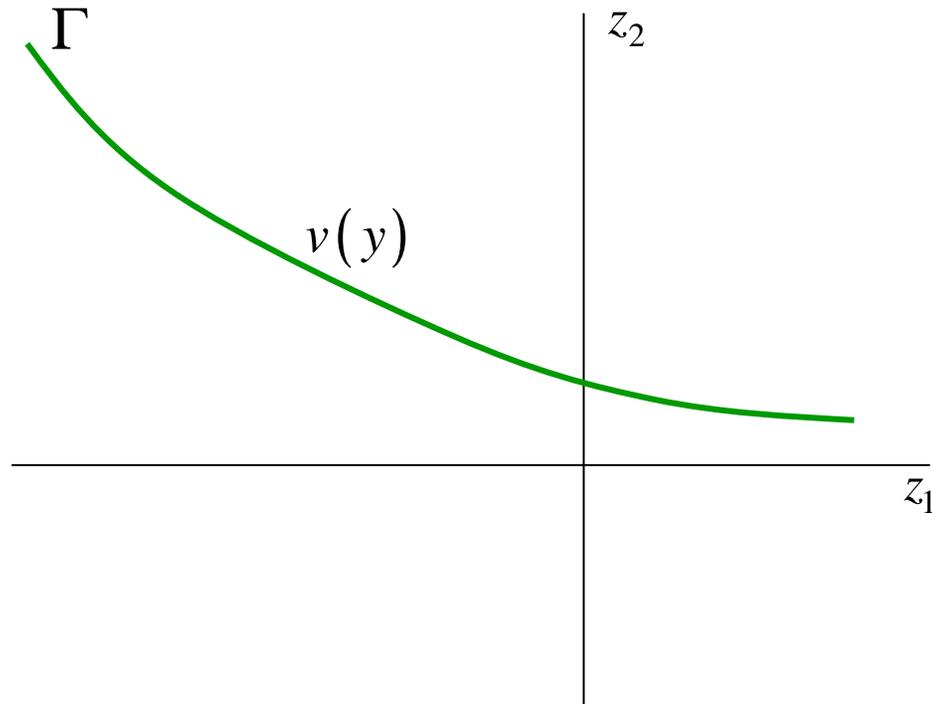
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Le problème est stable puisque la valeur de  $v(y)$  ne décroît pas très brusquement lorsque  $y$  s'éloigne de 0.

Primal    Min  $f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

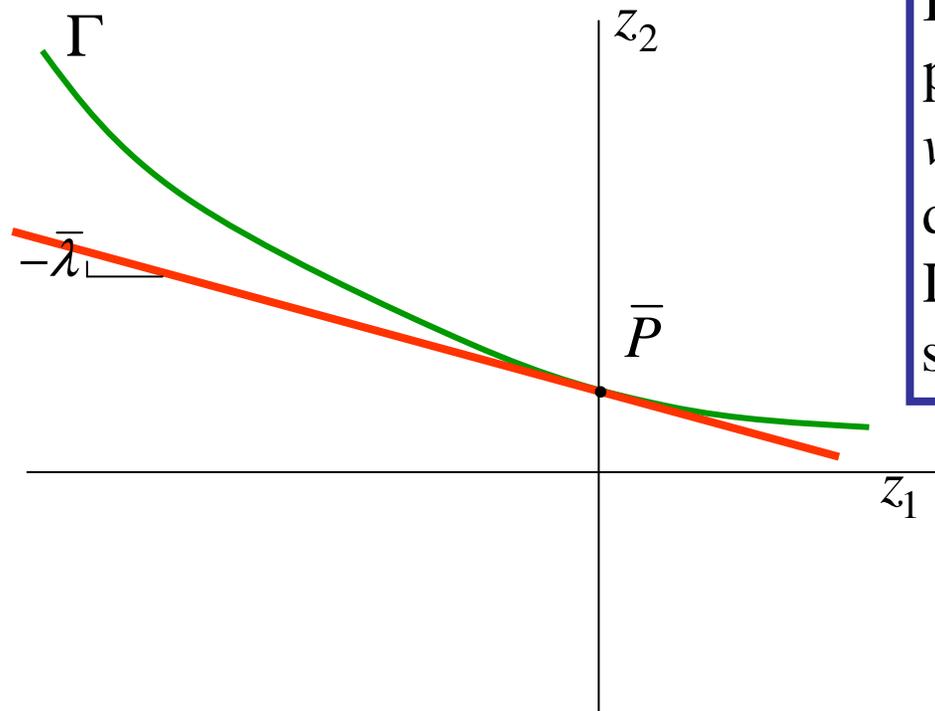
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Il est facile de voir que  $-\bar{\lambda}$ , la pente de la tangente à  $\Gamma$  (i.e., à  $v$ ) au point  $\bar{P}$  est un sous-gradient de  $v$  à 0. Le théorème de dualité forte s'applique.

Primal    Min  $f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

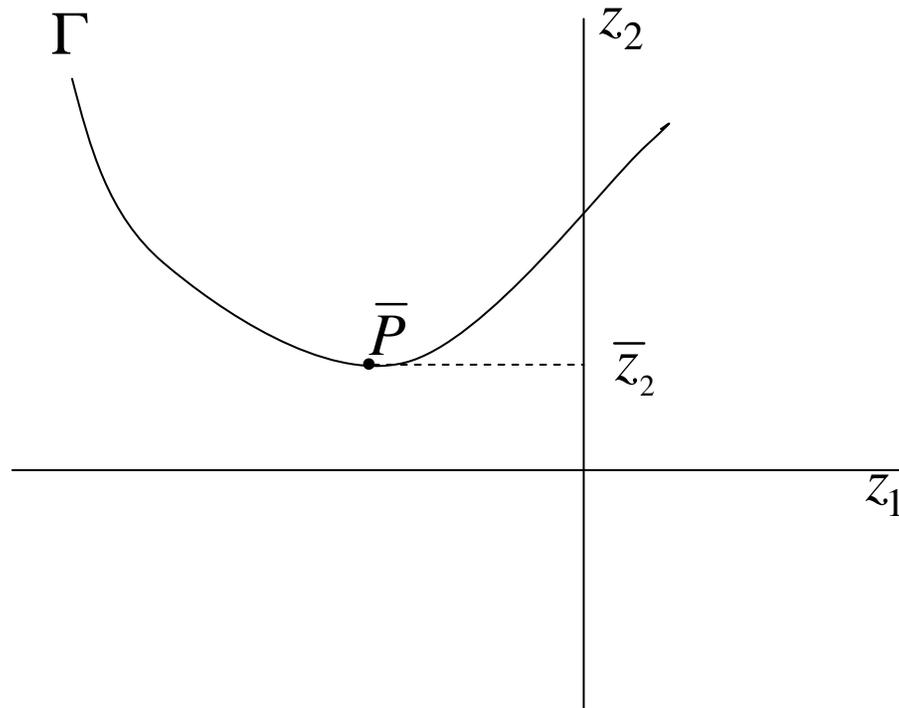
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Pour résoudre le problème primal, il suffit de trouver le point de  $\Gamma$  qui minimise la composante  $z_2$  sujet à la contrainte que  $z_1 \leq 0$ .

Sur la figure, le point

$$\bar{P} = (f_1(\bar{x}), f(\bar{x}))$$

est tel que  $\bar{z}_1 = f_1(\bar{x}) < 0$

et la valeur optimale  $\bar{z}_2 = f(\bar{x})$

est indiquée sur l'axe des  $z_2$ .

Primal     $\text{Min } f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

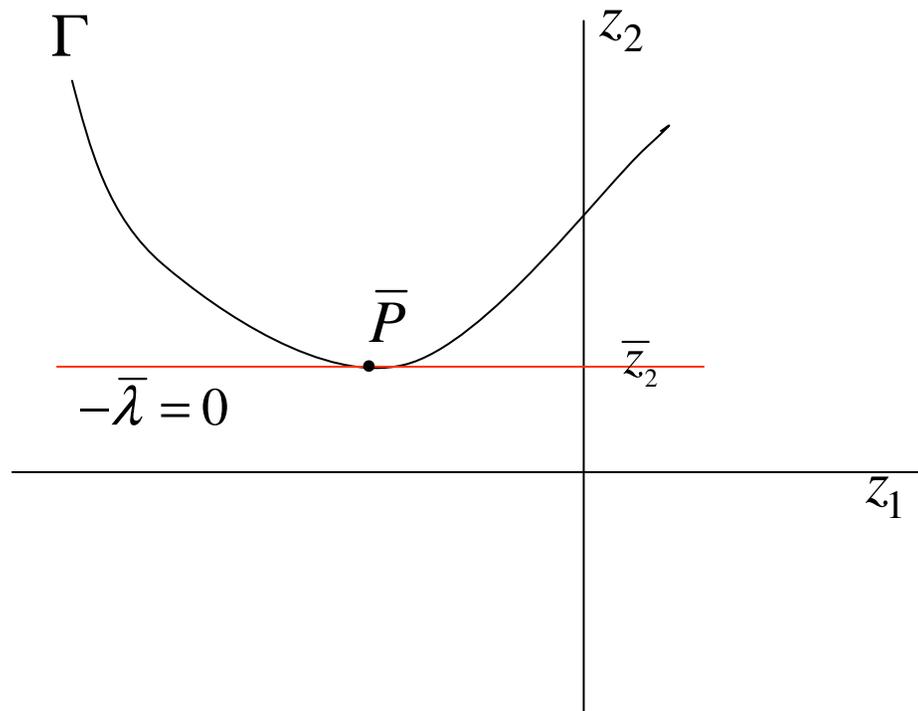
$x \in R^1.$

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



Pour résoudre le problème dual, formulé en termes des variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \} \right\},$$

il suffit de déterminer la valeur  $\bar{\lambda}$  de  $\lambda \geq 0$  correspondant au négatif de la pente de la droite tangente à  $\Gamma$  ayant le plus grand ordonné à l'origine.

Primal    Min  $f(x)$

Sujet à  $f_1(x) \leq 0$

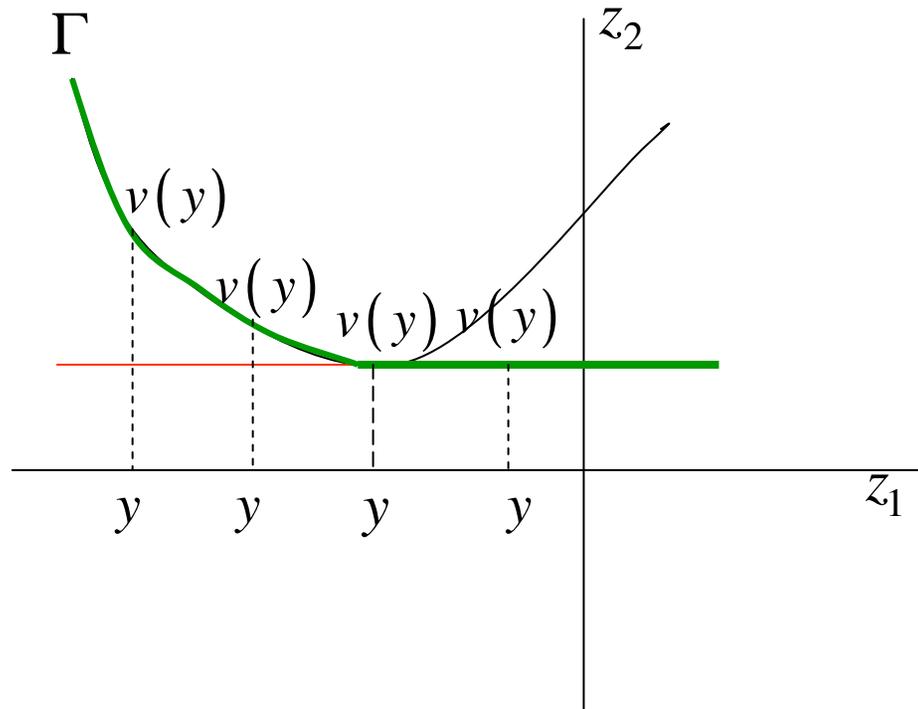
$x \in R^1$ .

Dual

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{x \in R^1} \{ f(x) + \lambda f_1(x) \} \right\}$$

$$\Gamma = \{ (z_1, z_2) \in R^2 : \text{il existe un } x \in R^1 \text{ tel que } z_1 = f_1(x), z_2 = f(x) \}$$

Illustration de  $\Gamma$  dans la figure suivante:



La fonction de perturbation  $v(y)$   
est définie

$$v(y) = \text{Min } f(x)$$

Sujet à  $f_1(x) \leq y$

$$x \in R^1$$

et en termes de  $z_1$  et  $z_2$

$$v(y) = \text{Min } z_2$$

Sujet à  $z_1 \leq y$

$$(z_1, z_2) \in \Gamma.$$

## Le saut de dualité

Pour illustrer le saut de dualité nous utilisons le problème de programmation linéaire mixte suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{array}$$

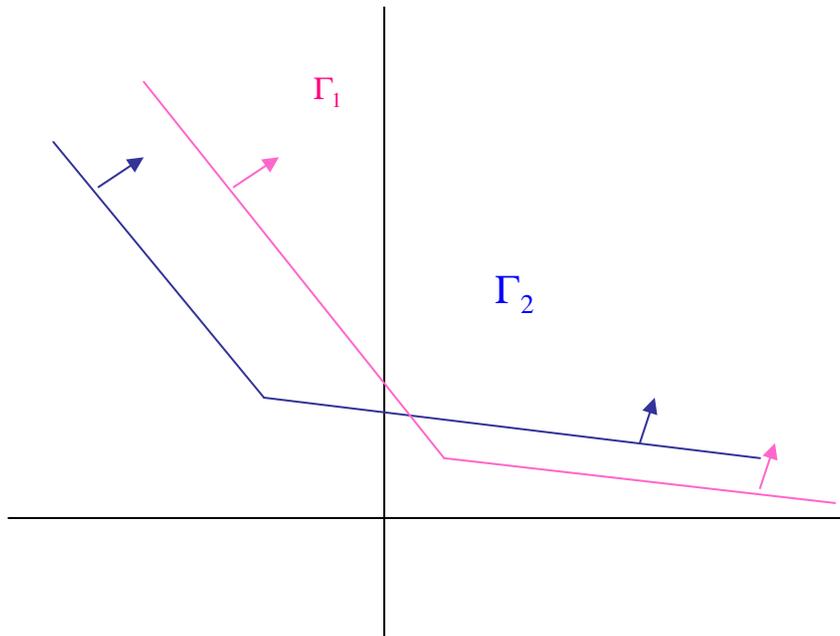
Associons à ce problème les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

Associons à ce problème les ensembles suivants:

en fixant  $x_3 = 1$

$$\Gamma_1 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3 \right\}$$



$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{array}$$

Associons à ce problème les ensembles suivants:

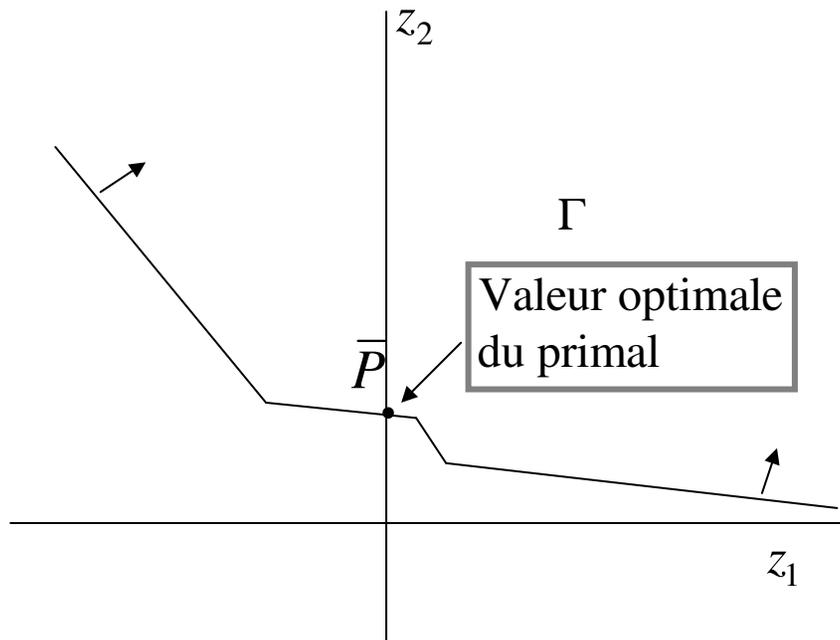
en fixant  $x_3 = 1$

$$\Gamma_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3\}$$

en fixant  $x_3 = 0$

$$\Gamma_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



Pour résoudre le problème primal, il suffit de trouver le point de  $\Gamma$  qui minimise la composante  $z_2$  sujet à la contrainte que  $z_1 \leq 0$ .

Sur la figure, le point est noté  $\bar{P} = (f_1(\bar{x}), f(\bar{x}))$ .

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

Associés à ce problème les ensembles suivants:

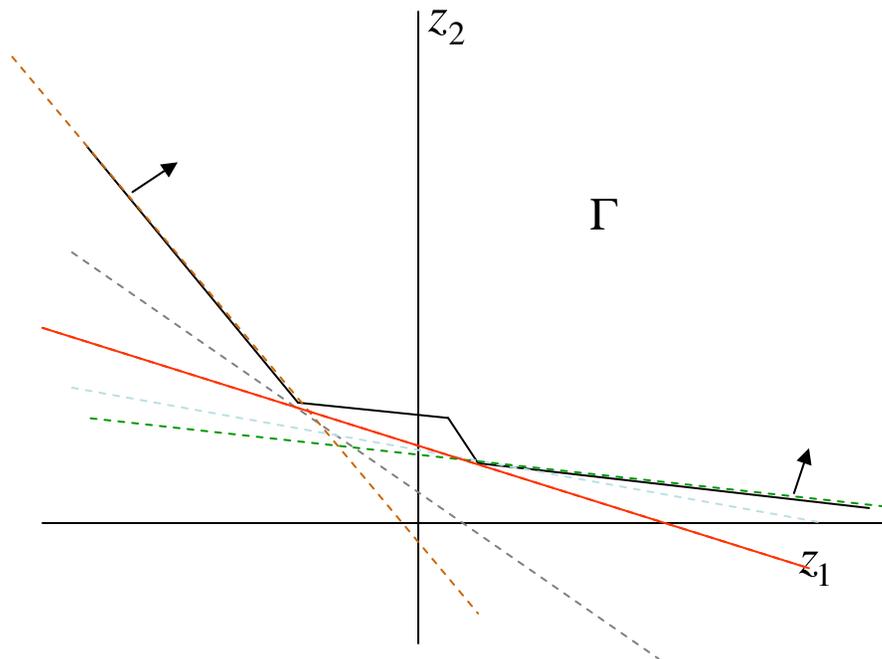
en fixant  $x_3 = 1$

$$\Gamma_1 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3 \right\}$$

en fixant  $x_3 = 0$

$$\Gamma_2 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 \right\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



Pour résoudre le problème dual, formulé en termes des variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{ z_2 + \lambda z_1 \} \right\},$$

il suffit de déterminer la valeur  $\bar{\lambda}$  de  $\lambda \geq 0$  correspondant au négatif de la pente de la droite tangente à  $\Gamma$  ayant le plus grand ordonné à l'origine.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

Associés à ce problème les ensembles suivants:

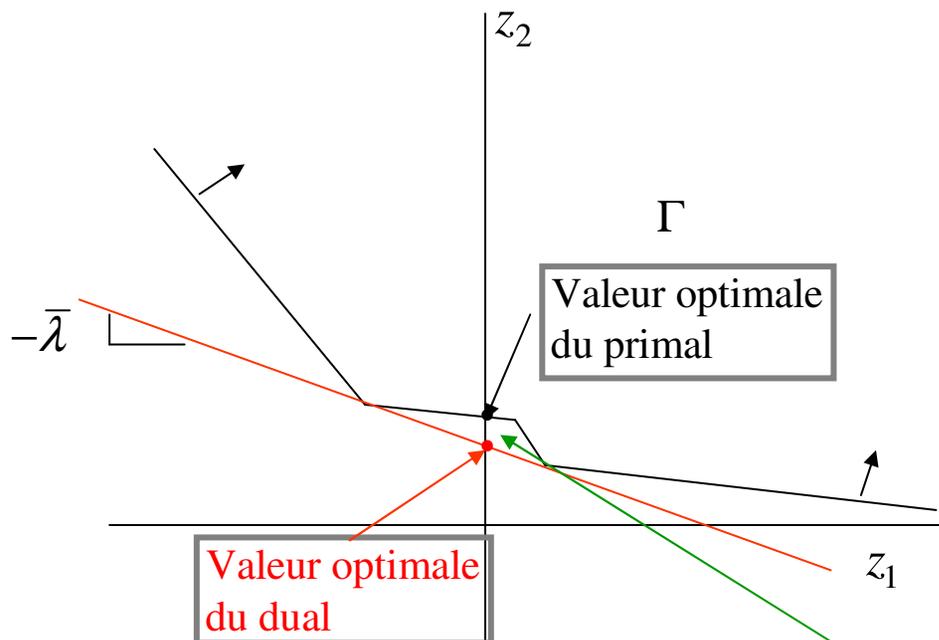
en fixant  $x_3 = 1$

$$\Gamma_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3\}$$

en fixant  $x_3 = 0$

$$\Gamma_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



Pour résoudre le problème dual, formulé en termes des variables  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\text{Max}_{\lambda \geq 0} \left\{ \text{Inf}_{(z_1, z_2) \in \Gamma} \{z_2 + \lambda z_1\} \right\},$$

il suffit de déterminer la valeur  $\bar{\lambda}$  de  $\lambda \geq 0$  correspondant au négatif de la pente de la droite tangente à  $\Gamma$  ayant le plus grand ordonné à l'origine.

Il y a donc saut de dualité.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

Associés à ce problème les ensembles suivants:

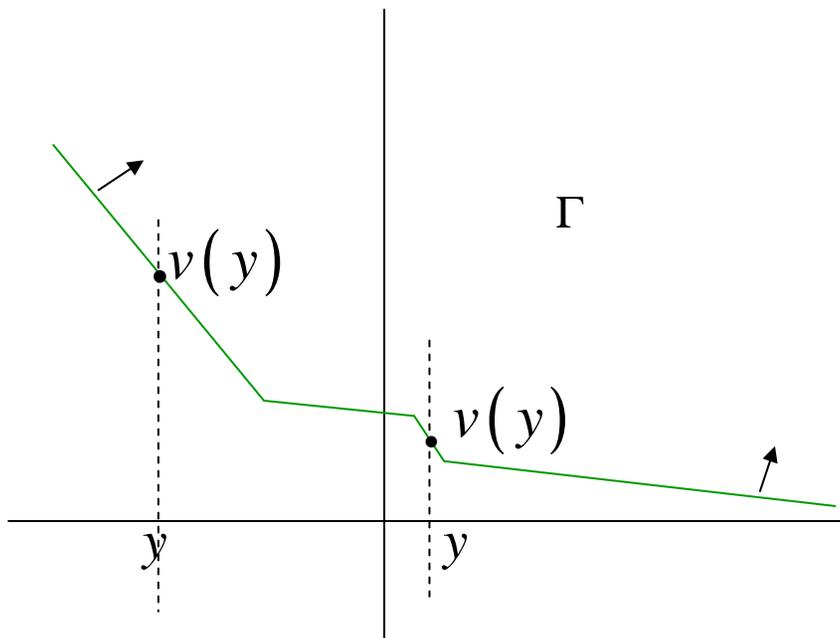
en fixant  $x_3 = 1$

$$\Gamma_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3\}$$

en fixant  $x_3 = 0$

$$\Gamma_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



La fonction de perturbation  $v(y)$  est définie

$$\begin{aligned} v(y) = \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{Sujet à} \quad & f_1(x) \leq y \\ & x \in \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

et en termes de  $z_1$  et  $z_2$

$$\begin{aligned} v(y) = \text{Min} \quad & z_2 \\ \text{Sujet à} \quad & z_1 \leq y \\ & (z_1, z_2) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Donc dans cet exemple,  $v(y)$  est indiquée en vert.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{Sujet à} \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b \equiv b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

Associions à ce problème les ensembles suivants:

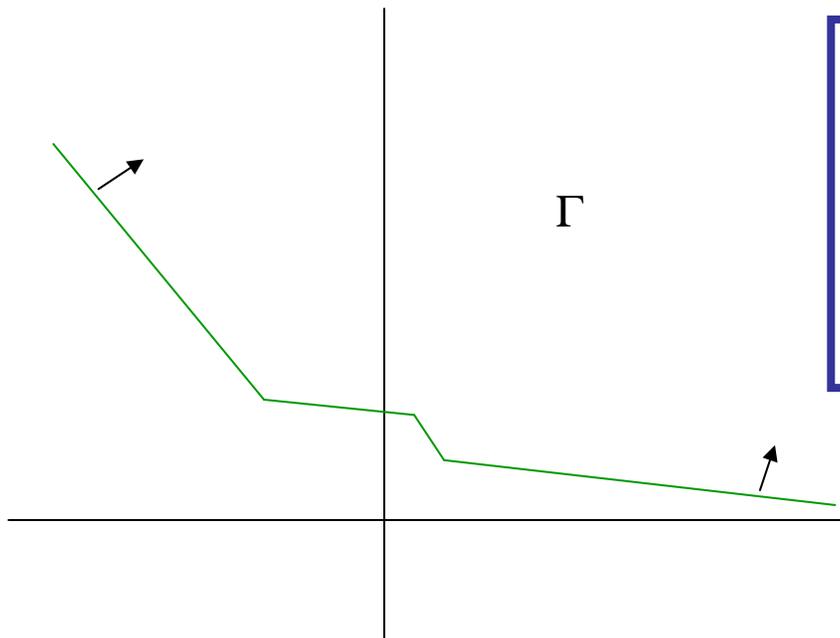
en fixant  $x_3 = 1$

$$\Gamma_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3\}$$

en fixant  $x_3 = 0$

$$\Gamma_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{il existe } x_1, x_2 \geq 0 \text{ tel que } z_2 = c_1x_1 + c_2x_2 \text{ et } z_1 = b - a_1x_1 - a_2x_2\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



La fonction de perturbation n'est pas convexe. Ceci vient du fait que les hypothèses de convexité pour le problème primal ne sont pas vérifiées.

## Reference:

A.M. Geoffrion, 'Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications-Oriented Development,' *SIAM Review* 13, 1971, 1 – 37.