

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

Objectifs du cours

- ❶ Bases de la programmation mathématique:
 - objectif, contraintes;
 - solution(s) réalisabl(s).
 - solution(s) optimale(s), valeur optimale;
- ❷ Comprendre les principes de base de la programmation linéaire (PL), et de ses méthodes de résolution. La méthode du simplexe sera étudiée avec un niveau élevé de détails.
- ❸ Comprendre la notion de dualité.
- ❹ Principes de base des méthodes de points intérieurs.
- ❺ Problèmes de transport.
- ❻ Aspects numériques de la PL (utilisation de Matlab).

Théorie

Lundi, 13h30-14h20, local Z-305, pavillon C.-McNicoll.

Mercredi, 13h30-15h20, local Z-337, pavillon C.-McNicoll.

Travaux Pratiques

Lundi, 15:30-17:30, local Z-209, Pavillon C.-McNicoll.

Démonstratrice: Shohre Zehtabian

Consultations: lundi, 11h–12h. local 3375.

Evaluation

Examen intra (mercredi 30 octobre): 30%

- B-4265 3200 J.-Brillant; 1 page de notes (recto) permise.

Examen final (lundi 16 décembre): 40%.

- Z-209,210; 2 pages de notes (une feuille) permise.

Devoirs: 30%

$$\min_{\mathbf{x}} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Sujet à } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$$

$$\min_{\mathbf{x}} z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{Sujet à } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Variables d'écart

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &\leq b_j \\ \rightarrow a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + s_j &= b_j \end{aligned}$$

Variables de surplus

$$\begin{aligned} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &\geq b_j \\ \rightarrow a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n - u_j &= b_j \end{aligned}$$

Retour à la forme standard (suite)

Variables libres

x_j non contraint: $x_j \geq 0$

Première approche: décomposition

$$x_j = s_j - u_j, \quad s_j \geq 0, \quad u_j \geq 0.$$

Deuxième approche: substitution

Supposons $a_{kj} \neq 0$

$$x_j = b_k - \frac{a_{k1}}{a_{kj}}x_1 - \frac{a_{k2}}{a_{kj}}x_2 - \dots - \frac{a_{k,j-1}}{a_{kj}}x_{j-1} - \frac{a_{k,j+1}}{a_{kj}}x_{j+1} - \dots - \frac{a_{kn}}{a_{kj}}x_n.$$

On remplace dans les autres contraintes.

Réalisabilité – optimalité

$\mathbf{x}$ réalisable si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq 0$.

$\mathbf{x}$ optimal si $\mathbf{x}$ est réalisable et il n'existe pas de $\mathbf{x}'$ réalisable tel que $\mathbf{c}^T \mathbf{x}' < \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.

Supposons $m \leq n$ et $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$. Sans perte de généralité, supposons les m premières colonnes de $\mathbf{A}$ indépendantes, et formons

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{D})$$

Solution de base: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_b \ 0)$, avec $\mathbf{B}\mathbf{x}_b = \mathbf{b}$.

Example (Wyndor Glass)

La compagnie Wyndor Glass Co. produit des produits verriers de haute qualité, incluant des fenêtres et des portes vitrées. Elle dispose à cette fin de trois usines (usine 1, usine 2, usine 3), qui ont chacune une capacité de production limitée. Les châssis en aluminium et les matériaux sont produits dans l'usine 1, les châssis en bois sont fabriqués dans l'usine 2, et l'usine 3 produit le verre et assemble les produits. La compagnie a décidé de mettre en place de ligne de production:

- produit 1: une porte vitrée avec un châssis d'aluminium;
- produit 2: une fenêtre double-vitrage avec châssis en bois.

Un lot de 20 unités donne lieu à un profit de \$3000 et \$5000, respectivement pour le produit 1 et le produit 2.

Example (Wyndor Glass)

	Produit 1 Tps de prod. (h)	Produit 2 Tps de prod. (h)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18

Chaque lot d'un produit est le résultat combiné de la production dans les trois usines. Nous souhaitons déterminer le taux de production pour chaque produit (nombre de lots par semaine) de façon à maximiser le profit total.

Les variables de décision sont

- x_1 , le nombre de lots du produit 1;
- x_2 , le nombre de lots du produit 2.

Le fonction objectif est le profit total, qui vaut $3x_1 + 5x_2$, en l'exprimant en millier de dollars. Nous voulons maximiser ce profit.

Exemple (Wyndor Glass)

En résumé, nous avons le problème d'optimisation suivant:

$$\max_x z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{t.q. } x_1 \leq 4 \text{ (usine 1)}$$

$$2x_2 \leq 12 \text{ (usine 3)}$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \text{ (usine 3)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{non-négativité})$$

Dans l'exemple

$$z = 3x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}z.$$

L'ordonnée à l'origine, dépendant de la valeur de z , est $\frac{1}{5}z$, et la pente vaut $-\frac{3}{5}$. Maximiser revient à augmenter z .



