

- Événement élémentaire
 - le résultat d'une **expérience incertaine**
- **Univers** des possibles (événement certain)
 - l'ensemble de **tous les événements** élémentaires
- Événement
 - **sous-ensemble de l'univers** des possibles
 - **ensemble d'événements** élémentaires

- Événements A et B
 - $A \cup B$: soit A soit B ont lieu
 - $A \cap B$: les deux, A et B ont lieu
 - $A \subseteq B$: si A a lieu, alors B aussi
 - \bar{A} : A n'a pas lieu
 - \emptyset : événement impossible
 - Ω : événement certain

- Fréquence

- une expérience est répétée n fois
- l'événement A a lieu r fois
- la **fréquence** est

$$f_n(A) = \frac{r}{n}$$

- la **probabilité** réfère à la fréquence en long terme

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$$

- **Axiomes** de probabilité
 - $0 \leq P(A) \leq 1$
 - $P(\Omega) = 1$
 - si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Événements indépendants

- l'occurrence de A ne donne aucune information sur B
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Événements exclusifs

- A et B n'ont pas au lieu en même temps
- $A \cap B = \emptyset$

- La règle d'**addition**

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- événements **indépendants**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

- événements **exclusifs**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- La probabilité **conditionnelle**

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- événements **indépendants**: $P(A|B) = P(A)$

- La règle de **multiplication**

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

- événements **indépendants**: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- Le théorème de **Bayes**

- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

- La loi de la probabilité **totale**

- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

- Variables aléatoires

- X : un ensemble (de valeurs possibles), par.ex. \mathbb{R} ou \mathbb{Z}
- une **variable aléatoire** X associe aux événements aléatoires possibles une valeur dans X
- soit $\xi \subseteq X$
- $P(X \in \xi)$: **la probabilité** qu'un des événements aléatoires possibles corresponde à une valeur qui soit dans ξ

- Distribution cumulative

- si X est un ensemble ordonné (\mathbb{R}, \mathbb{Z})
- $P(X \leq x)$: probabilité cumulative
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: fonction de probabilité cumulative
- cas multivarié: $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$
- $\hat{F}(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}$: distribution cumulative empirique

- X est continue (par.ex. \mathbb{R}):
 - $F_X(x)$ est une fonction continue
 - on dit que X est une **variable aléatoire continue**
- X est discret (par.ex. \mathbb{Z}):
 - $F_X(x)$ est une somme de “pas” (constante par parties)
 - on dit que X est une **variable aléatoire discrète**

- **Densité** d'une variable aléatoire continue

- $f(x)$ est la **fonction de densité** de X : $P(X \in \xi) = \int_{\xi} f(x) dx$.

- pour $X \subseteq \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

- pour $X \subseteq \mathbb{R}^n$: $f(x) = \frac{d^n F_X(x)}{dx_1 \dots dx_n}$

- **Distribution de probabilité** d'une variable aléatoire discrète

- $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

- $p(x_i) = P(X = x_i)$ est la probabilité que $X = x_i$

- Union

- $P(X \in \xi_1 \text{ ou } X \in \xi_2) = P(X \in \xi_1) + P(X \in \xi_2) - P(X \in \xi_1 \text{ et } X \in \xi_2)$

- $P(X \in \xi_1 \text{ ou } X \in \xi_2) \leq P(X \in \xi_1) + P(X \in \xi_2)$

- Probabilité **jointe**

- $P(X = x, Y = y) = P(X = x \text{ et } Y = y)$ avec $x \in X, y \in Y$

- pour la variable aléatoire $Z = (X, Y)$, qui prend ses valeurs dans $X \times Y$.

- Probabilité **conditionnelle**

- $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$ (si $P(Y = y) \neq 0$)

- **Indépendance**

- X et Y sont indépendants ssi

$$P(X \in \xi, Y \in \zeta) = P(X \in \xi)P(Y \in \zeta)$$

- **distribution cumulative**: $F_{X,Y}(X, Y) = F_X(X)F_Y(Y)$
- **fonction de densité**: $f_{x,y}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$
- **distribution de probabilité**: $p_{x,y}(x_i, y_j) = p_x(x_i)p_y(y_j)$

- **Espérance**

- la “moyenne” d’une variable aléatoire

- $\mu = E[X] = \int_X xf(x)dx$

- $\mu = E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$

- $E[aX + b] = aE[X] + b$

- Variance

- la “largeur” d’une variable aléatoire

- $\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_X (x - E[X])^2 f(x) dx$

- $\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 p(x_i)$

- $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[aX]$

- Écart-type

- $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

- **Matrice de covariance**

- la “largeur” d’une variable aléatoire multivariée

- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$

- $cov[\mathbf{X}] = \int_{\mathbf{X}} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^t f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

- $cov[\mathbf{X}]_{i,j} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$

- **Moments**

- $E[X^k]$: k -ième **moment** de X

- $E[(X - E[X])^k]$: k -ième **moment centré** de X

- Loi normale

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$

- μ : moyenne

- σ^2 : variance

- Loi normale multivariée

- $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$

- Σ : matrice de covariance

- Loi des **grands nombres**

- (X_1, \dots, X_n) : n variables indépendantes
- $E[X_1] = \dots = E[X_n] = \mu$
- $Var[X_1], \dots, Var[X_n] < \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\bar{X}] = \mu$

- Théorème de **limite centrale**

- La moyenne \bar{X} d'une séquence **iid** converge en probabilité **vers une loi Normale** avec espérance $E[X]$ et variance $Var[X]/n$