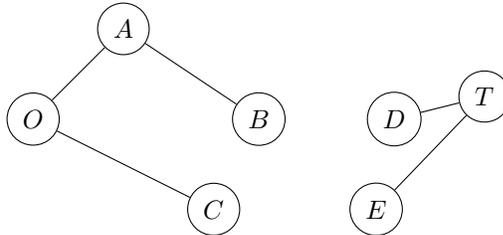


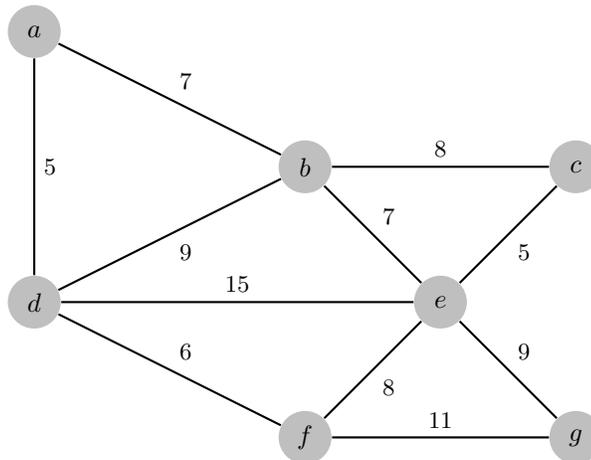
## IFT-1575 Examen final

La durée de l'examen est de 3 heures. Le règlement sur le plagiat sera d'application stricte.

1. (10 points) Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Justifiez brièvement chaque réponse.
  - (a) Le graphe suivant est connexe.



- (b) L'algorithme de Dijkstra permet de calculer un plus court chemin entre deux noeuds de n'importe quel graphe connexe, quels que soient les signes des poids des arcs.
  - (c) Ajouter une coupe à un problème de programmation entière mixte conduit à réduire son domaine de faisabilité.
  - (d) Tout problème de programmation dynamique déterministe peut s'écrire comme problème de plus court chemin.
  - (e) Pour pouvoir être exécuté, l'algorithme de Bellman-Ford doit être appliqué à un graphe possédant au moins un chemin entre la source et la destination, et ne pas présenter de cycles de poids négatif.
2. (10 pts) Déterminez un arbre couvrant minimum dans le graphe suivant.

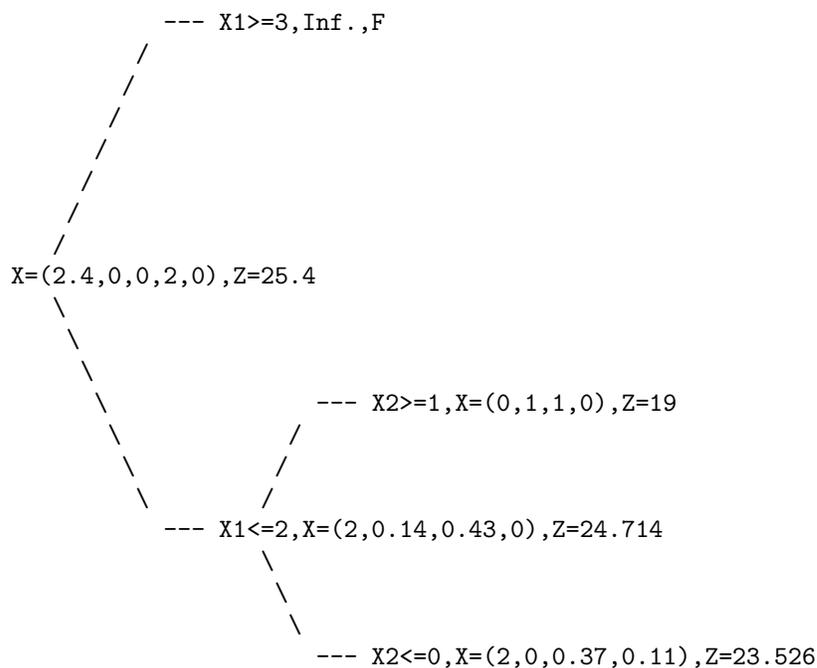


3. (15 pts)

Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 9x_4 \\ \text{s.c } 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\leq 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 &\leq 5, \\ x_i &\in \{0, 1, 2, 3, \dots\}. \end{aligned}$$

Nous sommes arrivé à la situation suivante au cours de la procédure de Branch & Bound :



- Donnez les **meilleures** bornes inférieures et supérieures sur la valeur optimale pouvant être déduites sur base de cet arbre (et seulement de celui-ci).
- Peut-on élaguer des branches de l'arbre? Si oui, lesquelles?
- Sur quelle variable devrait-on brancher pour continuer l'exploration? Formuler mathématiquement les deux sous-problèmes linéaires résultant du branchement.

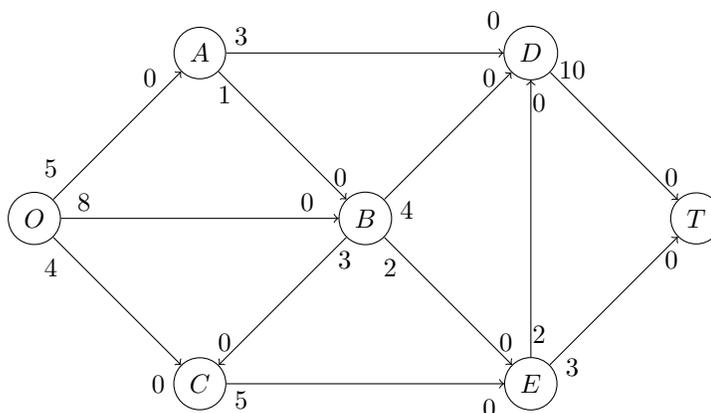
4. (20 pts)

Un chercheur en recherche opérationnelle cherche à minimiser le temps dépensé le matin pour se préparer, en particulier le temps nécessaire pour le déjeuner. La liste des activités est donnée dans le tableau ci-dessous.

Activité	Durée (minutes)
Se lever	30
Remplir les tasses de café	3
Remplir la cafetière	1
Aller chercher le lait	1
Chauffer le café	4
Mettre le lait sur les céréales	1
Préparer les toasts	4
Couper le pain	2
Manger	10

Le chercheur prend son café avec du lait. Il ne mange qu'une fois les toasts et les céréales prêts, et le café dans les tasses. Combien de temps au minimum prendra-t-il le matin (i.e. entre le lever et la fin du déjeuner)? Dessinez le graphe d'activités, et calculez le chemin critique au moyen de l'algorithme de Bellman-Ford.

5. (10 pts) Calculer le flot maximum sur le réseau ci-dessous.



6. (25 pts)

Nous considérons l'achat de 4 unités parmi 3 produits bancaires, dont le rendement historique (i.e. le gain net) par unité est le même, mais le coût d'achat est variable suivant la quantité achetée, et différent d'un produit à l'autre. Afin de diversifier notre achat, nous refusons d'acheter plus de 2 unités d'un même produit. Nous voulons minimiser le montant total pour l'achat des 4 unités, en considérant les prix dans le tableau ci-dessous.

Quantité	Produit 1	Produit 2	Produit 3
0	0	0	0
1	3	1	3
2	5	2	4

(a) Ecrivez le problème sous forme de problème de programmation binaire.

- (b) Résolvez le problème par programmation dynamique, en utilisant la méthode tabulaire (basée sur le principe de Bellman) **et** l'approche de plus court chemin (en mettant en oeuvre l'algorithme de Dijkstra).

7. (10 pts)

Que représente la notation  $M/M/1$ ? Quels événements doit-on considérer si nous voulons simuler un système  $M/M/1$  au moyen d'un modèle de simulation à événements discrets, sur un horizon de temps  $T$ ? Veuillez à bien indiquer tous les événements à considérer.

8. (10 pts)

Une compagnie considère 7 types d'investissement. Chaque investissement peut être fait au plus une fois. Le profit estimé et le capital requis pour chaque type d'investissement est représenté par le tableau suivant (les montants sont en millions de dollars) :

Investissement	1	2	3	4	5	6	7
Profit (net) estimé	17	10	15	19	7	13	9
Capital requis	43	28	34	48	17	32	32

Le capital total disponible pour effectuer ces investissements est de 100 millions de dollars. De plus,

- (a) nous ne pouvons faire à la fois les investissements 1 et 2;
- (b) nous ne pouvons faire à la fois les investissements 3 et 4;
- (c) l'investissement 3 ne peut être fait que si au moins un des investissements 1 et 2 a été effectué;
- (d) l'investissement 4 ne peut être fait que si au moins un des investissements 1 et 2 a été effectué.

L'objectif est d'identifier la combinaison d'investissements qui maximise le profit total estimé.

Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation en nombres entiers. Il n'est pas demandé de le résoudre.