

IFT-6561

Devoir 1

1. Supposons que pour un certain modèle de simulation, la sortie (ou le coût) X est K avec une probabilité p et 0 avec une probabilité $1 - p$. La valeur de p est inconnue. Nous faisons n simulations indépendantes, et prenons le coût moyen \bar{X}_n sur ces n expériences comme estimateur non biaisé du coût espéré $\mu = pK$.
 - a) Quelle est la variance exacte de \bar{X}_n ?
 - b) Supposons à présent $p = 1/K$, de sorte que $\mu E[X] = 1$. Montrez que la variance de X est en $O(1/p) = O(K)$ comme p tend vers 0.
 - c) La variance de X peut être estimée par la variance échantillonnale S_n^2 . Ecrivez S_n^2 et $\text{Var}[S_n^2]$ comme fonctions de K , n , et la variable aléatoire binomiale $B = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/K$.
2. (Bratley, Fox, and Schrage 1987, Problem 1.9.18.) Supposons que le coût (aléatoire) d'opération d'un système pour un jour, sous une politique π , soit

$$C(\pi) = a(\pi) + \sum_{i=1}^k b_i(\pi)[f_i(\pi) + E_i] + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij}[f_i(\pi) + E_i][f_j(\pi) + E_j].$$

où k et les c_{ij} sont des constantes, $a(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ et $f_i(\cdot)$ sont des fonctions de π , et les E_i sont des variables aléatoires indépendantes de π .

- a) Montrez que pour estimer $E[C(\pi)]$, remplacer les E_i par leurs espérances dans l'expression de $C(\pi)$ introduit du biais (en général). Donnez une expression pour le biais et une condition nécessaire et suffisante sous laquelle un tel remplacement n'introduit pas de biais.
- b) Expliquez sous quelles circonstances remplacer les E_i par leurs espérances améliore l'efficacité de l'estimateur (i.e. l'inverse du produit du coût de calcul de l'estimateur par la somme de la variance et du biais au carré), malgré l'introduction de biais, et sous quelles circonstances elle améliore l'erreur quadratique moyenne (la somme de la variance et du biais au carré).
- c) Supposons à présent que nous soyons à estimer $\delta = E[C(\pi_1)] - E[C(\pi_2)]$ pour deux politiques différentes π_1 et π_2 . Montrez que δ peut être calculé directement en remplaçant les E_i par leurs espérances. Pour trouver le π qui minimise $E[C(\pi)]$, pouvons-nous remplacer les E_i par leurs espérances sans introduire de biais sur le choix de π ?

3. Le modèle de Black et Scholes représente le *prix* d'une action au temps ζ comme suit:

$$S(\zeta) = S(0)e^{(r-\sigma^2/2)\zeta + \sigma B(\zeta)}$$

où r est le *taux d'intérêt* sans risque, σ est la *volatilité*, et $B(\cdot)$ est un *mouvement Brownien* standard. Un mouvement brownien standard est un processus stochastique $(B_t)_{t \in [0, T]}$ satisfaisant les hypothèses suivantes:

- a) $B_0 = 0$ presque partout;
- b) B est continu presque sûrement, i.e. la fonction $t \rightarrow B_t(w)$ est continue pour presque tous les w ;
- c) B a des accroissements indépendants: pour tous t, s , tel que $t > s$, $B_t - B_s$ est indépendant du processus $(B_u)_{0 \leq u \leq s}$ avant le temps s ;
- d) les accroissements de B sont stationnaires et gaussiens: pour $t \geq s$, $B_t - B_s$ suit une normale de moyenne 0 et de variance $t - s$.

Supposons qu'un contrat financier nous assure un *revenu* $g(S(\zeta_1), \dots, S(\zeta_t))$ au temps $T \geq \zeta_t$, où ζ_1, \dots, ζ_t sont des instants d'*observation* fixes. La *juste valeur* au temps 0 d'un tel contrat, si $S(0) = s$, est

$$v(s, T) = E [e^{-rT} g(S(\zeta_1), \dots, S(\zeta_t)) \mid S(0) = s],$$

où E est sous la mesure de risque neutre et e^{-rT} est le *facteur d'actualisation*.

Si g est simple, on peut disposer d'une formule analytique pour $v(s, T)$. Par exemple, pour une *option d'achat européenne* (sans dividende), $g(S(T)) = \max[0, S(T) - K]$, où T est la date d'expiration et K est le prix d'achat au contrat. Si $S(T) > K$, le détenteur achète l'action au prix K et revend immédiatement au prix du marché $S(T)$, sinon il déchire le contrat.

Pour ce cas, la célèbre *formule de Black-Scholes* donne:

$$v(s, T) = s\Phi(-z_0 + \sigma\sqrt{T}) - Ke^{-rT}\Phi(-z_0),$$

où Φ est la f.r. normale standard et

$$z_0 = \ln(K/s) - (r - \sigma^2/2)T / (\sigma\sqrt{T}).$$

Prenons les valeurs suivantes: $r = 0.05$, $\sigma = 0.5$, $K = 100.0$, $S(0) = 100$, et un horizon de 1 an. Vérifiez la validité de la formule de Black-Schole en la comparant avec un modèle de simulation, dans lequel l'estimation de la moyenne se fait sur 10000 réplique. On demande d'utiliser SSJ, et de fournir le code. Discuter les résultats.