

IFT2105—Introduction à l’informatique théorique

Automne 2014, (Devoir #1)

Louis Salvail

Université de Montréal (DIRO), QC, Canada
salvail@iro.umontreal.ca
Bureau: Pavillon André-Aisenstadt, #3369

1 Remise

Il s’agit du premier devoir pour le cours. La date de remise est:

Mardi, 26 septembre 2017, 10:30 (à la séance de démo).

Vous pouvez faire votre devoir par équipe de deux. Aucun retard ne sera toléré. Vous devez remettre votre devoir sur papier (pas de fichier).

2 Questions

1. Donnez les programmes **RÉPÉTER** qui permettent de calculer les opérations suivantes sur des ensembles de nombres entiers. Vous pouvez utiliser n’importe quelles macros introduites au cours. Avant de donner votre code, expliquez comment vous représentez un ensemble d’entiers naturels dans un seul registre. Ensuite, donnez un programme **RÉPÉTER** pour chacune des macros suivantes. Vous pouvez utiliser celles que nous avons vues en cours.
 - Vide**: Retourne dans r_0 un ensemble vide.
 - EstVide?**(r_1): Retourne $r_0 = \text{vrai}$ si l’ensemble décrit par r_1 est vide et retourne $r_0 = \text{faux}$ sinon.
 - Dans?**(r_1, r_2): En entrée, vous recevez un ensemble $S \subset \mathbb{N}$ dans r_1 et un entier ℓ dans r_2 . Vous retournez $r_0 = \text{vrai}$ si $\ell \in S$ et $r_0 = \text{faux}$ si $\ell \notin S$.
 - Card**(r_1): En entrée, vous recevez un ensemble $S \subset \mathbb{N}$ dans r_1 et vous retournez sa cardinalité dans r_0 .
 - Singleton**(r_2): En entrée, vous recevez un entier dans r_2 et vous retournez dans r_0 un ensemble qui ne contient que cet entier.
 - Union**(r_1, r_2): En entrée, vous recevez deux ensembles $S, T \subset \mathbb{N}$ dans r_1 et r_2 respectivement et vous retournez $S \cup T$ dans r_0 .
 - EnsNbPaires**(r_2): En entrée, vous recevez un entier k dans r_2 et vous produisez dans r_0 l’ensemble des k premiers nombres paires. Utilisez vos macros précédentes et celles que nous avons vues en cours pour simplifier votre code.
2. Montrez les deux énoncés suivants par induction mathématique. Je vous conseille de les résoudre dans l’ordre pour réduire votre travail au minimum. Vous pouvez supposer que $B_1(x) = 2x$ pour chaque $x \geq 1$.

(a) Pour chaque $x \geq 0$,

$$B_2(x) = 2^x.$$

(b) Pour chaque $x \geq 1$,

$$B_3(x) = \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{x \text{ fois}}.$$

3. Est-ce que les programmes RÉPÉTER qui n'ont pas d'opération $r_i \leftarrow r_j$ mais seulement une opération $r_i \leftarrow 0$ peuvent calculer le même ensemble de fonctions sur les entiers que les programmes RÉPÉTER standards? Prouvez votre réponse.
4. Quelle serait votre réponse à la question précédente si ni $r_i \leftarrow r_j$ ni $r_i \leftarrow 0$ n'étaient des opérations autorisées dans les programmes RÉPÉTER? Expliquez votre réponse.
5. Montrez que les programmes RÉPÉTER qui n'ont aucune boucle RÉPÉTER ne peuvent calculer la fonction $f(x) = 5x$. Autrement dit, un programme RÉPÉTER P ne peut calculer $f(x)$ si $\mathcal{B}(\text{P}) = 0$.
6. Montrez que tout programme RÉPÉTER qui calcule $g(x, y) = x \cdot y$ doit nécessairement avoir deux boucles imbriquées. Autrement dit, aucun programme RÉPÉTER P ne peut calculer $g(x, y)$ si $\mathcal{B}(\text{P}) = 1$ (mais c'est possible pour un programme P avec $\mathcal{B}(\text{P}) = 2$, comme nous l'avons vu en cours).