IFT 2505
Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php

Automne 2012

Centre analytique

Considérons un ensemble $\mathcal{S}$ dans un sous-ensemble $\mathcal{X}$ de E^n, défini comme

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \,:\, g_j(\mathbf{x}) \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m\},$$

et supposons que les fonctions g_j sont continues.

Nous supposons aussi que $\mathcal{S}$ a un intérieur non-vide

$$\mathring{\mathcal{S}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \,:\, g_j(\mathbf{x}) > 0,\ \forall\, j\}.$$

Définissons aussi sur $\mathring{\mathcal{S}}$ la fonction potentiel

$$\psi(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{m} \log g_j(\mathbf{x}).$$

Centre analytique

Le centre analytique de $\mathcal{S}$ est le vecteur (ou l'ensemble de vecteurs) qui minimise le potentiel

En d'autres termes, c'est le vecteur (ou l'ensemble de vecteurs) qui résout

$$\min_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ -\sum_{j=1}^{m} \log g_j(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \ g_j(\mathbf{x}) > 0 \ \forall j \right\}.$$

Exemple : un cube

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ défini par $x_i \geq 0$, $(1 - x_i) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\mathcal{S} = [0, 1]^n,$$

le cube unité dans E^n.

Cherchons à minimser la fonction potentiel correspondante

$$\psi(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i - \sum_{i=1}^{n} \log(1 - x_i).$$

Exemple : un cube

Pour ce faire, annulons le gradient de $\psi(\mathbf{x})$

$$\nabla_x \psi(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{1-x_1} \\ -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{1-x_2} \\ \vdots \\ -\frac{1}{x_n} + \frac{1}{1-x_n} \end{pmatrix}$$

(Note : $\psi(x)$ est ici une fonction convexe.)

On en tire $x_i = 1/2$ pour tout i. Dès lors, le centre analytique est identique à l'idée usuelle du centre du cube unité.

Toutefois, en général, le centre analytique dépend de la manière dont l'ensemble est défini, en particulier les inégalités utilisées dans la définition.

Exemple : un cube

Par exemple, nous pourrions aussi définir le cube unité avec les inégalités

$$x_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, n$$
$$(1 - x_i)^d \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, n,$$

avec $d > 1$, et d impair. Dans ce cas, la solution est

$$x_i = \frac{1}{d+1}, \ \forall\, i.$$

Pour un grand d, ce point est proche du coin intérieur, i.e. du point $(0, 0, \ldots, 0)$ du cube unité.

De plus, l'ajout d'inégalités additionnelles redondantes peut aussi modifier la position du centre analytique. Répéter par exemple une inégalité donnée changera la position du centre.

Centre analytique

Il y a plusieurs ensembles associés avec des programmes linéaires pour lesquels le centre analytique est d'un intérêt particulier.

Un tel ensemble est la région réalisable elle-même. Un autre est l'ensemble des solutions optimales. Il y a aussi les ensembles associés avec les formulations duale et primale-duale. Tous ceux-ci sont en fait reliés.

Considérons par exemple le centre analytique associé à un polytope borné Ω dans E^m, représenté par n $(> m)$ inégalités linéaires :

$$\Omega = \{\mathbf{y} \in E^m \, : \, \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{0}\},$$

où $\mathbf{A} \in E^{m \times n}$ et $c \in E^n$ sont données, et A est de rang m.

Centre analytique

Dénotons l'intérieur de Ω par

$$\mathring{\Omega} = \{\mathbf{y} \in E^m \,:\, \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A} > 0\}.$$

La fonction potentiel pour cet ensemble est

$$\psi_\Omega(\mathbf{y}) = -\sum_{j=1}^{n} \log(c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{a}_j) = -\sum_{j=1^n} \log s_j,$$

où $\mathbf{s} = \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A}$ est un vecteur d'écart.

Dès lors, dans le cas présent, la fonction potentiel est l'opposé de la somme des logarithmes des variables d'écart.

Centre analytique

Le centre analytique de Ω est le point de Ω qui minimise la fonction potentiel. Ce point, dénoté $\mathbf{y}^a$ est associé à $\mathbf{s}^n = \mathbf{c} - \mathbf{A}\mathbf{y}^a$. La paire $(\mathbf{y}^a, \mathbf{s}^a)$ est définie de manière unique, vu que la fonction potentiel est strictement convexe sur un ensemble convexe borné.

Notons aussi que minimiser la fonction potentiel revient ici à maximiser le produit des variables d'écart.

Annuler le gradient de $\psi(\mathbf{y})$ par rapport à $\mathbf{y}$ donne

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j - \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j} = 0, \ \forall\, i,$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{s_j} = 0, \ \forall\, i,$$

Centre analytique

Définissons $x_j = 1/s_j$ pour tout j, et notons la multiplication composante par composante comme suit

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{s} = \left(x_1 s_1, x_2 s_2, \ldots, x_n s_n\right)^T.$$

Le centre analytique est alors défini par les conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Le centre analytique peut aussi être défini quand l'intérieur est vide ou que des égalités sont présentes, par exemple avec

$$\Omega = \{\mathbf{y} \in E^m \,:\, \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A} \geq 0,\, \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}\}$$

Centre analytique

Dans ce cas, le centre analytique est choisi sur la surface linéaire $\{\mathbf{y} : \mathbf{By} = \mathbf{b}\}$ pour maximiser le produit des variables d'écart.

Dans ce contexte, l'intérieur de Ω réfère à l'intérieur de l'orthant positif des variables d'écart :

$$R^n_+ := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \geq 0\}.$$

Cette définition d'intérieur dépend seulement de la région des variables d'écart.

Meme s'il y a seulement un point dans Ω avec $\mathbf{s} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y}$ pour un certain $\mathbf{y}$ où $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{s} > 0$, nous continuerons à dire que $\mathring{\Omega}$ est non vide.