

IFT 6561

Simulation: aspects stochastiques

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Automne 2013

Détails pratiques

Professeur: Fabian Bastin, bureau 3367, Pav. A.-Aisenstadt.

Courriel: bastin@iro.umontreal.ca

Page web: <http://www.iro.umontreal.ca/~bastin>

Evaluation: 4 devoirs (45%), un examen intra (25%), un projet final (30%).

Objectifs

- 1 Comprendre les enjeux principaux des modèles de simulations informatiques.
- 2 Distinguer les divers types de modèles, et identifier les situations nécessitant le recours à la simulation.
- 3 Notions d'événements discrets.
- 4 Etre capable de construire les éléments d'une simulation à événements discrets.
- 5 Collecter les résultats d'une simulation et les interpréter.
- 6 Améliorer autant que possible la qualité de ces résultats.

- Livre de référence conseillé (non obligatoire): A. M. Law, Simulation Modeling and Analysis, quatrième édition, McGraw-Hill, USA, 2007.
- Notes de cours de Pierre L'Ecuyer:
<http://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/ift6561.html>
- Guide SSJ:
<http://www.iro.umontreal.ca/~simardr/ssj/>

Système collection d'entités qui agissent et interagissent afin d'accomplir une certaine fin logique.

L'état d'un système est la collection de variables nécessaires pour décrire un système à un instant particulier.

Modèle description simplifiée d'un système, dans le but d'évaluer sa performance ou l'effet de certaines décisions.

Simulation faire évoluer le modèle d'un système en fournissant les entrées appropriées, puis observer et analyser les résultats.

Deux types principaux de systèmes: discrets et continus.

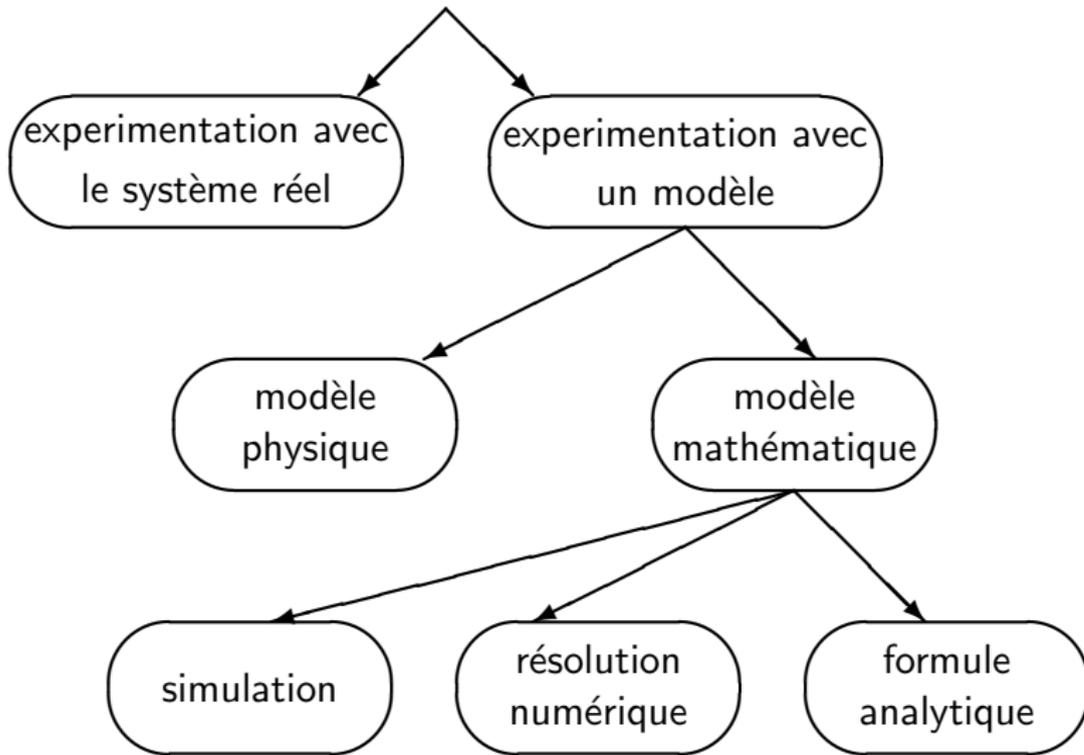
Pourquoi simuler?

La simulation permet d'expérimenter avec un système sans payer le véritable prix de nos erreurs.

Exemples:

- Prévisions météo; Simulateurs de vol; jeux vidéo;
- Outils pour la prise de décision: conception d'une usine; planification de la production; gestion des soins de santé; transport; télécommunications;
- simulation en finance, assurances, économie; etc.

Types de modèles



Avantages des modèles mathématiques et de la simulation:

- La simulation est *non destructrice*. Les erreurs ne sont pas coûteuses.
- Le système considéré n'a même pas besoin d'*exister*.
- On peut *répéter* à volonté des expériences identiques ou similaires dans les mêmes conditions.
- On peut souvent simuler un système beaucoup plus *rapidement* qu'il évolue dans la réalité (par ex., 2 années d'opération d'une usine en quelques minutes).
- On peut simuler des modèles très *complexes*, plus *réalistes* que ceux que l'on peut résoudre par des formules analytiques ou par les méthodes d'optimisation classiques.
- L'*animation graphique* peut permettre de voir évoluer le modèle.

Inconvénients:

- *Coût*: La modélisation et la programmation peuvent demander beaucoup d'effort, de temps et d'argent.
- Les *temps d'exécution* (CPU) peuvent devenir excessifs.
- Ne fournit habituellement que des *estimations*; l'optimisation est beaucoup plus difficile par simulation que via les outils habituels de programmation mathématique.
- L'*analyse statistique* des résultats n'est pas toujours simple.

Notre objectif dans ce cours: apprendre à *simuler efficacement*.

Les méthodes Monte Carlo sont aussi utilisées pour des applications qui ne correspondent pas nécessairement à la simulation du comportement d'un système complexe. Exemples: en combinatoire, pour compter des configurations; en statistique, pour estimer le niveau ou la p-valeur d'un test d'hypothèse; etc.

Types de modèles mathématiques

Modèle analytique: on obtient une formule.
Difficile à mettre au point mais facile à utiliser.

Exemples: Black-Scholes, formule balistique, files d'attente M/M/s, etc.

Exemple: Soit W le temps d'attente d'un client pris au hasard dans un modèle de file M/M/s avec taux d'arrivée λ , taux de service μ , $s > \lambda/\mu$ serveurs, et qui évolue indéfiniment. Dans ce cas, il existe une formule exacte pour $P[W = 0]$, et on sait que conditionnellement à $W > 0$, W suit une loi exponentielle de moyenne $1/(s\mu - \lambda)$.

Méthodes numériques: itératives et/ou approximatives. E.g., programmation linéaire et non linéaire, programmation dynamique, méthodes éléments finis pour équations différentielles.

Types de modèles mathématiques

Simulation stochastique: implique de l'incertitude.

Outils de base: probabilités et statistique.

Un modèle de simulation sera habituellement plus détaillé et *réaliste* qu'un modèle analytique. Par contre, une formule analytique peut donner une meilleure *intuition* des principales propriétés du système et sera moins coûteuse à utiliser.

Modèle déterministe: Aucun aléa.

Ex.: Équations différentielles; programmation linéaire; ...

Modèle Stochastique: Comportement aléatoire.

Ex.: Files d'attente; modèles de fiabilité; ...

Modèle statique: Le "temps" ne joue pas un rôle prépondérant.

Ex.: Fiabilité d'un réseau; ...

Modèle dynamique: On s'intéresse à l'évolution dans le temps.
Ex.: Trafic routier ou téléphonique; Système d'inventaire; ...

État du système: Les valeurs d'un ensemble de variables décrivant le système à un instant donné.

Modèle en temps continu (simulation continue): L'état change continûment dans le temps, habituellement selon des équations différentielles.

Ex.: Un objet qui se déplace; prédictions météo; simulateurs de vol; ...

Modèle à événements discrets: L'état change par sauts, lors de l'occurrence d'événements, qui se produisent à des instants habituellement aléatoires $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots$.

Modèle en temps discret: $t_i = i$ pour tout i .

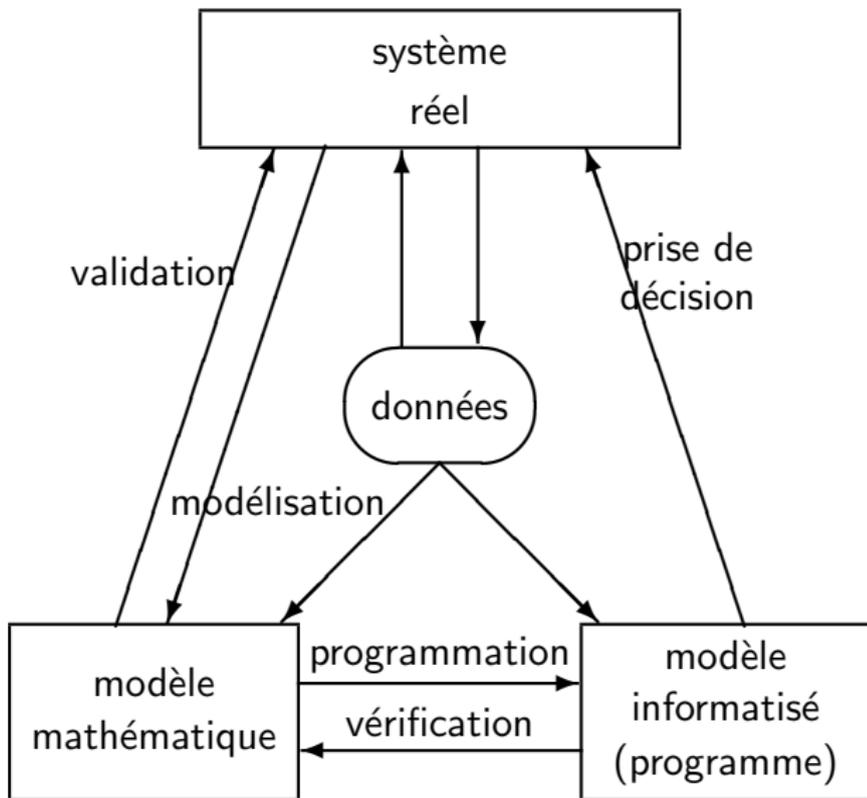
Modèle hybride: Mélange d'évolution continue et d'événements discrets.

Modèle à événements discrets: L'état change par sauts, lors de l'occurrence d'événements, qui se produisent à des instants habituellement aléatoires $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \dots$.

Modèle en temps discret: $t_i = i$ pour tout i .

Modèle hybride: Mélange d'évolution continue et d'événements discrets.

Intérêt principal dans ce cours: la simulation stochastique à événements discrets.



Validité d'un modèle: doit reproduire les aspects importants du comportement du système pour l'application visée.

La notion de validité est relative et dépend du niveau de précision voulu. Il n'y a pas de modèle "100% valide". Un modèle est toujours une *approximation* de la réalité, construit en faisant des compromis.

Les modèles utiles sont aussi fréquemment modifiés avec le temps. On doit les concevoir et les programmer en tenant compte de cela.

Exemple: modélisation des activités d'un aéroport.

On ne peut pas tout modéliser. Qu'est-ce qu'on veut étudier?

L'attente aux comptoirs d'enregistrement?

L'achalandage aux guichets des douanes?

Les retards des arrivées et départs?

Exemple: collisions dans un système de hachage.

Très grand ensemble d'identificateurs Φ .

Fonction de hachage $h : \Phi \rightarrow \{1, \dots, k\}$ (ensemble d'adresses), où $k \ll |\Phi|$.

On tire m éléments distincts de Φ .

C = nombre de *collisions* dans les adresses.

Modèle analytique:

Si k est grand et $\lambda = m^2/(2k)$ est petit, $C \approx$ Poisson de moyenne λ .

Simulation:

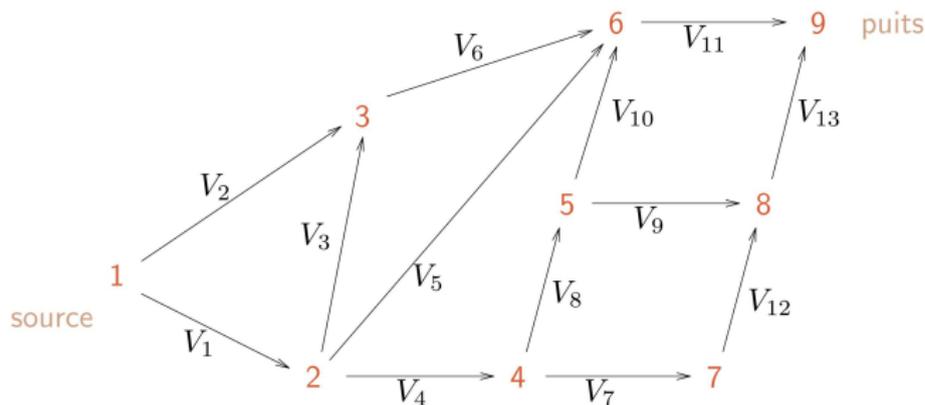
Si k est petit, ou si on veut évaluer la qualité de l'approx. par la loi de Poisson, on peut simuler. On génère m v.a. i.i.d. uniformes sur $\{1, \dots, k\}$ et on compte le nombre C de collisions. On répète cela n fois et on peut examiner la distribution empirique des n valeurs de C , estimer $E[C]$ par leur moyenne, etc.

Un réseau d'activités stochastique.

Grphe acyclique $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, de *noeuds* \mathcal{N} et *arcs* \mathcal{A} (les activités).
Le graphe donne les relations de précédence entre les activités.
Chaque activité $k \in \mathcal{A}$ a une durée aléatoire V_k de fonction de répartition F_k .

Si V_k est la longueur de l'arc k , la durée minimale du projet est la longueur T du plus long chemin dans le réseau.

On peut vouloir estimer $P[T > x]$ pour un certain x , par exemple.



Mouvement Brownien géométrique

Modèle de Black et Scholes: le *prix* d'une action au temps ζ est

$$S(\zeta) = S(0)e^{(r-\sigma^2/2)\zeta + \sigma B(\zeta)}$$

où r est le *taux d'intérêt* sans risque, σ est la *volatilité*, et $B(\cdot)$ est un *mouvement Brownien* standard.

Cela veut dire que pour $\zeta_2 > \zeta_1 \geq 0$, $B(\zeta_2) - B(\zeta_1)$ est normal de moyenne 0 et variance $\zeta_2 - \zeta_1$, et est indépendant de $B(\cdot)$ en dehors de $[\zeta_1, \zeta_2]$.

Supposons qu'un contrat financier nous assure un *revenu* $g(S(\zeta_1), \dots, S(\zeta_t))$ au temps $T \geq \zeta_t$, où ζ_1, \dots, ζ_t sont des instants d'*observation* fixes.

La *juste valeur* au temps 0 d'un tel contrat, si $S(0) = s$, est

$$v(s, T) = E \left[e^{-rT} g(S(\zeta_1), \dots, S(\zeta_t)) \mid S(0) = s \right],$$

où E est sous la mesure de risque neutre et e^{-rT} est le *facteur d'actualisation*.

Mouvement Brownien géométrique

Si g est simple, on peut disposer d'une formule analytique pour $v(s, T)$. Par exemple, pour une *option d'achat européenne* (sans dividende), $g(S(T)) = \max[0, S(T) - K]$, où T est la date d'expiration et K est le prix d'achat au contrat.

Si $S(T) > K$, le détenteur achète l'action au prix K et revend immédiatement au prix du marché $S(T)$, sinon il déchire le contrat.

Pour ce cas, la célèbre *formule de Black-Scholes* donne:

$$v(s, T) = s\Phi(-z_0 + \sigma\sqrt{T}) - Ke^{-rT}\Phi(-z_0),$$

où Φ est la f.r. normale standard et

$$z_0 = \ln(K/s) - (r - \sigma^2/2)T/(\sigma\sqrt{T}).$$

Si g est plus compliqué: pas de formule.

$$g(S(\zeta_1), \dots, S(\zeta_t)) = \max \left(0, \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t S(\zeta_j) - K \right).$$

On peut alors estimer $v(s, T)$ par *simulation*:

Pour $i = 1, \dots, n$,

Poser $B(\zeta_0) = \zeta_0 = 0$;

Pour $j = 1, \dots, t$,

Générer $Z_j \sim N(0, 1)$;

Poser $B(\zeta_j) = B(\zeta_{j-1}) + \sqrt{\zeta_j - \zeta_{j-1}} Z_j$

et $S(\zeta_j) = S(0)e^{(r-\sigma^2/2)\zeta_j + \sigma B(\zeta_j)}$;

Calculer le revenu $X_i = g(S(\zeta_1), \dots, S(\zeta_t))$;

Calculer \bar{X}_n , la moyenne des X_i .

Raffinements: volatilité stochastique, sauts pour $S(\cdot)$, $S(\zeta)$ est un vecteur, etc.

Estimation d'un quantile

Ce que l'on veut estimer n'est pas toujours une espérance mathématique.

Par exemple, soit Y la perte nette d'un investissement donné durant une période fixée. Pour p donné (e.g., $p = 0.99$), on veut estimer la constante

$$\xi_p = \inf\{y : P[Y \leq y] \geq p\}.$$

Cette constante est le p -quantile de la distribution de Y .

Dans ce contexte, ξ_p s'appelle la p -valeur à risque (p -VaR).

Interprétation: la probabilité de perdre ξ_p ou plus ne dépasse pas $1 - p$.

Estimation d'un quantile

Si la loi de Y est complexe, on ne peut pas calculer ξ_p exactement, mais on peut simuler n copies de Y , disons Y_1, \dots, Y_n , et estimer ξ_p par

$$\hat{\xi}_{p,n} = \inf \left\{ y \in \mathcal{R} : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[Y_i \leq y] \geq p \right\} = Y_{[np]}.$$

Cet estimateur est biaisé pour n fini, mais fortement consistant.