

# Chapitre 6: Méthodes d'approximation en PD

## Monte Carlo approximation

### Application aux options américaines

Fabian Bastin

DIRO, Université de Montréal

IFT-6521 – Hiver 2011

Lecture recommandée: chapitre 8 de Glasserman, "Monte Carlo Methods in Financial Engineering", Springer, 2004.

Nous considérons une classe générale de problèmes de détermination de prix d'option américaine en temps continu.

$U(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ): gain actualisé au temps  $t$ .

Problème: trouver l'espérance optimale du gain actualisé:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E[U(\tau)],$$

où  $\mathcal{T} \subseteq [0, T]$  représente une classe de temps d'arrêt admissibles.

Posons

$$U(\tau) = e^{-\int_0^\tau r(u)du} \tilde{h}(X(\tau)),$$

où  $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$  est un processus Markov.

Cas particulier:  $S(t)$  suit un mouvement brownien géométrique  $GBM(r, \sigma^2)$ , et un prix d'exercice  $K$  est fixé;  $r$  est un taux d'intérêt sans risque constant. Par exemple, si le taux sans risque est de 6%, le taux d'actualisation sur une période vaudra  $e^{-0.06} \approx 0.9417645$ . Si l'option expire au temps  $T$ , sa valeur au temps 0 vaut

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E[e^{-r\tau} (K - S(\tau))^+].$$

Le supremum est atteint par un temps d'arrêt optimal  $\tau^*$  qui a la forme

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \mid S(t) \leq b^*(t)\},$$

pour une certaine frontière d'exercice optimal  $b^*$ .

# Formulation en termes de programmation dynamique

$$\begin{aligned}\tilde{V}_m(x) &= \tilde{h}_m(x), \\ \tilde{V}_{i-1}(x) &= \max\{\tilde{h}_{i-1}(x), E[D_{i-1,i}(X_i)\tilde{V}_i(X_i) | X_{i-1} = X]\}, \\ & \quad i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

$D_{i-1,i}$  est le facteur d'actualisation de  $t_{i-1}$  à  $t_i$ ; posons  $\tilde{h}_0 = 0$  (afin d'exclure la possibilité d'exercer au temps 0).

En pratique, on utilise cette forme, mais pour la discussion théorique, on peut de passer du facteur d'actualisation.

# Reformulation

Soit  $D_{0,j}(X_j)$  le facteur d'actualisation de 0 à  $t_j$ . Le facteur d'actualisation doit satisfaire

$$D_{0,j}(X_j) \geq 0$$

$$D_{0,i-1}(X_{i-1})D_{i-1,i}(X_i) = D_{0,i}(X_i).$$

Posons

$$h_i(x) = D_{0,i}(x)\tilde{h}_i(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$V_i(x) = D_{0,i}(x)\tilde{V}_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Alors

$$V_m(x) = h_m(x),$$

$$\begin{aligned} V_{i-1}(x) &= D_{0,i-1}(x)\tilde{V}_{i-1}(x) \\ &= \max\{h_{i-1}(x), E[V_i(X_i) \mid X_{i-1} = X]\}. \end{aligned}$$

# Mouvement brownien

Un mouvement brownien standard unidimensionnel sur  $[0, T]$  est un processus stochastique  $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$  avec les propriétés suivantes:

- (a)  $W(0) = 0$ ;
- (b) le mapping  $t \rightarrow W(t)$  est une fonction continue sur  $[0, T]$ , presque sûrement;
- (c) les incréments

$$\{W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1}), \}$$

sont indépendants pour n'importe quel  $k$  et n'importe quel  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$ ;

- (d)  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ , pour tous  $0 \leq s < t \leq T$ .

# Mouvement brownien géométrique

Le prix d'une option est souvent supposée suivre un mouvement géométrique brownien, pouvant être décrit au moins de l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien standard. En passant au logarithme et en utilisant le lemme d'Ito, nous obtenons

$$d \log S_t = \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

ce qui donne

$$\log S_t = \log S_0 + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

Autrement dit,  $\log S_t$  suit un mouvement brownien.

# Mouvement brownien géométrique (suite)

Un processus stochastique  $\{S(t)\}$  suite un mouvement brownien géométrique si  $\{\log S(t)\}$  suit un mouvement brownien.

Pour simuler un mouvement brownien géométrique, on peut dès lors simuler le mouvement brownien sous-jacent, et prendre l'exponentielle des observations

La question reste de calculer les espérances conditionnelles.

Plusieurs techniques sont envisageables. Nous nous concentrerons pour les approches Monte Carlo et les régressions par moindres carrés.

Suggestion: Section 8.6, Glasserman 2004.

# Monte Carlo avec Régression par Moindres Carrés

$$J_N(x) = g_N(x) \quad \text{pour } x \in X_N,$$

$$J_k(x) = \min_{u \in U_k(x)} \mathbb{E}_{w_k} [g_k(x, u, w_k) + J_{k+1}(f_k(x, u, w_k))], \quad 0 \leq k < N, x \in X_k,$$

Choisir une classe de fonctions  $\{\Psi_i : S \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq d\}$ , puis approximer  $J_k$  par

$$\tilde{J}_k(x) = \sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x)$$

où les  $\beta_{k,i}$  sont des coefficients à choisir.

On peut par exemple évaluer (ou approximer)  $J_k(x)$  en un nombre fini de points  $x^1, \dots, x^M$ , disons par  $\bar{J}_k(x^1), \dots, \bar{J}_k(x^M)$ , puis déterminer les  $\beta_{k,i}$  par régression linéaire, en minimisant la somme des carrés:

$$\min_{\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,d}} \sum_{x^m \in \bar{S}} \|\tilde{J}_k(x^m) - \bar{J}_k(x^m)\|^2.$$

**Difficulté majeure** (surtout en grande dimension):

Comment choisir les points  $x^m$ ?

**Idée:** simuler des réalisations du processus et prendre les points visités aux différentes étapes.

Dans certains cas, on peut simuler des réalisations indépendamment des décisions ou politiques. Glasserman parle de construction de chemins indépendants. Cela évite l'explosion de l'arbres de scénarios.

Options américaines: on peut simuler le processus sous-jacent (GBM) sans égard aux décisions d'exercice de l'option.

# Problème de temps d'arrêt optimal

À chaque étape  $k < N$ , on peut ou bien s'**arrêter** et encaisser un revenu  $g_k(x_k) \geq 0$ , ou bien **continuer** pour au moins une autre étape, avec un revenu espéré  $Q_k(x_k) = \mathbb{E}[J_{k+1}(f_k(x_k, w_k))]$ . On a

$$J_k(x) = \max [g_k(x), Q_k(x)], \quad 0 \leq k < N.$$

Pour une option financière,  $g_k$  est la valeur d'exercice et  $Q_k$  la valeur de retention.

Une **politique d'arrêt** est une suite  $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$  telle que  $\mu_k : S \rightarrow \{\text{arrêter}, \text{continuer}\}$ . Une telle politique est en fait équivalente à un **temps d'arrêt**  $\tau$  au sens des processus stochastiques, défini par  $\tau = \min\{k \geq 0 : \mu_k(x_k) = \text{arrêter}\}$ .

À chaque politique d'arrêt  $\pi$  (ou temps d'arrêt  $\tau$ ), correspond des fonctions de valeur  $J_{\pi,k} = J_{\tau,k}$  et  $Q_{\pi,k} = Q_{\tau,k}$  qui correspondent à  $J_k$  et  $Q_k$  lorsque la politique est fixée à  $\pi$ .

Réciproquement, à chaque approximation  $\tilde{J}_k$  de  $J_k$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ , correspond un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{J}_k(x_k)\}.$$

De même, à chaque approximation  $\tilde{Q}_k$  de  $Q_k$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ , correspond un temps d'arrêt défini par:

$$\tau = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{Q}_k(x_k)\}.$$

On préfère souvent approximer  $Q_k$  plutôt que  $J_k$ , car elle est plus lisse. On pose  $\tilde{Q}_N(x) = 0$  et

$$\tilde{Q}_k(x) = \sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \psi_i(x),$$

où les  $\beta_{k,i}$  sont des coefficients à choisir.

Pour une trajectoire donnée et  $k < N$ , on peut estimer  $Q_k(x_k)$  simplement par  $\max[g_{k+1}(x_{k+1}), \tilde{Q}_{k+1}(x_{k+1})]$ , en supposant que l'on connaît déjà  $\tilde{Q}_{k+1}$ .

# Algorithme de régression

(Tsitsiklis et Van Roy 1999)

1. Simuler  $n$  trajectoires indépendantes  $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , du processus Markovien de base, avec  $x_{j,0} = x_0$ .
2. Poser  $v_{j,N} = g_N(x_{j,N})$  pour  $j = 1, \dots, n$ .
3. Pour  $k = N - 1, \dots, 0$  faire:
  - 3a. Calculer les coefficients  $\beta_{k,i}$  (pour  $Q_k$ ) qui minimisent

$$\sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x_{j,k}) - v_{j,k+1} \right\|^2.$$

// Note:  $\tilde{Q}_k(x)$  est maintenant définie partout.

- 3b. Poser  $v_{j,k} = \max[g_k(x_{j,k}), \tilde{Q}_k(x_{j,k})]$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
4. Estimer  $Q_0(x_0)$  par  $\hat{Q}_0(x_0) = (v_{1,0} + \dots + v_{n,0})/n$ .

Deux sources d'erreur: (1) valeur finie de  $n$  et (2) distance entre chaque fonction  $Q_k$  et l'espace fonctionnel engendré par les fonctions de base.

# Estimation des paramètres

Le vecteur de coefficients  $\beta_k = (\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,d})$  qui minimise la somme des carrés est

$$\tilde{\beta}_k = \hat{B}_\psi^{-1} \hat{B}_{\psi,v},$$

où  $\hat{B}_\psi$  est la matrice dont l'élément  $(i, \ell)$  est

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_i(x_{j,k}) \Psi_\ell(x_{j,k})$$

et  $\hat{B}_{\psi,v}$  est le vecteur colonne dont l'élément  $i$  est

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_i(x_{j,k}) v_{j,k+1}.$$

Pour plus de détails sur ces formules, voir n'importe quel bon livre sur la régression linéaire.

# Régression + 1SL (low estimator)

L'algorithme précédent nous fournit des approximations  $\tilde{Q}_k$  des fonctions  $Q_k$ .

Ces approximations fixées, nous pouvons utiliser la politique d'arrêt définie par  $\tilde{\tau} = \min\{k \geq 0 : g_k(x_k) \geq \tilde{Q}_k(x_k)\}$ .

Notons  $J_{\tilde{\tau},k}$  et  $Q_{\tilde{\tau},k}$  les fonctions de valeur associées à cette politique (ou ce temps d'arrêt)  $\tilde{\tau}$ .

Cette politique n'est rien d'autre que la **politique 1SL** (one-step lookahead) associée à l'approximation  $\tilde{Q}_k$ .

De plus, puisqu'elle ne peut pas faire mieux que la politique optimale, on a nécessairement  $J_{\tilde{\tau},k}(x) \leq J_k(x)$  pour tout  $k$  et  $x$ .

On obtient facilement un estimateur **sans biais** de  $J_{\tilde{\tau},0}(x)$  en simulant le système avec cette politique (fixée) plusieurs fois, indépendamment, et en faisant la moyenne.

# Régression + 1SL (suite)

L'espérance de cet estimateur est toujours inférieure ou égale à  $J_0(x)$ . Autrement dit, cela donne un estimateur de  $J_0(x)$  à **biais négatif** ("low bias").

Nous pouvons facilement estimer cette espérance en simulant  $\ell$  chemin indépendant, et en calculant la valeur optimale en appliquant la politique 1SL ainsi définie.

En d'autres termes, 2 phases:

- 1 détermination des approximations  $\tilde{Q}$ ;
- 2 simulation (avec de nouveaux chemins) de la politique 1SL.

Glasserman parle de "low estimator" vu que le biais est négatif.

Longstaff et Schwartz (2001) proposent la variante suivante:

1. Simuler  $n$  trajectoires indépendantes  $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , du processus Markovien de base, avec  $x_{j,0} = x_0$ .
2. Poser  $v_{j,N} = g_N(x_{j,N})$  pour  $j = 1, \dots, n$ .
3. Pour  $k = N - 1, \dots, 0$  faire:
  - 3a. Calculer les coefficients  $\beta_{k,i}$  (pour  $Q_k$ ) qui minimisent

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^d \beta_{k,i} \Psi_i(x_{j,k}) - v_{j,k+1} \right\|^2.$$

- 3b. Pour  $j = 1, \dots, n$ , poser

$$v_{j,k} = \begin{cases} g_k(x_{j,k}) & \text{si } g_k(x_{j,k}) \geq \tilde{Q}_k(x_{j,k}); \\ v_{j,k+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Estimer  $Q_0(x_0)$  par  $\hat{Q}_0(x_0) = (v_{1,0} + \dots + v_{n,0})/n$ .

Ici, lorsqu'on n'exerce pas, on estime la valeur par la valeur de continuation au lieu de l'approximation  $\tilde{Q}_k$ . Le bias sur la valeur de  $Q_0(x_0)$  est habituellement négatif, mais il peut aussi être positif.

La règle d'arrêt est implicitement prise en compte dans la mise à jour des  $v_{j,k}$ .

Au lieu d'approximer les fonctions  $Q_k$  par régression, il est possible d'approximer à la place les fonctions  $\mu_k$ , i.e., les frontières qui délimitent les régions d'arrêt, pour chaque  $k$ . Le principe est semblable.

On choisit une classe paramétrisée de politiques,  $\{\mu_{\theta,k}, \theta \in \Theta\}$  pour chaque  $k$ . À chaque  $\pi_{\theta} = (\mu_{\theta,0}, \mu_{\theta,1}, \dots)$  correspond une fonction de valeur  $J_{\pi_{\theta}}$  et un temps d'arrêt  $\tau(\theta)$ .

1. Simuler  $n$  trajectoires indépendantes  $x_{j,0}, \dots, x_{j,N}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , avec  $x_{j,0} = x_0$ .
2. Trouver  $\tilde{\theta}$  qui maximise le coût moyen empirique

$$\hat{J}_{\theta,0}(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_{\tau_j(\theta)}(x_{j,\tau_j(\theta)})$$

p.r. à  $\theta$ , où  $\tau_j(\theta)$  est le temps d'arrêt pour la trajectoire  $j$ .

3. Approximer  $J_0(x_0)$  par  $J_{\tilde{\theta},0}(x_0)$ .

**Biais:** on a  $\mathbb{E}[\hat{J}_{\tilde{\theta},0}(x_0)] \geq \sup_{\theta} J_{\theta,0}(x_0)$  par l'inégalité de Jensen (cas convexe), et aussi  $J_0(x_0) \geq \sup_{\theta} J_{\theta,0}(x_0)$ .

**Exemple** (Glasserman 2004): Option américaine sur le max des prix de deux actifs  $S_1$  et  $S_2$ , qui évoluent selon des mouvement Brownien géométriques indépendants.

Dates d'exercices:  $t_k = i/3$  pour  $k = 1, \dots, 9$ . Revenu:

$$g_k(S_1(t_k), S_2(t_k)) = \max[S_1(t_k) - K, S_2(t_k) - K, 0].$$

Taux d'intérêt  $r = 5\%$ , dividende  $\delta = 10\%$ , volatilité  $\sigma = 0.20$ .

Valeur exacte: 13.90, 8.08, 21.34 pour  $S_k(0) = 100, 110, 90$ .

On approxime par Monte Carlo + régression, avec  $n = 4000$ .

Résultats pour  $S_k(0) = 100$ :

fonctions de base	régression	1SL	LSM
$1, S_i, S_i^2, S_i^3$	15.74	13.62	13.67
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2$	15.24	13.65	13.68
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2, \max(S_1, S_2)$	15.23	13.64	13.63
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2, S_1^2 S_2, S_1 S_2^2$	15.07	13.71	13.67
$1, S_i, S_i^2, S_i^3, S_1 S_2, S_1^2 S_2, S_1 S_2^2, g_k(S_1, S_2)$	14.06	13.77	13.79
$1, S_i, S_i^2, S_1 S_2, g_k(S_1, S_2)$	14.08	13.78	13.78

Résultats pour  $S_k(0) = 110$  et 90. Valeurs exactes: 8.08 et 21.34.

régression	1SL	LSM	régression	1SL	LSM
9.49	7.93	7.92	24.52	20.79	21.14
9.39	7.97	7.87	23.18	21.02	21.15
9.44	7.98	7.87	22.76	20.98	21.02
9.25	7.95	7.87	22.49	21.08	21.15
8.24	8.01	7.95	21.42	21.25	21.20
8.27	7.99	7.99	21.38	21.26	21.16

Longstaff et Schwartz (2001) recommandent de n'utiliser que les points  $x_{j,k}$  où  $g_k(x_{j,k}) > 0$  dans la régression, au lieu de tous les points  $x_{j,k}$ . Mais Glasserman (2004) dit qu'il a obtenu de moins bons résultats de cette manière.