

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

La méthode du simplexe

Principe général: visite de manière “intelligente” les points extrêmes de l'ensemble réalisable.

“Intelligent”: chaque point extrême nouvellement visité devrait correspondre à une valeur plus petite de la fonction objectif.

Pivots: première interprétation

Considérons l'ensemble d'équations

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

avec $m \leq n$.

Sous forme matricielle, on peut écrire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Pivots: première interprétation

Dénotons par \mathbf{a}^i la i^{e} ligne de \mathbf{A} . Cela donne

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{x} = b_1$$

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{x} = b_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}^m \mathbf{x} = b_m$$

Si $m < n$ et que les équations sont linéairement indépendantes, il n'y a pas une solution unique mais une variété linéaire de solutions.

Note: un ensemble V dans E^n est dit variété linéaire si pour tout $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ appartenant à V , et pour tout réel α , $\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2$ appartient à V .

Pivots: première interprétation

$m < n$, équations linéairement indépendantes.

On peut ajouter $n - m$ équations de la forme

$$\mathbf{e}^k \mathbf{x} = 0,$$

avec

$$\mathbf{e}^k = (0 \quad \dots \quad 0, \underbrace{1}_{k^{\text{e}} \text{ position}} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T.$$

Ceci revient à fixer x_k à 0, vu que

$$\mathbf{e}^k \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow x_k = 0.$$

En procédant de la sorte, on obtient une solution de base au système linéaire.

Différentes solutions de base seront obtenues en imposant différentes équations additionnelles de cette forme.

Exemple

On considère le problème

$$\min_x 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$$

$$\text{t.q. } x_1 + x_2 = 4$$

$$x_2 - x_3 = 2;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}^+.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors,

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base ne pourra faire intervenir que a_1 , a_2 et a_3 .

Exemple

Prenons a_1 et a_3 pour composer la base. On complète A avec e^2 et e^4 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais la base n'est pas réalisable! (Pourquoi?)

Pivots: forme canonique

Si les équations sont linéairement dépendantes, on peut remplacer une équation par une un multiple non-nul d'elle-même plus une combinaison linéaire des autres lignes du système.

But: réduire le système à la forme canonique

$$x_1 \quad \quad \quad + y_{1,m+1}x_{m+1} + y_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + y_{1,n}x_n = y_{10}$$

$$x_2 \quad \quad \quad + y_{2,m+1}x_{m+1} + y_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + y_{2,n}x_n = y_{20}$$

$$x_m \quad + y_{m,m+1}x_{m+1} + y_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + y_{m,n}x_n = y_{m0}$$

x_1, x_2, \dots, x_m : variables de base

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$: variables hors base

Prenons

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0}, \quad x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Nous avons la solution de base

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y}_0, 0),$$

avec $\mathbf{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0})$

Ce n'est qu'une solution de base parmi d'autres!

OK si la forme canonique est obtenu après avoir réordonné les équations et les variables. On parlera de forme canonique dès qu'on a isolé m variables de sorte que chacune de ces m variables apparaît dans une et une seule des m équations, et a un coefficient égal à 1.

Pivots: solution de base

Il est d'usage de représenter le système comme un *tableau* de coefficients:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1n} & y_{10} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{2n} & y_{20} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{3,m+1} & y_{3,m+2} & \cdots & y_{3n} & y_{30} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{mn} & y_{m0} \end{array}$$

Principe du pivot: **échanger une variable hors base avec une variable de base.**

Supposons que nous voulons remplacer la variable de base x_p , $1 \leq p \leq m$, par la variable hors base x_q , $m < q$.

Ceci est possible si et seulement si $y_{pq} \neq 0$, appelé élément pivot.

Divisons par y_{pq} la p^e équation:

$$0 \dots 0 \frac{1}{y_{pq}} 0 \dots 0 \frac{y_{p,m+1}}{y_{pq}} 0 0 \dots 0 \frac{y_{p,m+1}}{y_{pq}} \frac{y_{p,m+2}}{y_{pq}} \dots \frac{y_{pq}}{y_{pq}} \dots \frac{y_{pn}}{y_{pq}} \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$$

Le coefficient de x_q vient de passer à 1 dans cette équation. Il reste à supprimer cette variable des autres équations.

Il suffit de prendre les nouveaux coefficients suivant pour conserver un système canonique

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}, & i \neq p, \\ y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}}. \end{cases}$$

Exemple

On considère le système sous forme canonique

$$x_1 \quad \quad \quad +x_4 + x_5 - x_6 = 5$$

$$x_2 \quad \quad \quad +2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3$$

$$x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = -1$$

Sous forme de tableau, nous avons

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	0	1	1	-1	5
0	1	0	2	-3	1	3
0	0	1	-1	2	-1	-1

L'opération de pivotage conduit à

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	0	1	1	-1	5
-2	1	0	0	-5	3	-7
1	0	1	0	3	-2	4

Exemple

En continuant,

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$3/5$	$1/5$	0	1	0	$-2/5$	$18/5$
$2/5$	$-1/5$	0	0	1	$-3/5$	$7/5$
$-1/5$	$3/5$	1	0	0	$-1/5$	$-1/5$

et

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	-1	-2	1	0	0	4
1	-2	-3	0	1	0	2
1	-3	-5	0	0	1	1

On a dès lors la solution

$$(0, 0, 0, 4, 2, 1)^T$$

Pivot: seconde interprétation

Repartons du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Autrement dit, \mathbf{b} est exprimé comme combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{A} :

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Si $m < n$, la solution n'est pas unique, mais il y a une famille de solutions. Par contre, la représentation de \mathbf{b} est unique comme combinaison linéaire d'un sous-ensemble linéairement indépendant de m de ces vecteurs. La solution correspondante, avec $n - m$ variable x_j mises à zéro, est une solution de base.

Pivot: seconde interprétation

Repartons du système canonique sous forme de tableau:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1n} & y_{10} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{2n} & y_{20} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{3,m+1} & y_{3,m+2} & \cdots & y_{3n} & y_{30} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{mn} & y_{m0} \end{array}$$

Les m premiers vecteurs forment une base, et on peut interpréter les autres vecteurs comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base:

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \dots + y_{mj}\mathbf{a}_m.$$

Pivot: seconde interprétation

Pour le voir, nous pouvons passer à la forme matricielle, en supposant par simplicité que la base est formée des m premières colonnes de A . Dès lors, on peut décomposer A comme

$$A = (B \quad D)$$

où D est composée des colonnes hors-base. Ramener à la forme canonique revient à multiplier A par B^{-1} :

$$B^{-1}A = (I \quad B^{-1}D)$$

ou encore

$$A = B (I \quad B^{-1}D)$$

On obtient la relation en identifiant colonne par colonne:

$$\mathbf{a}_j = B \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

Supposons que nous souhaitions remplacer le vecteur de base \mathbf{a}_p , $1 \leq p \leq m$, par le vecteur \mathbf{a}_q , en supposant de plus que nous gardions un ensemble de vecteurs indépendants.

À nouveau, ceci requiert $y_{pq} \neq 0$.

Nous avons

$$\mathbf{a}_q = \sum_{i=1, i \neq p}^m y_{iq} \mathbf{a}_i + y_{pq} \mathbf{a}_p.$$

De là,

$$\mathbf{a}_p = \frac{1}{y_{pq}} \mathbf{a}_q - \sum_{i=1, i \neq p}^m \frac{y_{iq}}{y_{pq}} \mathbf{a}_i.$$

En se rappelant

$$\mathbf{a}_j = y_{1j}\mathbf{a}_1 + y_{2j}\mathbf{a}_2 + \dots + y_{mj}\mathbf{a}_m,$$

nous obtenons

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1, i \neq p}^m \left(y_{ij} - \frac{y_{iq}y_{pj}}{y_{pq}} \right) \mathbf{a}_i + \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \mathbf{a}_q.$$

Nous obtenons comme précédemment

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{iq}y_{pj}}{y_{pq}}, & i \neq p, \\ y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}}. \end{cases}$$

Mise sous forme canonique

Exemple: supposons que nous souhaitons résoudre le système d'équations

$$x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$

Afin d'obtenir une base de départ, nous formons le tableau augmenté

e_1	e_2	e_3	a_1	a_2	a_3	b
1	0	0	1	1	-1	5
0	1	0	2	-3	1	3
0	0	1	-1	2	-1	-1

On doit remplacer e_1 par a_1 , e_2 par a_2 et e_3 par a_3 .

Points extrêmes adjacents

Jusqu'à présent, nous avons ignoré les contraintes de non-négativité dans le système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0.$$

Ces contraintes de non-négativité vont guider le choix de la variable qui sortira de la base.

Hypothèse de non dégénérescence: toute solution de base réalisable est une solution de base réalisable non dégénérée.

Sans cette hypothèse, il faudrait prendre plus de précautions dans ce qui va suivre, mais les principes généraux resteront valides.

Détermination du vecteur sortant de la base

Supposons que nous avons la solution de base réalisable

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0),$$

ou de manière équivalente, la représentation

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

Sous l'hypothèse de non dénérescence, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Nous voulons faire entrer le vecteur \mathbf{a}_q , $q > m$. Nous avons

$$\mathbf{a}_q = y_{1q} \mathbf{a}_1 + y_{2q} \mathbf{a}_2 + \dots + y_{mq} \mathbf{a}_m.$$

Détermination du vecteur sortant de la base

Multiplions la dernière équation par $\epsilon \geq 0$:

$$-\epsilon \mathbf{a}_q + \epsilon y_{1q} \mathbf{a}_1 + \epsilon y_{2q} \mathbf{a}_2 + \dots + \epsilon y_{mq} \mathbf{a}_m = 0.$$

Soustrayons l'égalité

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

Ceci donne

$$(x_1 - \epsilon y_{1q}) \mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_{2q}) \mathbf{a}_2 + \dots + (x_m - \epsilon y_{mq}) \mathbf{a}_m + \epsilon \mathbf{a}_q = \mathbf{b}.$$

Pour $\epsilon = 0$, on n'a rien changé. Pour $\epsilon > 0$ mais suffisamment petit, tous les coefficients sont positifs, et on maintient la faisabilité.

Détermination du vecteur sortant de la base

Supposons qu'au moins un coefficient diminue comme ϵ augmente, et prenons

$$\epsilon = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0 \right\}.$$

Autrement, nous cherchons la plus petite valeur de ϵ qui annule un coefficient.

Soit

$$p = \arg \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0 \right\}.$$

i.e. l'indice correspond à l' ϵ calculé. Sous l'hypothèse de non dégénérescence, p est unique si au moins un y_{iq} est strictement positif. Nous obtenons ainsi une nouvelle solution de base comme

$$(x_1 - \epsilon y_{1q})\mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_{2q})\mathbf{a}_2 + \dots + (x_{p-1} - \epsilon y_{(p-1)q})\mathbf{a}_{(p-1)} + (x_{p+1} - \epsilon y_{(p+1)q})\mathbf{a}_{(p+1)} + \dots + (x_m - \epsilon y_{mq})\mathbf{a}_m + \epsilon \mathbf{a}_q = \mathbf{b}.$$

Ensemble réalisable non borné

S'il n'y a pas de $y_{iq} > 0$, on ne peut trouver de nouvelle solution de base. On peut choisir ϵ arbitrairement grand, et si au moins un $y_{iq} < 0$, on peut rendre la composante de la solution arbitrairement grand. Dès lors, l'ensemble K des solutions réalisables est non borné.

On ne peut avoir tous les y_{iq} égaux à 0. . .

Nous avons donc défini une procédure d'échange de bases ou de détection d'un ensemble réalisable non borné.

Echange de bases: forme tableau

Reprenons le système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq 0.$$

et supposons qu'il est déjà sous forme canonique:

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\cdots	\mathbf{a}_m	\mathbf{a}_{m+1}	\mathbf{a}_{m+2}	\cdots	\mathbf{a}_n	\mathbf{b}
1	0	\cdots	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	\cdots	y_{1n}	y_{10}
0	1	\cdots	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	\cdots	y_{2n}	y_{20}
0	0	\cdots	0	$y_{3,m+1}$	$y_{3,m+2}$	\cdots	y_{3n}	y_{30}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
0	0	\cdots	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	\cdots	y_{mn}	y_{m0}

Supposons de plus que $y_{1i} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, de sorte à avoir une solution (de base) réalisable.

Echange de bases: forme tableau

On veut faire entrer le vecteur \mathbf{a}_q ($q > m$), tout en maintenant la réalisabilité.

Quel élément choisir comme pivot dans la q^{e} colonne?

Nous avons la solution de base

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0}.$$

Il suffit de calculer les rapports

$$\frac{x_i}{y_{iq}} = \frac{y_{i0}}{y_{iq}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

puis de sélectionner le plus petit rapport nonnégatif, et de pivoter sur le y_{iq} correspondant.

Exemple

Considérons le système

$$\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{b} \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Base: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, donnant la solution de base réalisable

$$x = (4, 3, 1, 0, 0, 0)^T$$

Supposons avoir décidé de faire rentrer a_4 dans la base. Afin de déterminer quel élément est le pivot approprié, nous calculons les trois rapports:

$$4/2 = 2$$

$$3/1 = 3$$

$$1/(-1) = -1$$

et nous sélectionnons le plus petit non-négatif.

Exemple

Ceci donne 2 comme élément pivot. Le nouveau tableau est

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
1/2	0	0	1	2	3	2
-1/2	1	0	0	0	0	1
1/2	0	1	0	4	4	3

avec la solution de base réalisable correspondante $(0, 1, 3, 2, 0, 0)^T$.