

Probabilités

1

- Événement élémentaire
 - le résultat d'une **expérience incertaine**
- **Univers** des possibles (événement certain)
 - l'ensemble de **tous les événements** élémentaires
- Événement
 - **sous-ensemble de l'univers** des possibles
 - **ensemble d'événements** élémentaires

Probabilités

2

- Événements A et B
 - $A \cup B$: soit A soit B ont lieu
 - $A \cap B$: les deux, A et B ont lieu
 - $A \subseteq B$: si A a lieu, alors B aussi
 - \bar{A} : A n'a pas lieu
 - \emptyset : événement impossible
 - Ω : événement certain

Probabilités

3

- Fréquence
 - une expérience est répétée n fois
 - l'événement A a lieu r fois
 - la **fréquence** est
$$f_n(A) = \frac{r}{n}$$
 - la **probabilité** réfère à la fréquence en long terme
$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$$

Probabilités

4

- **Axiomes** de probabilité
 - $0 \leq P(A) \leq 1$
 - $P(\Omega) = 1$
 - si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Événements **indépendants**
 - l'occurrence de A ne donne **aucune information** sur B
 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Événements **exclusifs**
 - A et B n'ont pas au lieu **en même temps**
 - $A \cap B = \emptyset$

- La règle d'**addition**
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - événements **indépendants**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
 - événements **exclusifs**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- La probabilité **conditionnelle**
 - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 - événements **indépendants**: $P(A|B) = P(A)$

- La règle de **multiplication**
 - $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
 - événements **indépendants**: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Le théorème de **Bayes**
 - $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- La loi de la probabilité **totale**
 - $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

- Variables aléatoires
 - X : un ensemble (de valeurs possibles), par.ex. \mathbb{R} où \mathbb{Z}
 - une **variable aléatoire** X associe aux événements aléatoires possibles une valeur dans X
 - soit $\xi \subseteq X$
 - $P(X \in \xi)$: **la probabilité** qu'un des événements aléatoires possibles corresponde à une valeur qui soit dans ξ

• Distribution cumulative

- si X est un ensemble ordonné (\mathbb{R}, \mathbb{Z})
- $P(X \leq x)$: probabilité cumulative
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: fonction de probabilité cumulative
- cas multivarié: $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$
- $\hat{F}(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}$: distribution cumulative empirique

• X est continue (par.ex. \mathbb{R}):

- $F_X(x)$ est une fonction continue
- on dit que X est une variable aléatoire continue

• X est discret (par.ex. \mathbb{Z}):

- $F_X(x)$ est une somme de "pas" (constante par parties)
- on dit que X est une variable aléatoire discrète

• Densité d'une variable aléatoire continue

- $f(x)$ est la fonction de densité de X : $P(X \in \xi) = \int_{\xi} f(x) dx$.
- pour $X \subseteq \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
- pour $X \subseteq \mathbb{R}^n$: $f(x) = \frac{d^n F_X(x)}{dx_1 \dots dx_n}$

• Distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète

- $X = \{x_1, x_2, \dots\}$
- $p(x_i) = P(X = x_i)$ est la probabilité que $X = x_i$

• Union

- $P(X \in \xi_1 \text{ ou } X \in \xi_2) = P(X \in \xi_1) + P(X \in \xi_2) - P(X \in \xi_1 \text{ et } X \in \xi_2)$
- $P(X \in \xi_1 \text{ ou } X \in \xi_2) \leq P(X \in \xi_1) + P(X \in \xi_2)$

• Probabilité jointe

- $P(X = x, Y = y) = P(X = x \text{ et } Y = y)$ avec $x \in X, y \in Y$
- pour la variable aléatoire $Z = (X, Y)$, qui prend ses valeurs dans $X \times Y$.

• Probabilité conditionnelle

• $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$ (si $P(Y = y) \neq 0$)

• Indépendance

• X et Y sont indépendants ssi

$$P(X \in \xi, Y \in \zeta) = P(X \in \xi)P(Y \in \zeta)$$

• distribution cumulative: $F_{X,Y}(X, Y) = F_X(X)F_Y(Y)$

• fonction de densité: $f_{x,y}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$

• distribution de probabilité: $p_{x,y}(x_i, y_j) = p_x(x_i)p_y(y_j)$

• Variance

• la "largeur" d'une variable aléatoire

• $\sigma^2 = Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_X (x - E[X])^2 f(x) dx$

• $\sigma^2 = Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 p(x_i)$

• $Var[aX + b] = a^2 Var[aX]$

• Écart-type

• $\sigma = \sqrt{Var[X]}$

• Espérance

• la "moyenne" d'une variable aléatoire

• $\mu = E[X] = \int_X x f(x) dx$

• $\mu = E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$

• $E[aX + b] = aE[X] + b$

• Matrice de covariance

• la "largeur" d'une variable aléatoire multivariée

• $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$

• $cov[\mathbf{X}] = \int_X (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])' f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

• $cov[\mathbf{X}]_{i,j} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$

• Moments

• $E[X^k]$: k -ième moment de X

• $E[(X - E[X])^k]$: k -ième moment centré de X

• Loi normale

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$

- μ : moyenne

- σ^2 : variance

• Loi normale multivariée

- $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}$

- Σ : matrice de covariance

• Loi des grands nombres

- (X_1, \dots, X_n) : n variables indépendantes

- $E[X_1] = \dots = E[X_n] = \mu$

- $Var[X_1], \dots, Var[X_n] < \infty$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\bar{X}] = \mu$

• Théorème de limite centrale

- La moyenne \bar{X} d'une séquence iid converge en probabilité vers une loi Normale avec espérance $E[X]$ et variance $Var[X]/n$