

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2012

Faisons le point

Programmes primal et dual : deux points de vue d'une même réalité.

m contraintes et n variables pour le primal. Simplexe sous forme révisé :

- taille des systèmes linéaires : $m \times m$.
- si n grand par rapport à m : possiblement beaucoup de bases à explorer.

Exemple : production de peinture (B. Fortz)

Une société fabrique de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base $M1$ et $M2$.

Données :

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires :

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes par jour.
- La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Exemple : production de peinture (B. Fortz)

Variables :

- x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour ;
- x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour.

Formulation du programme :

$$\max_x z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c. } 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & w = 24\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ \text{s.c.} \quad & 6\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \geq 5 \\ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq 4 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Primal :

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1.5, \quad z = 21$$

Dual :

$$\lambda_1 = 0.75, \quad \lambda_2 = 0.5, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad w = 21.$$

Production de peinture : interprétation économique

Interprétation de la dualité forte : le profit maximal est atteint si les ressources ont été exploitées complètement, i.e. jusqu'à épuisement de leur valeur.

- Le profit augmente de 0.75 par augmentation d'une tonne de M1 et de 0.5 par tonne de M2.
- Les "ressources" 3 et 4 sont abondantes ; augmenter ces ressources n'apporte aucun profit supplémentaire.

Contraintes de complémentarité

- approche intuitive : une variable de base dans le primal correspond à une contrainte active au niveau du dual ;
- sous l'hypothèse de non-dégénérescence pour le primal et le dual, il y a exactement m variables du primal non-nulle à la solution optimale et m contraintes actives pour le dual.

Hypothèse de non-dégénérescence primale : m composantes de la solution optimale sont strictement positives.

Hypothèse de non-dégénérescence duale : m contraintes du dual sont actives.

Considérons le primal

$$\max_x z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.c. } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dual :

$$\min_y w = 10y_1 + 8y_2$$

$$\text{s.c. } y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0.$$

Résolution en utilisant les écarts de complémentarité

La solution optimale du primal

$$\left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0\right)$$

Valeur optimale : $\frac{274}{5}$.

Comme $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, nous avons le système linéaire correspondant pour le dual

$$y_1 + 2y_2 = 5$$

$$2y_1 - y_2 = 12.$$

On tire

$$5y_1 = 29, \quad y_2 = 2y_1 - 12,$$

et donc

$$y_1 = \frac{29}{5}, \quad y_2 = -\frac{2}{5}.$$

Considérons la paire primale-duale :

$$\begin{aligned} \min_x & c^T x \\ \text{s.c. } & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} & b^T \lambda \\ \text{s.c. } & A^T \lambda \leq c. \end{aligned}$$

Pour toute solution de base non dégénérée x du primal, il existe une et une seule solution λ du dual complémentaire à x .

Le dual peut se réécrire sous forme standard :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^T \lambda \\ \text{s.c.} \quad & A^T \lambda + t = c \\ & t \geq 0. \end{aligned}$$

Considérons un ensemble de variables de base B et un ensemble de variables hors base D , tels que la base correspondante est non dégénérée :

$$x_B = B^{-1}b > 0, \quad x_D = 0.$$

Par complémentarité,

$$t_B = 0, \quad B^T \lambda = c_B.$$

Dès lors,

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}, \quad t_B^T = 0, \quad t_D^T = (c_D^T - c_B^T B^{-1}D).$$

On voit apparaître une réécriture des conditions de complémentarités :

$$t_i x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Autre conséquence : λ est admissible si et seulement si x satisfait les conditions d'optimalité (coûts réduits positifs ou nuls). Dans la démonstration précédente, cela revient à poser $t_B = 0$, et $t_D = (c_D^T - c_B^T B^{-1} D)$. Autrement dit, les conditions d'optimalité sont équivalente à l'admissibilité du dual.

Similairement, x est admissible si et seulement si λ satisfait les conditions d'optimalité. Cela se déduit directement du fait que le dual du dual est le primal.

Motivations :

- Il arrive souvent qu'une solution en base non admissible, mais satisfaisant les contraintes d'optimalité soit identifiable facilement (par exemple, variables d'écart de contraintes $\leq$).
- Cette base correspond à une solution admissible du dual.
- Idée de la méthode simplexe duale : résoudre (implicitement) le dual par la méthode du simplexe (mais en travaillant sur le tableau primal !).
- Partir avec une solution de base satisfaisant les conditions d'optimalité (= base admissible pour le dual) et chercher à la rendre admissible (= dual optimale).
→ simplexe dual.

Motivations :

- Exploiter d'avantage la complémentarité entre le primal et le dual.
- Comme pour le simplexe duale, on part d'une solution dual-réalisable.
- Primal restreint : on va forcer la condition de complémentarité

$$x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i,$$

en faisant entrer dans la base primale les x_i correspondant aux contraintes duales actives.

- Dual restreint : on optimise le dual. Si celui-ci est réalisable, augmenter (strictement) la valeur de l'objectif dual va conduire à transformer au moins une contrainte duale inactive en contrainte duale active.